

Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins.

Von E. HECKE in Hamburg.

Im folgenden entwickle ich ein neues Hilfsmittel zur Untersuchung der Verteilung gewisser Zahlfolgen mod. 1, welches die bisher bewiesenen Sätze hierüber erheblich verschärft und welches mir auch wegen der dabei benutzten analytischen Funktionen ein selbständiges Interesse zu verdienen scheint.

Es bedeute für reelles x $R(x)$ den Bruchbestandteil von x , d. h. diejenige Zahl, wofür $0 \leq R(x) < 1$, $x - R(x)$ ganz rational. Ist nun α eine irrationale Zahl, so liegen z. B. die Zahlen $R(n\alpha)$ wie auch $R(n^2\alpha)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ im Intervall $0 \dots 1$ überall dicht und sogar, wie Herr WEYL gezeigt hat, asymptotisch gleich dicht. Diese Sätze wie auch eine große Zahl anderer Theoreme über Verteilung von Zahlen mod. 1 beweist Herr WEYL durch systematische Benutzung der Invariante der Zahlen mod. 1, der Funktion $e^{2\pi iz}$, welche gleichmäßig auf alle Irrationalitäten α anwendbar ist. Die feinere arithmetische Struktur der einzelnen Irrationalität wird bei dieser Methode nicht berücksichtigt und kann sich daher in den Resultaten auch nicht kundgeben. Die Herren HARDY und LITTLEWOOD haben in ihren Untersuchungen über diophantische Approximationen darüber hinaus noch Zahlfolgen wie $R(n\alpha)$ dadurch analysiert, daß sie gerade die arithmetischen Eigenschaften von α in der Form der Kettenbruchentwicklung von α wesentlich benutzen.

Die Frage, die ich weiterhin behandle, ist erheblich enger gestellt: Ich beschäftige mich nur mit der Zahlfolge $R(n\alpha)$, und zwar zunächst nur für eine *quadratische Irrationalität* α , und konstruiere mir die auf dieses Problem „passende“ analytische Funktion, aus deren Verhalten die Verteilung der $R(n\alpha)$ abgelesen werden kann. Dafür gehen die Resultate, die ich so erhalte, aber wesentlich weiter. In der Darstellung habe ich möglichst wenig aus der Idealtheorie des quadratischen Körpers $k(\alpha)$ benutzt und mich der Verständlichkeit halber auf die formal einfachsten Fälle beschränkt, so daß die Sätze nicht in ihrer größten Allgemeinheit ausgesprochen und bewiesen werden. Ich beweise weiterhin nur diejenigen Sätze, welche ohne komplizierte Rechnungen durch Benutzung absolut konvergenter Integrale sich herleiten lassen.

Im § 1 zeige ich zunächst auf Grund des Weylschen Satzes, daß die Potenzreihe $\sum_{m=1}^{\infty} R(m\alpha)x^m$ über den Konvergenzkreis $|x| = 1$ überhaupt nicht fortsetzbar ist, und zwar für beliebiges irrationales α . Dieser Satz ist offenbar gleichbedeutend mit dem, daß die Reihe mit ganzen Zahlkoeffizienten $\sum_1^{\infty} [m\alpha] x^m$ nicht fortsetzbar ist. In diesem Zusammenhang erinnere ich an einen von Herrn POLYA vermuteten und kürzlich durch Herrn CARLSON¹⁾ bewiesenen merkwürdigen Satz, wonach für eine derartige Reihe nur zwei Möglichkeiten bestehen: Entweder ist sie eine rationale Funktion von angebbarem einfachen Bau oder sie ist überhaupt nicht fortsetzbar. Ich beweise noch etwas mehr über das Verhalten der Potenzreihe bei Annäherung an gewisse Randpunkte.

Im § 2 wird α spezialisiert, indem ich $\alpha = \sqrt{D}$ annehme, wo $4D$ eine gerade Diskriminante eines reellen quadratischen Körpers ist, also $D \equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$ und quadratfrei. Da verhalten sich die *Dirichletschen Reihen*

$$(1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R(m\alpha) - \frac{1}{2}}{m^s}$$

völlig anders als die Potenzreihen. Ich beweise nämlich in § 2 und 3, daß eine solche *Dirichletsche Reihe eine meromorphe Funktion von s definiert; sie hat Pole nur in der Halbebene $\Re(s) \leq 0$, und zwar an den Stellen*

$$s = -2k \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}, \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots \text{in inf.})$$

worin η die Grundeinheit von $k(\sqrt{D})$ oder das Quadrat derselben ist. Von diesen Polen können einige wegfallen; unter gewissen Umständen, wie bei $\alpha = \sqrt{3}$, sind alle vorhanden, während für $\alpha = \sqrt{2}$ z. B. $s = 0$ eine reguläre Stelle ist. Die Sätze beweise ich durch Zurückführung jener Reihe auf die Funktionen $\zeta(s; \lambda)$, welche ich früher als Hilfsmittel einer „analytischen Zahlentheorie in zwei Dimensionen“ eingeführt habe²⁾. Ihre wichtigsten Eigenschaften, soweit sie hier erforderlich, stelle ich auf S. 62 zusammen.

In den § 4 und 5 gewinne ich daraus die Koeffizientenabschätzung

$$(2) \quad \sum_{0 < m \leq x} \left(R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right) = O(x^\delta) \quad (\text{für alle } \delta > 0)$$

¹⁾ Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Mathem. Zeitschrift*, Bd. 9 (1921), S. 1–13.

²⁾ Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. *Mathem. Zeitschr.*, Bd. 6 (1920), S. 11–51.

und damit eine sehr genaue Abschätzung der Verteilung der $R(m\alpha)$, d. h. der Anzahl der Gitterpunkte m, n in einem *Parallelstreifen*

$$0 < m\alpha - n \leq \varrho, \quad 0 < m \leq x.$$

Diese Anzahl ergibt sich zu

$$(2a) \quad \varrho x + O(x^\delta)$$

für alle $\delta > 0$ *gleichmäßig für alle* $\varrho > 0$. Hiernach verhalten sich diese Anzahlen bei Parallelstreifen völlig anders wie bei krummlinig begrenzten Bereichen. Die Gleichung (2) erscheint bei mir als eine Folge der Konvergenz der Reihe (1) für $\Re(s) > 0$. Diese Konvergenz beweise ich mit dem Schnee-Landauschen Konvergenzsatz; doch muß ich ihn dabei auf Dirichletsche Reihen anwenden, deren Exponentenfolge nicht einmal den Schneeschen Bedingungen genügt, muß also den Beweis des Satzes etwas verändern. Es ist bemerkenswert, daß man hier Resultate für Dirichletsche Reihen des speziellen Typus auf dem Umweg über Reihen von viel allgemeinerem Typus erhält.

Die Herren HARDY und LITTLEWOOD¹⁾ haben in einem Vortrag in Cambridge die Behauptung ausgesprochen, daß das Fehlerglied in (2) nur von der Ordnung $\log x$ sei und sogar für alle α mit beschränkten Kettenbruchnennern; ihr Beweis ist mir nicht bekannt geworden.

Mit meiner Methode folgen aber weitergehende Abschätzungen; man erhält nämlich z. B. für die Cesàroschen wie auch die Rieszschen Summen höherer-als 1. Ordnung der Reihe $\sum_{0 < m \leq x} R(m\alpha)$ asymptotische Entwicklungen nach absteigenden Potenzen von x und $\log x$, deren Koeffizienten *Fouriersche Reihen* von der Gestalt $\sum_n c_n x^{\frac{2\pi i n}{\log \eta}}$ sind, worin also $\log x$ nur mod $\log \eta$ in Betracht kommt. Die Formeln haben eine gewisse Ähnlichkeit mit der Riemannschen Primzahlformel.

Es sei noch erwähnt, daß sowohl die Potenzreihen wie die Dirichletschen Reihen richtiger als spezielle Fälle von Funktionen von *zwei* Veränderlichen aufzufassen sind. Bei diesem Ansatz erweisen sich auch die Potenzreihen der analytischen Behandlung zugänglich. Man erhält unendlich viele verschiedene Darstellungen dieser Funktionen, aus deren jeder das Verhalten der Funktion in der Nähe gewisser Randpunkte abgelesen werden kann, und zwar viel schärfer, als es die limes-Gleichung im § 1 beschreibt. Auf diese Fragen, welche für mich ursprünglich den Ausgangspunkt bildeten, komme ich in anderem Zusammenhange noch ausführlich zurück.

¹⁾ Some problems of Diophantine approximation. Proc. of the 5. Int. Congress of Math., Vol. 1, p. 223. Cambridge 1913.

Bei dem Übergang von (2) zu (2a) wurde ich auf eine elementare für *alle* Irrationalitäten α gültige Identität geführt, welche es gestattet, die Anzahl der Gitterpunkte in einem Parallelstreifen für sehr allgemeine Klassen von Zahlen α abzuschätzen. Auf diesem elementaren Wege beweise ich in § 6 ohne Benutzung transzendenter Hilfsmittel den Satz: Ist $\alpha (> 0)$ eine algebraische Zahl k^{ten} Grades, so ist die Anzahl der Lösungen von

$$0 < m\alpha - n \leq \varrho \quad 0 < m \leq x$$

in ganzen Zahlen m, n gleich

$$\varrho x + O\left(x^{1-\frac{1}{r}+\delta}\right)$$

für jedes $\delta > 0$, und zwar gleichmäßig für alle $\varrho > 0$. Dabei ist die Zahl r nur von α abhängig und kann auf Grund des Liouvilleschen Approximationsatzes gleich $k-1$, unter Benutzung des Thueschen Satzes gleich $\frac{k}{2}$ gewählt werden.

§ 1. Die Potenzreihen $\sum R(m\alpha) x^m$.

Es sei α eine reelle irrationale Zahl. *Die im Innern des Einheitskreises reguläre Funktion*

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} R(m\alpha) x^m$$

wird bei radialer Annäherung an einen Randpunkt $e^{2\pi i \vartheta}$ derart unendlich groß, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) F(re^{2\pi i \vartheta}) = \frac{1}{2\pi i q},$$

wenn

$$\vartheta = p + q\alpha \quad (q \neq 0)$$

mit ganzem rationalen p, q . (Fall a.)

Ist dagegen ϑ und kein Multiplum von α von dieser Form, so ist (Fall b), wenn ϑ nicht ganz,

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) F(re^{2\pi i \vartheta}) = 0.$$

Beweis: Wir erinnern uns an folgenden bekannten Satz über Potenzreihen: Existiert für eine Potenzreihe $\sum c_m x^m$ der Mittelwert der Koeffizienten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{0 \leq m \leq t} c_m = c,$$

so ist bei radialer Annäherung an $x = 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m = c.$$

Unsere zu beweisende Behauptung kommt daher darauf hinaus, zu zeigen, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i q} & \text{im Falle a,} \\ 0 & \text{" " b,} \end{cases}$$

worin

$$S(t) = \sum_{0 \leq m \leq t} R(m\alpha) e^{2\pi i m \vartheta}.$$

Im Falle a) ist nun

$$S(t) = \sum_{0 \leq m \leq t} R(m\alpha) e^{2\pi i m(p+q\alpha)} = \sum_{0 \leq m \leq t} R(m\alpha) e^{2\pi i q R(m\alpha)},$$

und auf Grund eines bekannten Satzes von Herrn WEYL¹⁾ liegen für irrationales α die Zahlen $R(m\alpha)$ asymptotisch gleichmäßig dicht, derart, daß also für jede stetige Funktion $f(x)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{0 \leq m \leq t} f(R(m\alpha)) = \int_0^1 f(x) dx,$$

woraus die Behauptung a) folgt.

Im Falle b) sind $1, \vartheta, \alpha$ rational linear unabhängig und nach Herrn WEYL¹⁾ liegen auch die Punkte (x, y) mit den Koordinaten

$$x = R(m\alpha), \quad y = R(m\vartheta)$$

für $m = 0, 1, 2, \dots$ asymptotisch gleichmäßig dicht im Einheitsquadrat, so daß für alle stetigen Funktionen $f(x, y)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{0 \leq m \leq t} f(R(m\alpha), R(m\vartheta)) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy,$$

woraus auch der zweite Teil der Behauptung folgt.

Für die übrigbleibenden Randpunkte ergibt sich auf demselben Wege: Ist $a\vartheta = b\alpha + c$, wo a, b, c teilerfremde ganze Zahlen, $a > 1$, so ist der entsprechende Grenzwert von $(1-r) F(re^{2\pi i \vartheta})$ auch vorhanden und gleich

$$\frac{1}{a} \sum_{h=0}^{a-1} \int_0^1 R(ax + h\alpha) e^{2\pi i R(bx + h\vartheta)} dx.$$

Da die Punkte $\vartheta = p + q\alpha$ des Falles a) überall dicht mod. 1 liegen, so wird F unendlich groß bei Annäherung an eine überall dicht auf der Peripherie des Einheitskreises verteilte Menge und ist daher nicht fortsetzbar.

¹⁾ Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1. Math. Ann., Bd. 77 (1916), S. 313–352.

§ 2. Die Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R(m\alpha)}{m^s}$.

Es sei D eine quadratfreie ganze rationale Zahl $\equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$, so daß $4D$ Diskriminante des Körpers $k(\sqrt{D})$ ist. Wir betrachten neben den Funktionen

$$\varphi(s, \alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R(m\alpha) - \frac{1}{2}}{m^s}$$

für $\alpha = \sqrt{D}$ und $\frac{1}{\sqrt{D}}$ folgende beiden Funktionen: Es bedeute $v(\mu)$ einen Vorzeichencharakter des reellen Zahlenpaares μ, μ' , und zwar entweder

$$v(\mu) = \operatorname{sgn} \mu \mu' = v_1(\mu)$$

oder

$$v(\mu) = 1 = v_0(\mu).$$

Damit bilden wir

$$(3) \quad \Phi(s; v) = \sum_{\mu} \frac{v(\mu)}{(|\mu| + |\mu'|)^s},$$

worin die Summation über alle $\mu = m + n\sqrt{D}$ und $\mu' = m - n\sqrt{D}$ (mit ganzen rationalen m, n , die nicht beide Null sind) zu erstrecken ist. Hiermit ergibt sich

$$\Phi(s; v_0) + \Phi(s; v_1) = 4 \sum_{\substack{\mu > 0 \\ \mu' > 0}} \frac{1}{(\mu + \mu')^s}.$$

Die Anzahl der Glieder mit demselben $\mu + \mu' = 2m$ ist offenbar

$$1 + 2 \left[\frac{m}{\sqrt{D}} \right] = 1 + \frac{2m}{\sqrt{D}} - 2R\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right)$$

und daher

$$\frac{1}{4} (\Phi(s; v_0) + \Phi(s; v_1)) = \frac{2^{1-s}}{\sqrt{D}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s-1}} - 2^{1-s} \varphi\left(s; \frac{1}{\sqrt{D}}\right),$$

d. h.

$$\begin{aligned} & \varphi\left(s, \frac{1}{\sqrt{D}}\right) = \\ (4) \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) - \frac{1}{2}}{m^s} = -2^{s-3} (\Phi(s, v_0) + \Phi(s, v_1)) + \frac{1}{\sqrt{D}} \zeta(s-1), \\ & \varphi(s, \sqrt{D}) = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R(m\sqrt{D}) - \frac{1}{2}}{m^s} = -2^{s-3} D^{\frac{s}{2}} (\Phi(s, v_0) - \Phi(s, v_1)) + \sqrt{D} \zeta(s-1). \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\Phi(s, v_0) = -2^{2-s} \left(\varphi \left(s, \frac{1}{\sqrt{D}} \right) + D^{-\frac{s}{2}} \varphi(s, \sqrt{D}) \right) + \frac{2^{2-s}}{\sqrt{D}} \left(1 + D^{1-\frac{s}{2}} \right) \zeta(s-1),$$

$$\Phi(s, v_1) = -2^{2-s} \left(\varphi \left(s, \frac{1}{\sqrt{D}} \right) - D^{-\frac{s}{2}} \varphi(s, \sqrt{D}) \right) + \frac{2^{2-s}}{\sqrt{D}} \left(1 - D^{1-\frac{s}{2}} \right) \zeta(s-1).$$

Die Funktionen Φ lassen sich nun in die ganze Ebene fortsetzen, wenn man bedenkt, daß die Gesamtheit der in (3) auftretenden Glieder sich durch Ersetzen von μ durch $\mu\eta$ reproduziert, wenn η eine total positive Einheit ist. Es bedeute nun η die Grundeinheit mod. 1 ($\eta > 1$), also eine solche Einheit, deren Potenzen alle total positiven Einheiten liefern. Wir nennen zwei Zahlen assoziiert mod. 1, wenn der Quotient eine Potenz von η ist. Ferner sei $e(1)$ die Anzahl der verschiedenen mod. 1 nicht assoziierten Einheiten, also $e(1) = 4$, wenn η das Quadrat einer Einheit ε im Körper ist, wobei alsdann ε die Norm -1 hat, sonst ist $e(1) = 2$. Fügen wir nun in Φ an geeigneter Stelle eine neue Variable ein, so gelangen wir zu der Funktion

$$\Phi(s, x; v) = \sum_{\mu} \frac{v(\mu)}{(|\mu|e^x + |\mu'|e^{-x})^s}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für festes s mit $\Re(s) > 2$ gleichmäßig in jedem endlichen Gebiet der reellen Variablen x , sogar auch noch für komplexe x , solange nur $\Re(e^x) > 0$ und $\Re(e^{-x}) > 0$, d. h. der imaginäre Teil von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Jedenfalls ist Φ eine periodische Funktion von x mit der Periode $\log \eta$, beliebig oft differentierbar und läßt sich daher in eine Fourierreihe entwickeln,

$$\Phi(s, x; v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2\pi i n x}{\log \eta}}.$$

Hierin ist

$$A_n = \frac{1}{\log \eta} \int_0^{\log \eta} e^{-\frac{2\pi i n x}{\log \eta}} \sum_{\mu} \dots dx.$$

Die $\sum_{\mu}$ zerlegen wir nun in eine Doppelsumme nach der Vorschrift

$$\sum_{\mu} f(\mu) = \sum_{(\mu)_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\mu \eta^k),$$

worin jetzt die äußere Summe über $(\mu)_0$ nur über die verschiedenen mod. 1 nicht assoziierten μ zu erstrecken ist; die Summe über k der einzelnen

Integrale fügt sich zu einem einzigen Integral zusammen und somit kommt

$$\log \eta \cdot A_n = \sum_{(\mu)} v(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i n x}{\log \eta}} dx}{(|\mu|e^x + |\mu'|e^{-x})^s} = \sum_{(\mu)_0} \frac{v(\mu) \lambda^n(\mu)}{|N(\mu)|^{\frac{s}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi i n x}{\log \eta}} dx}{(e^x + e^{-x})^s}.$$

Das Integral ist von μ unabhängig und hat den Wert

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\pi i n}{\log \eta}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\pi i n}{\log \eta}\right)}{2 \Gamma(s)},$$

und $\lambda(\mu)$ bedeutet

$$\lambda(\mu) = e^{\frac{\pi i}{\log \eta} \log \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|}.$$

Ist nun für jede Einheit ϵ des Körpers $\lambda^n(\epsilon) v(\epsilon) = 1$, so kommt jedes Ideal (μ) in dieser Summe $e(1)$ mal vor, und A_n ist damit ausgedrückt durch eine früher von mir untersuchte Funktion

$$\zeta(s; \lambda^n v, \mathfrak{R}_1) = \sum_{(\mu)} \frac{v(\mu) \lambda^n(\mu)}{|N(\mu)|^s},$$

worin über die verschiedenen nicht assoziierten ganzen Zahlen μ des Körpers außer Null zu summieren ist. $\mathfrak{R}_1$ ist in diesem Falle das Zeichen für die Hauptklasse und soll in dieser Arbeit weiterhin weggelassen werden, da andere Klassen hier nicht auftreten.

Gibt es andererseits eine Einheit ϵ , so daß $\lambda^n(\epsilon) v(\epsilon) \neq 1$, also dann $= -1$, so zerstören sich in der Summe je zwei Glieder mit μ und $\mu \epsilon$ gegenseitig und $A_n = 0$.

In beiden Fällen setzen wir

$$A_n = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\pi i n}{\log \eta}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\pi i n}{\log \eta}\right)}{2 \Gamma(s) \log \eta} \cdot e(1) \cdot \zeta\left(\frac{s}{2}; \lambda^n v\right),$$

worin im zweiten der genannten Fälle das Funktionszeichen ζ die Null bedeuten soll. Somit ergibt sich, wenn wir in der Reihe $\Phi(s, x; v)$ $x = 0$ setzen

$$\Phi(s; v) = e(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\pi i n}{\log \eta}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\pi i n}{\log \eta}\right)}{2 \Gamma(s) \log \eta} \cdot \zeta\left(\frac{s}{2}; \lambda^n v\right).$$

§ 3. Fortsetzbarkeit der Dirichletschen Reihen.

Diese Entwicklung gilt zunächst nur für $\Re(s) > 2$. Für die ζ habe ich aber an der genannten Stelle¹⁾ außer ihrer Fortsetzbarkeit in die

¹⁾ Siehe S. 55, Fußnote ²⁾.

ganze Ebene ($s = 1$ evtl. ausgenommen) folgende Tatsachen nachgewiesen:
Man setze

$$A = \frac{2}{\pi} \sqrt{D}. \quad \begin{array}{ll} a = 1 & \text{für } v = v_1 \\ a = 0 & \text{„ } v = v_0 \end{array}$$

Dann gilt:

$$1. \quad A^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2} + \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right) \Gamma\left(\frac{s+a}{2} - \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right) \zeta(s; \lambda^n v) = \xi(s; \lambda^n v)$$

ändert sich nicht, wenn man s durch $1 - s$ und n durch $-n$ ersetzt. Das ist auch noch richtig, wenn ζ Null bedeutet.

2. Die Funktionen ξ sind ganze transzendente Funktionen mit Ausnahme derjenigen für $n = 0$, $v = v_0$; diese hat nur bei $s = 0, 1$ je einen einfachen Pol mit dem Residuum $2 \log \epsilon$ bei $s = 1$ und $-2 \log \epsilon$ bei $s = 0$. ϵ ist die Grundeinheit, welche > 1 ist.

3. Die Funktionen $\xi(s; \lambda^n v)$ sind in jedem unendlichen Vertikalstreifen der s -Ebene gleichmäßig in n beschränkt. Das ist unmittelbar aus der dortigen Formel (42) und (43) abzulesen, in welcher n , das den m_q entspricht, nur in dem Faktor $e^{2\pi i n x}$, dagegen nicht in der Thetafunktion vorkommt.

Hieraus ersieht man, daß in jedem endlichen Gebiet der s -Ebene die gefundene Reihe für $\Phi(s; v)$ gleichmäßig konvergiert, wenn man endlich viele, hier Pole besitzende Glieder abtrennt. Denn das Γ -Produkt, welches in der Funktion $\xi\left(\frac{s}{2}; \lambda^n v\right)$ auftritt, hat bis auf die Terme mit a nur halb so große Argumente wie das Γ -Produkt, das in der Reihe neben $\zeta\left(\frac{s}{2}, \lambda^n v\right)$ steht. Berücksichtigen wir dann die Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-s} \sqrt{\pi} \Gamma(s),$$

so ergibt sich

$$(5) \quad \Phi(s; v) = \frac{2^{s-3} e(1) A^{-\frac{s}{2}}}{\pi \log \eta \cdot \Gamma(s)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{s}{4} + \frac{1-a}{2} + \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right) \Gamma\left(\frac{s}{4} + \frac{1-a}{2} - \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right) \xi\left(\frac{s}{2}; \lambda^n v\right).$$

Da nun bekanntlich für reelles t

$$\lim_{|t|=\infty} \frac{\Gamma(\sigma + it)}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

gleichmäßig für alle σ in einem festen Intervall $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, so folgt nach 3. in der Tat die gleichmäßige Konvergenz.

$\Phi(s; v)$ ist daher in der ganzen endlichen Ebene meromorph. Was nun die Lage der Pole anlangt, so befinden sich in der Halbebene $\Re(s) > 0$ keine Pole der Γ -Faktoren. Es ist also $\Phi(s; v_1)$ regulär für $\Re(s) > 0$; dagegen hat $\Phi(s; v_0)$ bei $s = 2$ einen einfachen Pol mit dem Residuum

$$\frac{2 \cdot e(1) A^{-1}}{2\pi \log \eta} 2 \log \varepsilon = \sqrt{D} \frac{e(1)}{\log \eta} \log \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{D}}.$$

Die Pole in der Halbebene $\Re(s) \leq 0$ übersieht man am bequemsten, wenn wir $\xi(s)$ durch $\xi(1-s)$ ersetzen und die Gleichung

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s \pi}$$

berücksichtigen. So erhalten wir aus der Funktionalgleichung die Darstellung

$$(5a) \quad \Phi(s; v) = \frac{\pi e(1) A^{1-s} \cdot 2^{s-3}}{\Gamma(s) \log \eta} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta\left(1 - \frac{s}{2}; \lambda^n v\right)}{\sin \pi \left(\frac{s}{4} + \frac{1-a}{2} + \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right) \sin \pi \left(\frac{s}{4} + \frac{1-a}{2} - \frac{\pi i n}{2 \log \eta}\right)},$$

aus der über die Halbebene $\Re(s) \leq 0$ folgendes zu sehen ist:

a) $v = v_1, a = 1$.

Sämtliche ζ im Zähler sind für $\Re(s) \leq 0$ regulär, $\frac{1}{\Gamma(s)}$ verschwindet, und zwar in 1. Ordnung, nur bei $s = 0, -1, -2, \dots$. Also: Die sämtlichen Pole von $\Phi(s; v_1)$ liegen bei

$$s = -4k \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}, \quad \left. \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right\} (\text{in inf.})$$

Keiner hat höhere als 1. Ordnung, und sie sind in 1. Ordnung dann und nur dann vorhanden, wenn für das zugehörige k, n

$$\zeta\left(1 + 2k \mp \frac{\pi i n}{\log \eta}; \lambda^n v_1\right) \neq 0.$$

Ist die Norm der Grundeinheit $= -1$ ($\eta = \varepsilon^2$), so fehlen also jedenfalls die Werte n , welche gerade Zahlen sind. Abgesehen von dieser Ausnahme sind aber von einem gewissen genügend großen k ab alle genannten Stellen auch wirklich Pole, da ζ sich für solche Argumente wesentlich auf das 1. Glied reduziert, also $\neq 0$ ist. Und bei einklassigen Körpern, z.B. $k(\sqrt{3})$, sind diese ζ -Werte bekanntlich sogar sämtlich $\neq 0$. Überdies verschwindet $\Phi(s; v_1)$ bei $s = -k$, wo k eine ganze positive, nicht durch vier teilbare Zahl ist.

Das Residuum bei $s = 0$ ist insbesondere

$$4 e(1) \sqrt{D} \frac{\zeta(1; v_1)}{\pi^2 \log \eta}.$$

b) $v = v_0$, $a = 0$.

Hier liegen die Pole bei

$$s = -2 - 4k \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}, \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

wobei über das wirkliche Auftreten dieser Stellen als Pole Ähnliches wie oben zu bemerken ist. $s = 0$ ist jedenfalls also kein Pol.

Bezüglich unserer Ausgangsfunktionen φ ergibt sich daher:

Die durch die Dirichletschen Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R(m \sqrt{D}) - \frac{1}{2}}{m^s} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) - \frac{1}{2}}{m^s}$$

definierten Funktionen sind meromorphe Funktionen von s , welche für $\Re(s) > 0$ regulär sind, für $\Re(s) \leq 0$ aber nur einfache Pole besitzen, und zwar höchstens an den Stellen

$$s = -2k \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Insbesondere ist das Residuum bei $s = 0$:

$$\pm \frac{e(1) \sqrt{D}}{2\pi^2 \log \eta} \zeta(1; v_1),$$

welches z. B. für $D = 2$, wo die Norm der Grundeinheit -1 ist, verschwindet.

§ 4. Das Verhalten der Funktionen in einem vertikalen Streifen.

Um die bekannten Methoden der analytischen Zahlentheorie auf die Frage nach der Koeffizientenverteilung der Reihen $\varphi(s) = \varphi(s, \alpha)$ anwenden zu können, haben wir $\varphi(s)$ für $s = \sigma + it$ in einem festen Streifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ als Funktion von t abzuschätzen.

Es handelt sich zunächst um $\Phi(s; v)$ für $\Re(\sigma) = \sigma_1$, wo σ_1 eine feste negative ungerade Zahl ist. Wir beweisen:

$$\Phi(\sigma_1 + it; v) = O\left(|t|^{\frac{3}{2} - \sigma_1}\right).$$

Zum Beweise benutzen wir die Darstellung (5a). In den Zählern ist

$$\left| \zeta\left(1 - \frac{\sigma_1 + it}{2}, \lambda^n v\right) \right| = \left| \sum_{(\mu)} \frac{\lambda^n(\mu) v(\mu)}{|N(\mu)|^{1 - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{it}{2}}} \right| < \sum_{(\mu)} \frac{1}{|N(\mu)|^{1 - \frac{\sigma_1}{2}}},$$

also beschränkt in n, t .

Die Nullstellen des Sinus im Nenner liegen um mindestens 1 von der Geraden $\Re(s) = \sigma_1$ entfernt. Daher ist, wenn gesetzt wird

$$c = \frac{\pi}{2 \log \eta}, \quad (c > 0),$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left| \frac{1}{\sin \pi \left(\frac{\sigma_1}{4} + \frac{1-a}{2} + i \left(\frac{t}{4} + nc \right) \right) \sin \pi \left(\frac{\sigma_1}{4} + \frac{1-a}{2} + i \left(\frac{t}{4} - nc \right) \right)} \right| \\ & \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi \left| \frac{t}{4} + nc \right| - \pi \left| \frac{t}{4} - nc \right|} \\ & \leq 2 \sum_{n \leq \frac{|t|}{4c}} e^{-\pi \frac{|t|}{2}} + 2 \sum_{n > \frac{|t|}{4c}} e^{-2\pi nc} \\ & = O\left(|t| e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) + O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right) = O\left(|t| e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right). \end{aligned}$$

Also

$$\Phi(\sigma_1 + it; v) = O\left(\frac{|t| e^{-\frac{\pi}{2}|t|}}{\Gamma(\sigma_1 + it)}\right) = O\left(|t|^{\frac{3}{2} - \sigma_1}\right).$$

Hieraus folgt weiter nach (4)

$$\varphi(\sigma_1 + it) = O\left(t^{\frac{3}{2} - \sigma_1}\right) + O\left(\zeta(\sigma_1 - 1 + it)\right).$$

Aus der Riemannschen Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ folgt aber bekanntlich

$$\zeta(\sigma_1 - 1 + it) = O\left(t^{\frac{3}{2} - \sigma_1}\right), \quad (\sigma_1 < 0)$$

so daß also für jede ungerade negative ganze Zahl σ_1

$$\varphi(\sigma_1 + it) = O\left(t^{\frac{3}{2} - \sigma_1}\right),$$

während auf der Geraden $\Re(s) = 1 + \delta$ ($\delta > 0$) $\varphi(s)$ beschränkt ist.

Um hieraus auf das Verhalten von φ im Innern des Streifens $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq 1 + \delta$ schließen zu können, müssen wir noch die Singularitäten von φ im Innern berücksichtigen. Wir stellen fest, daß wegen $\eta > 1$

$$H(s) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \eta^{-s-2k})$$

eine ganze transzendente Funktion von s ist, die in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq \sigma_2$ beschränkt ist. Ihre Nullstellen liegen so, daß $H(s) \cdot \varphi(s)$ eine ganze Funktion von s ist. Endlich zeigt die Abschätzung der einzelnen Summenglieder von Φ auf Grund der Eigenschaften 1., 2., 3. von $\xi(s; \lambda^n v)$, daß in jedem Streifen $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq \sigma_2$ gleichmäßig

$$H(s) \cdot \varphi(s) = O(e^{|t| \cdot \text{constans}}).$$

(Offenbar genügt es, diese Gleichung für eine diskret ins Unendliche wachsende Folge von t -Werten zu beweisen.)

Die bekannte Schlußweise von PHRAGMEN-LINDELÖF ergibt also das Resultat:

In jedem festen Streifen $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq 1 + \delta$ ($\delta > 0$, $\sigma_1 < 0$, σ_1 ungerade) ist gleichmäßig

$$H(s) \cdot \varphi(s) = O(t^{k(\sigma)}).$$

worin $k(\sigma)$ diejenige lineare Funktion von σ ist, welche die Bedingungen

$$k(1 + \delta) = 0, \quad k(\sigma_1) = \frac{3}{2} - \sigma_1$$

erfüllt, d. h.

$$k(\sigma) = \left(\frac{3}{2} - \sigma_1 \right) \cdot \frac{\sigma - 1 - \delta}{\sigma_1 - 1 - \delta}.$$

Lassen wir σ_1 gegen $-\infty$ und δ gegen Null konvergieren, so konvergiert $k(\sigma)$ gegen $1 - \sigma$ und folglich ist in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq \sigma_2$ für beliebiges $\mathfrak{A} > 0$ gleichmäßig im Streifen

$$(8) \quad H(s) \varphi(s) = O(|t|^{1-\sigma+\mathfrak{A}}).$$

Setzen wir hier $s = \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}$, so folgt für das Residuum von Φ in diesem

Punkte: $\text{Res. } \Phi(s; v) \left(\text{bei } s = \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta} \right) = O(n^{1+\mathfrak{A}})$ für alle $\mathfrak{A} > 0$. Berücksichtigen wir weiter, daß nach der Definitionsgleichung für $H(s)$ in jedem

festen von Nullstellen freien Streifen, z. B. $0 < \delta \leq \sigma \leq 2$, für $|H(s)|$ eine positive untere Schranke existiert, so folgt weiter: Ist $\delta > 0$, $\mathfrak{A} > 0$, so ist gleichmäßig für $\delta \leq \Re(s) \leq 1$

$$(9) \quad \varphi(s) = O(|t|^{1-\sigma+\mathfrak{A}}).$$

§ 5. Die Abschätzung der Koeffizientensumme.

Wenn wir auf die Reihe $\varphi(s)$ die Methoden anwenden, welche bei solchen Fragen üblich sind, so gelangen wir zunächst nur zu dem Ergebnis: Es ist für alle $\mathfrak{A} > 0$

$$(10) \quad \sum_{0 \leq m \leq x} \left(R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\mathfrak{A}}\right),$$

und die Reihe für $\varphi(s)$ konvergiert daher für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Man beweist dies entweder direkt durch Benutzung des absolut konvergenten Integrales

$$\int_{\mathfrak{A}-i\infty}^{\mathfrak{A}+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^2} x^s ds,$$

wo ϑ eine positive GröÙe ist, oder durch Benutzung des Schnee-Landauschen Konvergenzsatzes: Aus Regularität von $\varphi(s)$ für $\Re(s) > 0$ und $\varphi(s) = O(|t|)$ für $\Re(s) > \vartheta$ folgt die Konvergenz der Reihe für

$$\Re(s) > \frac{\vartheta + 1}{2},$$

d. h. für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Aus der Konvergenz folgt dann umgekehrt jene Abschätzung (10).

Weiter läÙt sich diese Schranke so nicht verbessern, da $\varphi(s)$ nicht über $\sigma = 0$ hinaus regulär ist. Wir benutzen aber nun die Tatsache: $H(s)\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion, wobei

$$H(s) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \eta^{-s-2n}).$$

Diese Funktion ist aber offenbar in eine, sogar für alle s konvergente Dirichletsche Reihe entwickelbar, nämlich in eine Potenzreihe nach η^{-s} :

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\eta^{ns}},$$

welche sogar absolut konvergiert. Also ist auch $H(s)\varphi(s)$ zunächst für $\Re(s) > 1$ in eine konvergente Dirichletsche Reihe

$$G(s) = H(s)\varphi(s) = \sum_n \frac{b_n}{l_n^s}$$

entwickelbar, worin l_n der GröÙe nach geordnet alle Zahlen der Form $m\eta^k$ ($m = 1, 2, 3 \dots, k = 0, 1, 2 \dots$) durchläuft. Diese Reihe würde nun auf Grund des Schnee-Landauschen Konvergenzsatzes für $\Re(s) > 0$ konvergieren, falls die Zahlfolge l_n noch den erforderlichen Bedingungen genügt. Denn es ist nach dem vorigen Paragraphen $G(s)$ regulär für $\Re(s) > \sigma_0$ und in diesem Bereiche ist für alle $\vartheta > 0$

$$G(s) = O(|t|^{1-\sigma_0+\vartheta}).$$

Die Reihe für $G(s)$ konvergiert daher (da sie für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert) für

$$\Re(s) > \frac{\sigma_0 + 1 - \sigma_0 + \vartheta}{2 - \sigma_0 + \vartheta} = \frac{1 + \vartheta}{2 - \sigma_0 + \vartheta},$$

d. h. für $\Re(s) > 0$,

da ja σ_0 beliebig groß gewählt werden kann.

Andererseits ist aber

$$\frac{1}{H(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{\eta^{ns}}$$

eine für $\Re(s) > 0$ konvergente Potenzreihe in η^{-s} und daher eine für $\Re(s) > 0$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe. Nach einem bekannten Satze ist nun das Produkt einer absolut konvergenten und einer konvergenten Dirichletschen Reihe wieder konvergent, d. h.

$$\varphi(s) = G(s) \cdot \frac{1}{H(s)}$$

ist eine für $\Re(s) > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe. Ist die Konvergenzabszisse von $\varphi(s)$ aber Null, so gilt für die Koeffizientensumme

$$(11) \quad \sum_{0 < m \leq x} \left(R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right) = O(x^\vartheta)$$

für alle $\vartheta > 0$.

Nun ist aber jener Konvergenzsatz nicht anwendbar, da die Zahlen $m\eta^k$, die als Basiszahlen in der Reihe $G(s)$ auftreten, dichter liegen, als es die Voraussetzungen gestatten. Jedoch läßt sich der Schluß retten, indem wir schrittweise vorgehen. Offenbar ist die obige Behauptung über $\varphi(s)$ schon bewiesen, wenn wir den Konvergenzsatz auf jede der Funktionen

$$(12) \quad G_k(s) = H_k(s) \varphi(s) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

anwenden dürfen, worin $H_k(s)$ das *endliche* Produkt

$$H_k(s) = \prod_{0 \leq n \leq k} (1 - \eta^{-s-2n})$$

bedeutet; denn die Funktion (12) erfüllt für $\sigma_0 = -2k$ die oben für $G(s)$ genannten Bedingungen.

Auch auf $G_k(s)$ ist der Konvergenzsatz seinem Wortlaut nach nicht anwendbar, da die Exponentenfolge $\lambda_n = \log l_n$ der Dirichletschen Reihe immer noch zu dicht liegt. Trotzdem läßt sich aber der Beweis des Satzes so modifizieren, daß er auch für unsere Reihe gilt. Wir bedenken nämlich, daß $H_k(s)$ eine nur aus *endlich* vielen Gliedern bestehende Reihe ist, und daher ist

$$G_k(s) = \sum_n \varphi_n(s)$$

eine endliche Summe von Reihen der Gestalt

$$\varphi_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^{(n)}}{l_m^s},$$

worin für jedes einzelne $n = n_0$

$$l_m = m \eta^{n_0}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

also eine Reihe, deren Exponentenfolge offenbar den Schneeschen Bedingungen genügt. Überdies sind die $b_m^{(n)}$ beschränkt. In dem Beweise,

wie er in vereinfachter Form etwa in Herrn LANDAUS Handbuch¹⁾ steht, wird nun die Schneesche Bedingung nur für eine einzige Abschätzung benutzt: Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

absolut konvergent für $\Re(s) > 1$, ferner x eine gegen $+\infty$ strebende Variable, g konstant und $0 < g < 1$, $\omega = x^g$. Es handelt sich um die Richtigkeit der Gleichung

$$(13) \quad \int_{1-\gamma+\delta-i\omega}^{1-\gamma+\delta+i\omega} \frac{x^s}{s} f(s+\gamma) ds - \sum_{\lambda_n \leq \log x} b_n e^{-\lambda_n \gamma} = o(1)$$

für festes $\gamma > 1-g$ und hinreichend kleine positive δ . Die Gleichung wird bewiesen für eine bestimmte ins Unendliche wachsende Folge x , nämlich

$$x = x_n = e^{\frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}}$$

Sind aber z. B. die b_n beschränkt, so erkennt man sogleich, daß (13) auch für *kontinuierlich* ins Unendliche wachsende x richtig ist. Folglich gilt die Gleichung (13) für jedes $f(s)$, das sich als *Summe endlich vieler* Dirichletscher Reihen darstellen läßt, deren Koeffizienten beschränkt sind und deren Exponentenfolgen einzeln den Schneeschen Bedingungen genügen, wobei jede einzelne Reihe für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert. Diese Voraussetzungen treffen für $G_k(s)$ zu, so daß (13) auch für $f(s) = G_k(s)$ richtig ist. Der weitere Verlauf des Beweises bleibt unverändert. Damit ist (11) bewiesen.

An einem späteren Landauschen Beweise²⁾ läßt sich die Modifikation noch leichter vornehmen. Die dort genannten Voraussetzungen (1) über die Dichtigkeit der Exponentenfolge λ_n lassen sich, ohne im nachfolgenden Beweise eine Änderung nötig zu machen, durch diese ersetzen: $f(s)$ möge sich in endlich viele Dirichletsche Reihen additiv zerlegen lassen, deren Exponentenfolgen einzeln den Bedingungen

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n(l+\delta)}) \quad (\text{für alle } \delta > 0)$$

mit dem gleichen Werte l genügen. Für unsere Reihen $g_n(s)$ trifft das mit $l = 1$ zu.

¹⁾ Bd. II, S. 854 und 841.

²⁾ Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. Leipziger Berichte, Bd. 69 (1917).

Hieraus folgt weiter: Sei q eine ganze Zahl ≥ 1 und es bedeute

$$\mathfrak{P}_m(q) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } R(m\alpha) \geq 1 - R(q\alpha), \\ 0, & \text{im übrigen.} \end{cases}$$

$$S(x) = \sum_{0 < m \leq x} \left(R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S(x+q) - S(x) - S(q) &= \sum_{q < m \leq x+q} R(m\alpha) - \sum_{0 < m \leq x} R(m\alpha) = \\ &= \sum_{0 < m \leq x} (R((m+q)\alpha) - R(m\alpha)) = \sum_{0 < m \leq x} (R(q\alpha) - \mathfrak{P}_m(q)), \end{aligned}$$

weil

$$R(x+y) = \begin{cases} R(x) + R(y) & \text{für } R(x) + R(y) < 1; \\ R(x) + R(y) - 1 & \text{„ } R(x) + R(y) \geq 1. \end{cases}$$

Also ist für ganzes x , q (> 0)

$$\sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(q) = R(q\alpha)x - S(x+q) + S(x) + S(q).$$

(Man bemerke übrigens, daß die rechte Seite hier $= xR(q\alpha) + O(1)$ für festes q ist!) Lassen wir daher x oder q oder beide ins Unendliche wachsen, so folgt nach (11) für jedes $\delta > 0$

$$(14) \quad \sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(q) = xR(q\alpha) + O((x+q)^\delta).$$

Hieraus läßt sich die Verteilung der $R(m\alpha)$ in einem beliebigen Intervall herleiten. Es sei $0 \leq \varrho < 1$;

$$\mathfrak{P}_m(\varrho) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } R(m\alpha) \geq 1 - \varrho, \\ 0 & \text{im übrigen,} \end{cases}$$

ferner sei

$$R(q_1\alpha) \leq \varrho < R(q_2\alpha),$$

also

$$\begin{aligned} 1 - R(q_2\alpha) < 1 - \varrho \leq 1 - R(q_1\alpha), \\ \sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(q_2) < \sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(\varrho) \leq \sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(q_1), \end{aligned}$$

Approximiert man nun ϱ in geeigneter Weise durch Zahlen der Form $R(q\alpha)$ (vgl. den folgenden Paragraphen), so ergibt sich aus (14) sogleich die Relation

$$\sum_{0 < m \leq x} \mathfrak{P}_m(\varrho) = \varrho x + O(x^\delta)$$

für jedes feste $\delta > 0$ gleichmäßig für $0 < \varrho < 1$. Schreiben wir $1 - \varrho$ an Stelle von ϱ , so folgt für $x - \sum \mathfrak{P}_m(1 - \varrho)$:

Die Anzahl der Zahlen $R(m\alpha) < \varrho$ mit $0 < m \leq x$ ist gleichmäßig für $0 \leq \varrho \leq 1$

$$\varrho x + O(x^\delta).$$

Geometrisch ausgedrückt: Die Anzahl der Gitterpunkte m, n im Parallelstreifen mit der Neigung α

$$\begin{aligned} 0 < m\alpha - n < \varrho, \\ 0 < m < x \end{aligned}$$

ist (für jedes feste $\delta > 0$) gleichmäßig für alle $\varrho > 0$

$$\varrho x + O(x^\delta).$$

In dieser Formulierung darf ϱ dann eine beliebige positive Zahl sein.

Aus den Sätzen über $\varphi(s)$ folgt aber für die Verteilung der $R(m\alpha)$ noch mehr. Betrachten wir z. B. das Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{s^\delta} \varphi(s) ds,$$

welches für $a > -1$ noch absolut konvergiert, sofern die Pole des Integranden vermieden werden, so ergibt eine einfache Anwendung des Cauchyschen Satzes für jedes $\delta > 0$

$$\sum_{0 < m \leq x} c_m \left(\log \frac{x}{m} \right)^2 = A_3 \log^3 x + A_2 \log^2 x + A_1 \log x + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n x^{\frac{2\pi i n}{\log \eta}} + O\left(\frac{1}{x^{1-\delta}}\right),$$

wobei

$$c_m = R(m\alpha) - \frac{1}{2},$$

A_1, A_2, A_3, C_n von x unabhängige Konstanten, C_n überdies von der Größenordnung $n^{-2+\delta}$, so daß die unendliche Fourierreihe absolut konvergiert. Das sind offenbar die Rieszschen Mittel 2. Ordnung vom „Typus $\log m$ “. Analoges folgt über die Mittel 2. Ordnung vom „Typus m “, d. h. die Cesaroschen Mittel, und natürlich a fortiori für die Mittel höherer Ordnung. In allen diesen treten, von den Polen von $\varphi(s)$ herrührend, periodische Terme auf.

Ein weiterer Komplex von Sätzen ergibt sich, wenn man die Sätze von Herrn SCHNEE¹⁾ über den Bereich der Summierbarkeit einer Dirichletschen Reihe auf die Funktionen $G_k(s)$ in ähnlicher Art anwendet, wie es oben mit dem Konvergenzsatz geschehen ist.

Endlich läßt sich auch zeigen, daß folgende Reihe eine meromorphe Funktion ist:

$$\sum_{n_0} \frac{1}{n_0^s},$$

worin n_0 nur diejenigen ganzen Zahlen durchläuft, wofür $R(n_0\alpha) < |R(q\alpha)|$ für festes ganzes q . Die Pole liegen bei $s = 1$ und $s = -k \pm \frac{2\pi i n}{\log \eta}$ ($k, n = 0, 1, 2, \dots$).

¹⁾ Über den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichletscher Reihen und ihrem funktionentheoretischen Charakter. Acta math., Bd. 35 (1911).

§ 6. Die Verteilung der $R(m\alpha)$ für allgemeinere Irrationalitäten.

Es sei jetzt α eine beliebige positive (irrationale) Zahl und es mögen zu α zwei positive Größen C_1 und r existieren, derart, daß für alle ganzen p, q , wo $q > 0$, stets

$$(15) \quad \frac{C_1}{q^r} < |q\alpha - p|.$$

(Das ist nach LIOUVILLE z. B. für alle algebraischen Zahlen α der Fall, wo man $r = k - 1$ wählen kann, wenn k der Grad von α ist.) Der bekannte Approximationssatz läßt sich unter der Voraussetzung (15) dann sofort folgendermaßen verschärfen: Zu jedem positiven t gibt es zu α ganze Zahlen p, q , so daß, $C_2 = \sqrt[r]{C_1}$ gesetzt,

$$(16) \quad |q\alpha - p| < \frac{1}{t}$$

$$C_2 t^{\frac{1}{r}} < q < t, \quad (p, q) = 1.$$

Das Wesentliche ist hier die untere Grenze für q . In der Tat ist ja nach (15)

$$\frac{C_1}{q^r} < \frac{1}{t}.$$

Hieraus folgt für die inhomogene diophantische Ungleichung: Ist $t > 1$ und $0 \leq \varrho \leq 1$, so ist das System von Ungleichungen (mit $C_3 = 1 + C_2^{-1}$)

$$(17) \quad |x\alpha - y - \varrho| < \frac{C_3}{t^r}$$

$$0 < x < t$$

in ganzen Zahlen x, y lösbar. Man wähle nämlich zu t das p, q der Bedingungen (16) und bestimme die ganzen Zahlen x, y durch die Kongruenz

$$xp \equiv q\varrho - R(q\varrho) \pmod{q}, \quad xp - yq = q\varrho - R(q\varrho)$$

mit der Bedingung

$$0 < x \leq q.$$

Das ist stets möglich, da $q\varrho - R(q\varrho)$ eine ganze Zahl und p, q teilerfremd. Wegen

$$p = q\alpha + \frac{\vartheta}{t} \quad (|\vartheta| < 1)$$

folgt daraus

$$(18) \quad x\alpha - y - \varrho = \frac{\vartheta x}{qt} - \frac{R(q\varrho)}{q}$$

$$|x\alpha - y - \varrho| \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{q} < \frac{1}{t} + \frac{1}{C_2 t^{\frac{1}{r}}} < \frac{C_3}{t^r}.$$

(Die Bemerkung, daß man x durch jene Kongruenz bestimmen muß, verdanke ich Herrn OSTROWSKI, meine ursprüngliche Abschätzung lieferte hier statt r eine größere Zahl.)

Wir entnehmen hieraus, wie gut sich eine Zahl ϱ ($0 \leq \varrho \leq 1$) durch Zahlen von der Form $R(q\alpha)$, $0, 1$ ($0 < q < t$) von oben und unten approximieren läßt. Es sei t so groß gewählt, daß $2C_3 t^{-\frac{1}{r}} < 1$. Aus (18) folgt

$$x\alpha - y = \varrho + \mathfrak{O} \frac{C_3}{t^{\frac{1}{r}}} \quad (|\mathfrak{O}| < 1)$$

Ist die rechte Seite nicht negativ und < 1 , so ist die linke Seite $= R(x\alpha)$.

Wendet man diesen Satz an auf die beiden Zahlen $\varrho \pm C_3 t^{-\frac{1}{r}}$, sofern diese noch zwischen 0 und 1 liegen, so ist damit ϱ zwischen zwei Zahlen $R(q_1\alpha)$ und $R(q_2\alpha)$ eingeschlossen, welche voneinander um höchstens $2C_3 t^{-\frac{1}{r}}$ differieren und wofür q_1 und q_2 zwischen 0 und t liegen. Wenn aber $\varrho \pm C_3 t^{-\frac{1}{r}}$ nicht beide zwischen 0 und 1 liegen, d. h. ϱ zu nahe an 0 oder 1, so hat man an Stelle der approximierenden Zahlen $R(q\alpha)$ die Grenzen 0 oder 1 selbst zu wählen. Somit ist folgendes bewiesen: Unter der Voraussetzung (15) gibt es zu α eine positive Konstante C , derart, daß für alle $\tau > 1$ zu jedem ϱ ($0 \leq \varrho \leq 1$) zwei Zahlen λ_1, λ_2 gefunden werden können mit der Eigenschaft

$$(19) \quad \lambda_1 \leq \varrho \leq \lambda_2, \quad \lambda_2 - \lambda_1 < \frac{C}{\tau}$$

und λ_1, λ_2 entweder 0, 1 oder von der Form $R(q\alpha)$, wo $0 < q < \tau^\tau$ und q ganz rational.

Nun sei, wie im vorigen Paragraphen, aber für beliebiges irrationales α ($\alpha > 0$),

$$\mathfrak{O}_m(\varrho) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } R(m\alpha) \geq 1 - \varrho; \\ 0 & \text{im übrigen.} \end{cases} \quad (0 \leq \varrho \leq 1)$$

Dann gilt:

I. Zu jedem irrationalen α (> 0) kann man eine unendliche Menge von Punkten $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ zwischen 0 und 1 angeben, derart, daß (bei festem i)

$$\sum_{m=1}^x \mathfrak{O}_m(\varrho_i) = \varrho_i x + O(1),$$

wenn die ganze Zahl x ins Unendliche wächst; nämlich die Zahlen $\varrho = R(q\alpha)$ ($q = 1, 2, 3, \dots$).

Der Beweis folgt sofort aus der im vorigen Paragraphen benutzten Identität. Es werde gesetzt (für ganzes x und $q > 1$)

$$S(x) = \sum_{m=1}^x \left(R(m\alpha) - \frac{1}{2} \right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S(x+q) - S(x) - S(q) &= \sum_{m=1}^x (R((m+q)\alpha) - R(m\alpha)) \\ &= \sum_{m=1}^x (R(q\alpha) - \mathfrak{J}_m(R(q\alpha))) = x R(q\alpha) - \sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(R(q\alpha)). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der linken Seite in x und q gilt daher für

$$(20) \quad A(x; q) = \sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(q) - qx$$

die Reziprozität

$$(21) \quad A(x; R(q\alpha)) = A(q; R(x\alpha))$$

für alle ganzen $x, q > 1$. Wegen

$$|A(q; R(x\alpha))| \leq q$$

folgt die Behauptung I.

Die Irrationalität α genüge jetzt der Bedingung (15) vom Anfang dieses Paragraphen, sei also z. B. eine algebraische Zahl. Dann gilt:

II. *Es ist gleichmäßig in q für $0 \leq q \leq 1$*

$$A(x; q) = \sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(q) - qx = O\left(x^{1-\frac{1}{r}+\delta}\right) \text{ für jedes } \delta > 0.$$

Zum Beweise approximieren wir q durch Zahlen $R(q\alpha)$ und wenden (19) an. Sei τ eine positive GröÙe, die nachher mit x ins Unendliche wachsen soll. Wir wählen λ_1, λ_2 zu q und τ nach dem oben bewiesenen Hilfssatz mit den Bedingungen (19). Dann ist

$$\sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(\lambda_1) \leq \sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(q) \leq \sum_{m=1}^x \mathfrak{J}_m(\lambda_2)$$

und folglich

$$\begin{aligned} (22) \quad A(x; q) &\leq A(x; \lambda_2) + (\lambda_2 - q)x < A(x; \lambda_2) + C \frac{x}{\tau}, \\ A(x; q) &\geq A(x; \lambda_1) + (\lambda_1 - q)x > A(x; \lambda_1) - C \frac{x}{\tau}. \end{aligned}$$

Es sei bereits bewiesen, daß mit einem gewissen Exponenten u gleichmäßig in q für $y \rightarrow \infty$

$$(23) \quad A(y; q) = O(y^u).$$

(Das ist z. B. richtig für $u = 1$.)

Ist nun $\lambda = R(q\alpha)$ und $0 < q < \tau^r$ ganz, so ist daher wegen (21)

$$A(x; \lambda) = A(x; R(q\alpha)) = A(q; R(x\alpha)) = O(q^u) = O(\tau^{ur}).$$

Das ist auch richtig für $\lambda = 0, 1$, weil aus der Definition sich ergibt

$$A(x; 0) = A(x; 1) = 0.$$

Also ist nach (23)

$$A(x; q) = O(\tau^{ur}) + O\left(\frac{x}{\tau}\right).$$

Das beste Resultat ergibt sich für

$$\tau = x^{\frac{1}{ur+1}},$$

womit folgt

$$A(x; q) = O\left(x^{\frac{ur}{ur+1}}\right).$$

D. h., wenn die Relation (23) richtig ist für den Exponenten u , so ist sie auch richtig für den Exponenten $u' = \frac{ur}{ur+1}$. Dieser ist $< u$, wenn

$u > 1 - \frac{1}{r}$. Durch endlichmalige Iteration dieses Schlusses kann man

offenbar u' beliebig nahe an $1 - \frac{1}{r}$ heranbringen, da die Gleichung

$u' = \frac{ur}{ur+1}$ für $r > 1$ eine hyperbolische Transformation mit den Fix-

punkten $0, 1 - \frac{1}{r}$ darstellt, für $r = 1$ aber $\frac{1}{u'} = \frac{1}{u} + 1$, also bei

Iteration auch hier $\frac{1}{u'}$ ins Unendliche wächst, d. h. u' gegen $0 = 1 - \frac{1}{r}$ konvergiert. Damit ist für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig für $0 \leq q \leq 1$ die Gleichung

$$A(x, q) = O\left(x^{1 - \frac{1}{r} + \delta}\right)$$

bewiesen.

Offenbar ist nun $x - \sum_{m=1}^x \mathfrak{P}_m(1 - q)$ die Anzahl der $R(m\alpha)$, wo $R(m\alpha) < q$ und $1 \leq m \leq x$. Damit ist also gezeigt:

Die Anzahl der Auflösungen der Ungleichungen in ganzen Zahlen m, n

$$0 \leq m\alpha - n \leq q$$

$$0 \leq m \leq x$$

ist bei festem α gleichmäßig in $q > 0$ gleich $qx + O\left(x^{1 - \frac{1}{r} + \delta}\right)$ für jedes $\delta > 0$.

Der Exponent r ist dabei so durch α bestimmt: Es soll für alle ganzen p, q ($q > 0$)

$$|q\alpha - p| > \frac{\text{constans}}{q^r} > 0$$

sein.

Für eine algebraische Zahl α vom Grade k ist nach LIOUVILLE z. B. $r = k - 1$ wählbar; auf Grund eines bekannten Satzes von Herrn THUE¹⁾ sogar $r = \frac{k}{2}$. Das Fehlerglied ist also bei quadratischen

Irrationalitäten $O(x^\delta)$, bei kubischen $O\left(x^{\frac{1}{3}+\delta}\right)$, bei biquadratischen $O\left(x^{\frac{1}{2}+\delta}\right)$ usw.

Diese Methode liefert also für quadratische Irrationalitäten dasselbe Resultat, wie die transzendente Methode des vorigen Paragraphen, welche die Abschätzung von $\sum_{m=1}^x R(m\alpha)$ benutzt. Durch genauere Verfolgung der Iteration bei der elementaren Methode kann man sogar das Fehlerglied noch etwas verkleinern, für $r = 1$ nämlich zu $O(e^{\sqrt{2 \log x}})$ und für $r > 1$ zu $O\left(x^{1-\frac{1}{r}}\right)$. Ich verzichte indes auf die Durchführung dieser Rechnung, da in der folgenden Arbeit Herr OSTROWSKI ebenfalls ohne Benutzung transzendenter Hilfsmittel zu den gleichen Abschätzungen, für $r = 1$ sogar zu $O(\log x)$ gelangt.

¹⁾ Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Crelles Journal Bd. 135 (1909). Vgl. hierzu die eben erschienene Arbeit von C. SIEGEL, Approximation algebraischer Zahlen, Mathem. Zeitschr. Bd. 10, welche $r = 2 \sqrt{k}$ zu setzen erlaubt.