

VORLESUNGEN ÜBER DARSTELLENDGEOMETRIE

Von

Dr. phil. Karl Strubecker

ord. Professor der Mathematik
an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Zweite, verbesserte und ergänzte Auflage

Mit 213 Figuren



GÖTTINGEN · VANDENHOECK & RUPRECHT · 1967

Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher

*Herausgegeben vom
Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach
unter Leitung von Hellmuth Kneser
Claus Müller und Theodor Schneider*

Band XII

© Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf foto- und akusto-mechanischem Wege zu vervielfältigen

Printed in Germany

Vorwort

zur ersten und zweiten Auflage

Das vorliegende Buch gibt, wenn man von einigen wenigen Ergänzungen absieht, nach Inhalt und Umfang genau die Vorlesungen über Darstellende Geometrie wieder, die ich seit dem Wintersemester 1953/54 an der Technischen Hochschule Karlsruhe für die Studierenden der Mathematik und Physik, des Maschinenbaus und der Elektrotechnik sowie des Bauingenieurwesens und der Architektur (im Umfang von drei Wochenstunden) gehalten habe.

Dem Manuskript des Buches lag eine Ausarbeitung meiner Vorlesungen zugrunde, die von meinem früheren Assistenten, Herrn Oberstudiendirektor Dr. rer. nat. ERWIN STEINBACHER, stammt. Von ihm stammen auch einige ergänzende Bemerkungen, wie die einfache Herleitung einiger Schmieggkreisformeln, sowie die nach dem Vorbilde meiner Tafelzeichnungen angefertigten Bleistiftzeichnungen der meisten Bilder. Die Tuschezeichnungen hat für die 1. Auflage Herr cand. ing. PAUL SPINDLER in sehr gewandter und sachkundiger Weise ausgeführt. Die 34 verbesserten und 11 ergänzten Bilder der 2. Auflage hat Herr cand. mach. PETER HOFMANN gezeichnet. Ich möchte den genannten Herren hier für ihre gewissenhafte Hilfe herzlich danken.

Ogleich das Buch Vorlesungen wiedergibt, die hauptsächlich vor Technikern gehalten wurden, hat es sich auch für Studenten der Mathematik und Physik (besonders für die Kandidaten des höheren Lehramtes) an Universitäten als geeignet erwiesen; vor allem wohl deswegen, weil ich mich an vielen Stellen bemüht habe, den mathematischen und geometrischen Kern des Gegenstandes deutlich hervortreten zu lassen. Vielleicht trägt das Buch durch diese Haltung dazu bei, dem Fache Darstellende Geometrie, das an vielen Universitäten leider recht stiefmütterlich gepflegt wird, den so nötigen Auftrieb zu verschaffen.

Ich möchte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß in den Vorlesungen selbst neben den Tafelzeichnungen viele Modelle vorgewiesen werden, welche dem Lernenden die räumliche Anschauung der geometrischen Fragen erleichtern. Auf ihre bildliche Wiedergabe mußte verzichtet werden. Eine moderne Vorlesung über Darstellende Geometrie arbeitet außerdem noch in erheblichem Umfange mit der Projektion von Dia-

positiven, einerseits, um die Tafelzeichnungen durch Klarbilder der entworfenen Figuren und der dargelegten Konstruktionen zu ergänzen, andererseits, um die Fertigkeit im Lesen von Konstruktionszeichnungen zu schulen.

Es ist der Hauptzweck einer Vorlesung, dem Verständnis des Gegenstandes den Weg zu bereiten. Die Anwendung ist hauptsächlich Domäne der Übungen, deren Objekte dann zweckmäßig dem speziellen Studiengebiete der Studenten (Maschinenbau, Bauwesen usw.) zu entnehmen sind. Auch diese, dem Interessenkreise des jeweiligen Faches angepaßten Übungen sowie geeignete theoretische Aufgaben bilden einen wesentlichen Teil der Ausbildung in der Darstellenden Geometrie.

Um den inneren Zusammenhang der Darstellenden Geometrie und der Geometrie überhaupt mit den analytischen Disziplinen der Mathematik zu betonen, habe ich auch die analytische Behandlung des Gegenstandes und die komplexen Elemente in gewissem Umfange herangezogen. Ich hoffe, dadurch sowohl dem Techniker als auch dem Mathematiker zu zeigen, daß beide Betrachtungsweisen, die geometrische und die analytische, einander in hervorragender Weise unterstützen und ergänzen. Jede hat zugleich ihre Vorzüge und ihre Schwächen, die schon CARL FRIEDRICH GAUSS, der „princeps mathematicorum“, in seiner Besprechung der „*Géométrie descriptive (nouvelle édition)*“ von GASPARD MONGE (1813) sehr klar wie folgt erläutert hat: „Man hat vor allem die Untersuchung der Raumgeometrie lieber mit Hilfe der Analyse (analytischen Geometrie) behandelt, und sie so gleichsam der Geometrie entzogen, welche sich nur der unmittelbaren Anschauung bedient. Es ist auch nicht zu leugnen, daß die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von großer Wichtigkeit, daß auch die geometrische Methode fortwährend kultiviert werde. Abgesehen davon, daß sie doch in manchen einzelnen Fällen unmittelbarer und kürzer zum Ziel führt als die Analyse, besonders, wenn diese nicht mit Gewandtheit gehandhabt wird, dann eine ihr eigentümliche Eleganz hat, wird sie auch besonders in formeller Hinsicht und beim frühen jugendlichen Studium unentbehrlich bleiben, um Einseitigkeit zu verhüten, den Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden.“

Indem wir uns dieser GAUSSschen Auffassung anschließen, wollen wir „analytische“ und „geometrische“ Methoden stets dort verwenden, wo dies vom heutigen Standpunkt aus zweckmäßig ist, dabei aber, wenn irgend möglich, der „geometrischen“ Methode den Vorzug geben, wie dies für ein Lehrbuch der Darstellenden Geometrie von vornherein natürlich und angemessen ist.

In Vorlesungen ist es meist zweckmäßig, gewisse höhere Dinge bei wiederholtem Auftreten von neuem auseinanderzusetzen und nicht einfach als allgemein bekannt vorauszusetzen. Damit erklärt sich, daß einige schwierigere Gegenstände auch in der vorliegenden Wiedergabe meiner Vorlesungen in neuem Zusammenhang wiederholt dargestellt werden. Aus der Entstehung als Niederschrift von Vorlesungen erklärt sich auch die stets sehr genaue Begründung und ausführliche Beschreibung aller Konstruktionen, welche auch dem Leser ermöglichen soll, das Entstehen der zahlreichen Figuren bis ins letzte zu verfolgen. Nicht ein möglichst kurzes, sondern ein möglichst verständliches Lehrbuch der Darstellenden Geometrie sollte durch diesen engen Anschluß an die Vorlesungen geboten werden, das dem Lernenden den Zugang zu der neuen Wissenschaft möglichst erleichtert. Es bleibt dem Leser für eigene Gedanken dann immer noch genügend Spielraum.

Die zweite Auflage enthält neben vielen kleineren Verbesserungen des Textes und der Bilder auch einige Ergänzungen, von denen hier nur der Schnellriß der Kugel erwähnt sei. Für ihre Mithilfe bei der Vorbereitung der zweiten Auflage habe ich besonders Herrn Akademischen Rat WOLFGANG GRIMM, ferner Herrn Oberstudienrat im Hochschuldienst WERNER KLEPPER und Herrn Kollegen Dr. rer. nat. WALTER O. VOGEL (Hannover) zu danken.

Dem bewährten Verlag *Vandenhoeck & Ruprecht* und seinen Mitarbeitern danke ich für manches freundliche Entgegenkommen und ihr stets bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche.

Hinweise für den Leser

Bezeichnungen: *Punkte* werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet (gelegentlich auch mit arabischen oder römischen Ziffern oder mit großen gotischen Buchstaben), *Geraden* mit kleinen lateinischen Buchstaben, *Ebenen* mit kleinen griechischen Buchstaben. Gelegentlich werden auch die Spurgeraden einer Ebene mit griechischen Buchstaben bezeichnet (z. B. Ebene ν , Spurgeraden ν_1 und ν_2).

Die *Strecke* zwischen den Punkten A und B und die *Entfernung* von A und B wird durch AB , die *Verbindungsgerade* der Punkte A und B mit $[AB]$ oder $[A, B]$ bezeichnet.

Das *Dreieck* mit den Ecken A, B, C wird mit (ABC) oder (A, B, C) , die *Verbindungsebene* der Punkte A, B, C mit $[ABC]$ oder $[A, B, C]$ bezeichnet.

Liegen die nichtparallelen Geraden a, b in einer Ebene π , so bezeichnet $P = [a, b]$ den *Schnittpunkt* P von a und b . Auch die *Verbindungsebene* π von a und b wird mit $\pi = [a, b]$ bezeichnet. Verwechslungen sind dabei nicht zu befürchten. Ähnlich bezeichnet $[A g]$ oder $[A, g]$ die *Verbindungsebene* des Punktes A mit der Geraden g und $[g \alpha]$ oder $[g, \alpha]$ den *Schnittpunkt* der Geraden g mit der Ebene α ; ferner bedeutet $[\alpha \beta]$ oder $[\alpha, \beta]$ die *Schnittgerade* der beiden Ebenen α und β , schließlich $[\alpha \beta \gamma]$ oder $[\alpha, \beta, \gamma]$ den *Schnittpunkt* der drei Ebenen α, β und γ .

Schließlich bedeutet $A g$ oder $g A$ den Abstand (Lotabstand) des Punktes A von der Geraden g und $A \alpha$ oder αA den Abstand (Lotabstand) des Punktes A von der Ebene α .

Verweise: *Kapitel* sind mit römischen Ziffern, *Paragraphen* mit arabischen Ziffern bezeichnet. 70. verweist auf Paragraph 70 und (70.1) auf Formel (1) in Paragraph 70. Die Formel (3) des laufenden Paragraphen wird mit (3) bezeichnet. (33. Satz 1) verweist auf Satz 1 in Paragraph 33. und (33. Bem. 1) auf Bemerkung 1 in Paragraph 33.

Inhalt

Schrifttum	XI
I. Abbildungsverfahren	1
1. Aufgabe der Darstellenden Geometrie	1
2. Zentralprojektion	4
3. Parallelprojektion	6
II. Parallelprojektion und perspektive Affinität.	8
4. Invarianten der Parallelprojektion	8
5. Der Satz von DESARGUES	11
6. Perspektiv Affinität	12
7. Analytische Darstellung einer ebenen perspektiven Affinität	14
8. Das Rechtwinkelpaar einer ebenen perspektiven Affinität.	17
9. Die Ellipse als affines Bild des Kreises	19
10. Affine Eigenschaften der Ellipse	21
11. Ellipsenkonstruktionen	23
III. Grund- und Aufrißverfahren	36
12. Grundbegriffe	36
13. Darstellung eines Punktes	37
14. Darstellung einer Geraden	40
15. Darstellung einer Ebene	45
16. Die Koinzidenzgerade oder Deckgerade einer Ebene	52
17. Parallelverschiebung der Rißachse	54
IV. Konstruktionsaufgaben im Grund- und Aufrißverfahren	57
18. Lagen- und Maßaufgaben. Dualitätsprinzip des Raumes	57
19. Erste Lagenaufgabe: Verbindungsebene von drei Punkten	60
20. Zweite Lagenaufgabe: Schnittgerade zweier Ebenen	62
21. Dritte Lagenaufgabe: Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene	63
22. Einführung einer neuen Rißtafel. Seitenriß und Kreuzriß	66
23. Erste Maßaufgabe: Wahre Länge einer Strecke	70
24. Zweite Maßaufgabe: Abstand eines Punktes von einer Ebene	72
25. Dritte Maßaufgabe: Abstand eines Punktes von einer Geraden	74
26. Vierte Maßaufgabe: Wahre Größe eines Winkels	79
27. Fünfte Maßaufgabe: Wahre Größe einer ebenen Figur	81
28. Sechste Maßaufgabe: Wahre Größe des Winkels zweier Ebenen	85
29. Schnitt eines dreiseitigen Prismas nach einem Dreieck vorgegebener Gestalt	87
30. Darstellung eines Kreises	90
31. Konstruktionen mit unzugänglichen Punkten	93

V. Darstellung ebenflächig begrenzter Körper im Grund- und Aufrißverfahren	95
32. Die regulären Polyeder	95
33. Der allgemeine Satz von DESARGUES. Perspektive Kollineation	97
34. Ebener Schnitt einer Pyramide	101
35. Ebener Schnitt eines Prismas	103
36. Durchdringung zweier ebenflächig begrenzten Körper	105
VI. Schrägrisse räumlicher Objekte	109
37. Das Schrägrißverfahren	109
38. Der Satz von POHLKE	115
39. Die schiefe Axonometrie	118
40. Das Schnellrißverfahren	121
VII. Drehzylinder	128
41. Ebener Schnitt eines Drehzylinders	128
42. Die Rektifikation des Kreises	133
43. Die Abwicklung des ebenen Schnittes des Drehzylinders	137
VIII. Drehkegel	142
44. Die Kegelschnitte als ebene Schnitte eines Drehkegels. Der Satz von DANDELIN	142
45. Der elliptische Schnitt eines Drehkegels	150
46. Der hyperbolische Schnitt eines Drehkegels	157
47. Der parabolische Schnitt eines Drehkegels	160
IX. Schiefer Kreiszylinder und schiefer Kreiskegel	167
48. Der ebene Schnitt eines schiefen Kreiszylinders	167
49. Der ebene Schnitt eines schiefen Kreiskegels	168
X. Kugel	175
50. Die Kugel im Grund- und Aufrißverfahren	175
51. Der ebene Schnitt einer Kugel	180
52. Umriß der Kugel im Schrägriß und Schnellriß	187
XI. Algebraische Kurven und Flächen	200
53. Algebraische Kurven in der Ebene	200
54. Algebraische Flächen im Raum	207
XII. Drehflächen	213
55. Die Drehflächen zweiter Ordnung	213
56. Das einschalige Drehhyperboloid	215
57. Die allgemeine Drehfläche	222
XIII. Ebene Schnitte von Drehflächen	226
58. Der achsenparallele Schnitt einer Drehfläche	226
59. Der schiefe Schnitt einer Drehfläche	229
XIV. Durchdringung von zwei Drehflächen	234
60. Das allgemeine Verfahren zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Flächen	234

61. Die Durchdringung zweier Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen	235
62. Die Durchdringung eines Drehzylinders mit einem Drehkegel bei sich schneidenden Achsen	246
63. Die Durchdringung einer Kugel mit einem Drehzylinder	249
64. Die Durchdringung eines Drehparaboloids mit einer Kugel	253
65. Der Schnitt einer Ringfläche mit einem Drehzylinder	256
66. Kugelförmige Stichkappe in einer zylindrischen Tonne	261
XV. Durchdringung zweier beliebiger Flächen	263
67. Schiefe kreiszylindrische Stichkappe in einer drehzylindrischen Tonne	263
68. Die Durchdringung einer Rohrfläche mit einem Drehkegel	266
69. Der Normalumriß einer Ringfläche	269
XVI. Schraublinien und Schraubflächen	274
70. Die Schraublinie	274
71. Die Schraubtorse	284
72. Die Wendelfläche	286
73. Die Durchdringung einer Wendelfläche mit einem Drehzylinder, der die Schraubachse als Mantellinie enthält. (Zylindrische Kurven der Wendelfläche)	289
74. Die scharfgängige Regelschraubfläche	293
75. Die schiefe offene Regelschraubfläche	302
76. Die sphärische Abdrehung einer scharfgängigen Regelschraubfläche	311
77. Die Schraubrohrfläche (Serpentine, Archimedisches Schlangenrohr)	313
78. Die gerade zyklische Schraubfläche	317
XVII. Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung	321
79. Der Satz von MEUSNIER	321
80. Der Satz von EULER	325
81. Der Tangentialschnitt in einem Kehlkreispunkt des Torus	332
82. Konstruktion der Doppelpunktstangenten der Schnittkurve zweier sich berührender Flächen	335
Namen- und Sachverzeichnis	339

Schrifttum

1. R. BEREIS, Darstellende Geometrie I, Berlin 1964.
2. U. GRAF, Darstellende Geometrie, bearb. von M. BARNER, 8. Aufl., Heidelberg 1964.
3. M. GROSSMANN, Darstellende Geometrie für Maschineningenieure, 3. Aufl., Berlin 1932.
4. W. HAACK, Darstellende Geometrie I/II/III (Sammlung Göschen, Bd. 142, 143, 144), 5./4./3. Aufl., Berlin 1965.
5. F. HOHENBERG, Konstruktive Geometrie in der Technik, 2. Aufl., Wien, 1961.
6. J. L. KRAMES, Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, 2. Aufl., Wien 1952.
7. E. KRUPPA, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
8. E. MÜLLER u. E. KRUPPA, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 5. Aufl., Wien 1948.
9. E. MÜLLER, E. KRUPPA, J. L. KRAMES, Vorlesungen über Darstellende Geometrie I (Lineare Abbildungen), II (Zyklographie), III (Konstruktive Behandlung der Regelflächen), Leipzig und Wien 1923/1929/1931.
10. I. PÁL, Darstellende Geometrie in Raumbildern, München 1961.
11. E. PAPPERITZ, Darstellende Geometrie, Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften III A B 6, Leipzig 1910.
12. F. REHBOCK, Darstellende Geometrie, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/ Heidelberg 1964.
13. F. REUTTER, Darstellende Geometrie I, 7. Aufl., Karlsruhe 1964; II, 3. Aufl., Karlsruhe 1964.
14. K. ROHN u. E. PAPPERITZ, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I/II/III, 3./4. Aufl., Leipzig 1906/1916.
15. E. SALKOWSKI, Darstellende Geometrie, 9. Aufl., Leipzig 1963.
16. H. V. SANDEN, Darstellende Geometrie, 9. Aufl., Stuttgart 1964.
17. G. SCHEFFERS, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I/II, 3. Aufl., Berlin 1927.
18. TH. SCHMID, Darstellende Geometrie I/II, 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1922/23.
19. E. STIEFEL, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 2. Aufl., Basel/Stuttgart 1960.
20. W. WUNDERLICH, Darstellende Geometrie I, B. I. Hochschultaschenbücher für den Ingenieur, Bd. 96/96a, Mannheim 1966.
21. CHR. WIENER, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I/II, Leipzig 1884/1887.
22. K. STRUBECKER, Differentialgeometrie I/II/III (Sammlung Göschen, Bd. 1113/1113a, 1179/1179a, 1180/1180a), Berlin 1964²/1958/1959.
23. K. STRUBECKER, Einführung in die Höhere Mathematik I/II, 2./1. Aufl., München/Wien 1966/1967.

I

Abbildungsverfahren

1. Aufgabe der Darstellenden Geometrie

Die *Darstellende Geometrie* ist, nach der Erklärung von GASPARD MONGE¹⁾, die *Lehre der exakten Methoden, die es ermöglichen, dreidimensionale Raumgebilde auf einer zweidimensionalen Bildebene darzustellen und räumliche Fragen in der Ebene auf konstruktiv-geometrischem Wege zu lösen.*

Historisch rein praktischen Zwecken, vor allem der Technik (Baukunst, Feldmessung, Schiffsbau, Maschinenkunde), aber auch der Astronomie (Abbildung der scheinbaren Himmelskugel), der Geographie (Kartenprojektion) und der Malerei (Perspektive) entwachsen, ist die Darstellende Geometrie heute zunächst eine der Grundwissenschaften der Technik. Ist, wie GASPARD MONGE gesagt hat, die zeichnerische Darstellung durch exakte Abbildungen (Pläne) die Sprache des Technikers, so kann man

¹⁾ GASPARD MONGE (geb. 1746 in dem Weinhandelsstädtchen Beaune, gest. 1818 in Paris) wird als der eigentliche wissenschaftliche Begründer der Darstellenden Geometrie bezeichnet. Das Bauwesen besaß schon vor MONGE (besonders im Festungsbau, Straßenbau, Brückenbau und Steinbau) ziemlich bedeutende darstellend-geometrische Kenntnisse. Die von den einzelnen Fächern angewandten Methoden waren aber meist nur auf den jeweiligen besonderen Zweck zugeschnitten und ließen einheitliche allgemeine Ideen vermissen. Es war das Verdienst von G. MONGE, diese überkommenen Methoden zu einem einheitlichen System mit streng mathematischem Aufbau verknüpft und erweitert zu haben. Anfangs militärisches Geheimnis, durften seine über die neue „*géométrie descriptive*“ zuerst an der Pariser *École Normale*, später an der von ihm geleiteten *École Polytechnique* gehaltenen Vorlesungen erst 1795 veröffentlicht werden. Wir werden diese MONGESche Methode unten als Grund- und Aufrißverfahren in moderner Gestalt ausführlich kennenlernen.

Daß man lange vor MONGE von dem Zusammenwirken von Grund- und Aufriß schon ziemlich gewandt Gebrauch zu machen wußte, zeigt das 1525 und 1538 in Nürnberg (lateinisch 1532 in Paris) erschienene Büchlein von ALBRECHT DÜRER (1471—1528, Nürnberg) über die „*Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien, Ebenen und ganzen Körpern*“, von dem manche Figuren auch heute noch in den einführenden Lehrbüchern der Darstellenden Geometrie wiederkehren. Die hauptsächliche Bedeutung der „*Unterweisung*“ DÜRERS liegt allerdings darin, der Verbreitung der Perspektive, die DÜRER aus Italien mitbrachte, gedient zu haben.

mit EMIL MÜLLER¹⁾ die Darstellende Geometrie auch als seine Sprachlehre bezeichnen.

Sowohl der reinen als auch der angewandten Mathematik hat die Darstellende Geometrie seit den Zeiten von MONGE weit über ihren ursprünglichen methodischen Inhalt und praktischen Zweck hinaus wiederholt die natürlichen Grundlagen und Hilfsmittel zur Entwicklung einiger wichtiger Zweige geboten. So sind z. B. sowohl die affine Geometrie und die projektive Geometrie als auch die Nomographie, Photogrammetrie und die Lehre von den Kartenprojektionen Kinder der Darstellenden Geometrie.

Für den schöpferischen Ingenieur und Architekten, für den das geplante Werk anfangs nur im Geiste existiert, aber auch für den Mathematiker und Physiker ist die Beschäftigung mit der Darstellenden Geometrie zugleich die beste Schule seines räumlichen Denkens und geometrischen Vorstellungsvermögens. Für den Techniker und den Mathematiker ist es überdies nach einem Worte von FELIX KLEIN²⁾ „eine ebenso würdige Aufgabe, richtig zu zeichnen wie richtig zu rechnen“. In gleichem Sinne empfiehlt schon CARL FRIEDRICH GAUSS³⁾ die Darstellende Geometrie als eine „kräftige Geistesnahrung zur Belebung und Erhaltung des echten (in der Mathematik der Neueren sonst manchmal vermißten) geometrischen Geistes“.

¹⁾ EMIL MÜLLER (geb. 1861 in Landskron/Böhmen, gest. 1927 in Wien), Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien, war der bedeutendste Vertreter der „Wiener Schule“ der Darstellenden Geometrie. Man verdankt seinem Wirken vor allem den neuen Aufschwung der Darstellenden Geometrie durch ihre Weiterentwicklung im Sinne der höheren Geometrie, insbesondere den Anschluß an die grundlegenden Ideen des „*Erlanger Programms*“ von FELIX KLEIN.

²⁾ FELIX KLEIN (geb. 1849 in Düsseldorf, gest. 1925 in Göttingen) war 1872 (mit 23 Jahren) Ordinarius in Erlangen, danach in Leipzig, München und Göttingen. Durch Aufstellung des Gruppenbegriffes als Ordnungsprinzip der Geometrie (in seinem berühmten „*Erlanger Programm*“) hat KLEIN der vorher zersplitterten geometrischen Wissenschaft die klare, moderne Richtung gegeben und ihr damit in allen ihren Teilen die Bahn zu einem ungeahnten Aufschwung gewiesen.

³⁾ C. F. GAUSS (geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 in Göttingen), der „*princeps mathematicorum*“, hat Unsterbliches geleistet in der Zahlentheorie, der Analysis, der angewandten Mathematik, der Astronomie, vor allem auch in der Geometrie. So entdeckte GAUSS 1796 im Alter von 19 Jahren die Tatsache, daß man einem Kreise auch das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal (in einer endlichen Anzahl von Konstruktionsschritten) einbeschreiben kann; GAUSS ist auch der Entdecker der nichteuklidischen Geometrie und der Begründer der neueren Flächentheorie. Das obige Zitat findet sich in einer Besprechung der „*Géométrie descriptive*“ von GASPARD MONGE in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 31. Juli 1831 (vgl. C. F. GAUSS, Werke IV, 359/360).

Das zuerst der Darstellenden Geometrie entnommene und dann die neuere Geometrie so sehr befruchtende *allgemeine Abbildungsprinzip*¹⁾ erstreckt seine gedankliche Wirkung über alle Zweige der Mathematik, z. B. auch über die Mengenlehre (in der etwa zwei Mengen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} gleichmächtig heißen, wenn man ihre Elemente M und N in beiderlei Sinn eindeutig [oder ein-eindeutig] aufeinander abbilden kann). Von besonderer Wichtigkeit sind stets Abbildungen wesensverschiedener Mengen- und Begriffsbildungen aufeinander; z. B. besteht die Wurzel der Analytischen Geometrie der Ebene in einer Abbildung der Punkte der Ebene auf die geordneten Paare von Zahlen des Zahlenkontinuums, und das Wesen der sogenannten geometrischen Funktionentheorie ruht in der Abbildung des Werteverrats einer komplexen analytischen Funktion auf die Punkte einer gewissen RIEMANNschen Fläche. Von dem allgemeinen Abbildungsprinzip macht man über den engen Rahmen der Mathematik hinaus in allen Naturwissenschaften ausgiebig Gebrauch, wenn man Analogien zwischen zwei verschiedenen Erscheinungsgebieten aufstellt (z. B. die bekannten Analogien zwischen mechanischen und elektrischen Erscheinungen usw.).

An das *Bild eines räumlichen Gegenstandes* kann man zwei Forderungen stellen:

1. Das Bild soll möglichst *anschaulich* sein, d. h. es soll im Beschauer eine möglichst genaue Vorstellung des Raumobjektes erwecken.
2. Das Bild soll möglichst *maßgetreu* sein, d. h. Längen und Winkel des räumlichen Objektes sollen möglichst leicht in ihrer wahren Größe aus dem Bild entnommen oder in das Bild eingetragen werden können.

Um Anschaulichkeit zu erreichen, muß man durch das Abbildungsverfahren den (einäugigen, monokularen) Sehprozeß, ähnlich dem fotografischen Verfahren, möglichst genau nachahmen. Vollkommene Maßtreue kann nur ein zum räumlichen Objekt ähnliches Modell aufweisen. Die Abbildung eines dreidimensionalen Gegenstandes auf eine zweidimensionale Fläche ist zwangsweise wegen des Dimensionsverlustes mit Verlust an Maßtreue in mindestens einer Richtung verbunden. Die Maßtreue hängt außer von der Wahl eines geeigneten Abbildungsverfahrens auch noch von der Lage des Raumobjektes zur Bildebene ab.

¹⁾ Eine ausführliche Untersuchung der allgemeinen wissenschaftstheoretischen Funktion des Abbildungsprinzips findet man in der sehr lesenswerten Rektoratsrede von EMIL MÜLLER, „*Das Abbildungsprinzip*“ Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung 22 (1914) S. 44–59.

2. Zentralprojektion

Als genaueste Nachahmung des Sehprozesses liefert die *Zentralprojektion* oder *Perspektive* die anschaulichsten Bilder. Dabei wird der räumliche Gegenstand aus einem im Endlichen liegenden Punkte O , dem *Projektionszentrum* (*Auge* oder *Augpunkt*), durch *Projektionsstrahlen* (*Sehstrahlen*) auf eine *Bildebene* π projiziert (Fig. 1). Das Auge O soll dabei nicht

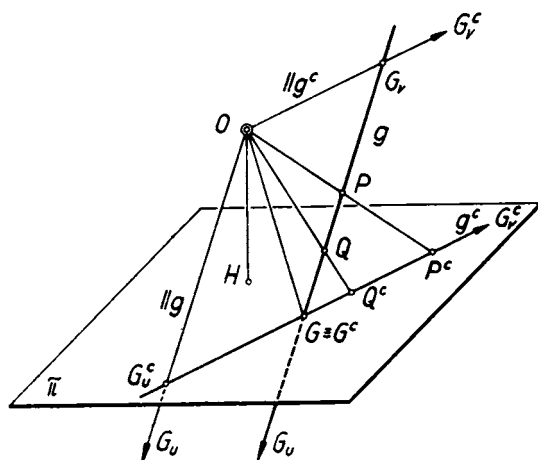


Fig. 1. Zentralprojektion (Perspektive) eines Punktes P und einer Geraden g aus dem Zentrum (Auge) O auf die Bildebene π mit Bildspurpunkt $G = G^c$, Verschwindungspunkt G_v und Fluchtpunkt G_v^c der Geraden

in der Bildebene π liegen, sondern soll von π einen bestimmten Lotabstand $OH \neq 0$ besitzen. Das dabei in π entstehende ebene Bild heißt *Zentralriß* (*Zentralbild* oder *perspektives Bild*) des Gegenstandes.

Jedem vom Projektionszentrum O verschiedenen Punkt P entspricht dabei genau ein *eigentlicher* (d. h. im Endlichen gelegener) Punkt P^c in der Bildebene π als Zentralriß, sofern P nicht der Parallelebene π_v zu π durch O angehört.

Schreibt man jeder Geraden einen *uneigentlichen Punkt* oder *Fernpunkt* zu, der durch ihre *Richtung* dargestellt wird, dann hat auch jeder Punkt G_v in der Parallelebene π_v zu π durch O genau einen Zentralriß G_v^c , nämlich den Fernpunkt des zu π parallelen Projektionsstrahls $[OG_v]$. Man nennt die Ebene π_v die *Verschwindungsebene* der Zentralprojektion, weil ihre Punkte G_v Zentralbilder G_v^c haben, die im Unendlichfernen (in der Richtung $\overrightarrow{OG_v}$) verschwinden.

Jeder Geraden g , die nicht durch O geht (Fig. 1), entspricht als Zentralriß in π wieder eine Gerade g^c . Insbesondere hat jede Gerade, die in der Verschwindungsebene π_v liegt, als Zentralriß die *Ferngerade* der Bildebene π , die die Fernpunkte aller zu π parallelen Projektionsstrahlen umfaßt. Die *Zentralprojektion* ist somit eine *geradentreue Abbildung*. Der Zentralriß g^c von g entsteht als Schnitt der *projizierenden Ebene* (*Sehebene*) der Geraden g , d. h. der durch O und g bestimmten Ebene $[Og]$ mit der Bildebene π . Die Gerade g durchstößt die Bildebene in einem (eigentlichen oder uneigentlichen

lichen) Punkt $G = G^c$, der sein eigenes Bild ist. Er heißt *Spurpunkt* der Geraden g auf der Bildebene π oder Bildspurpunkt von g . Der Fernpunkt G_u von g hat i. a. einen eigentlichen Zentralriß G_u^c , der *Fluchtpunkt* der Geraden g heißt. Er wird von dem zu g parallelen Sehstrahl $[OG_u]$ aus der Bildebene ausgeschnitten. *Der Fluchtpunkt einer Geraden g ist demnach das Zentralbild des Fernpunktes der Geraden.*

Spurpunkt und Fluchtpunkt sind ausgezeichnete Punkte des Bildes g^c der Geraden g , die zum bequemen Festlegen des Zentralrisses g^c von g dienen können. Der Punkt G_v der Geraden g , dessen Bild G_v^c der Fernpunkt von g^c ist, wird als der *Verschwindungspunkt* von g bezeichnet. *Der Verschwindungspunkt G_v der Geraden g ist der Schnittpunkt von g mit der Verschwindungsebene π_v .*

Nach Fig. 1 bilden der Augpunkt O , der Verschwindungspunkt G_v , der Bildspurpunkt G und der Fluchtpunkt G_u^c der Geraden g die Ecken eines Parallelogrammes. Daraus folgen die beiden Vektorgleichheiten:

$$(1) \quad \overrightarrow{OG_u^c} = \overrightarrow{G_v G}, \quad \overrightarrow{OG_v} = \overrightarrow{G_u^c G}.$$

Parallele Geraden g und h haben dieselbe Richtung (Fig. 2); wir sagen bequemer, sie haben denselben Fernpunkt F^1 . Daher konvergieren ihre zentralperspektiven Bilder g^c und h^c in einem Punkte, nämlich in dem gemeinsamen Fluchtpunkt F^c von g und h . Parallele Geraden besitzen somit denselben Fluchtpunkt.

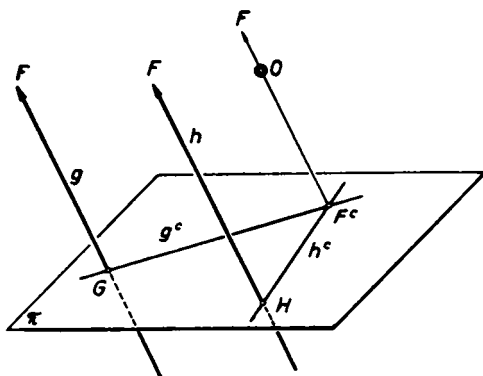


Fig. 2. Hauptsatz der Perspektive: Parallele Geraden $g \parallel h$ haben denselben Fluchtpunkt F^c (Bildpunkt ihres gemeinsamen Fernpunktes F)

¹) Schon JOHANNES KEPLER (1571–1630) spricht (1604) davon, daß parallele Geraden sich „im Unendlichfernen“ schneiden. Aber erst GIRARD DESARGUES (1593 bis 1662) führt die „unendlichfernen Punkte“ wirklich als Schnittpunkte paralleler Geraden ein, in seinem für die Entwicklung der Darstellenden und Projektiven Geometrie bedeutungsvollen „*Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*“ (Paris 1639, deutsch von M. ZACHARIAS, Leipzig 1922, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 197). Der kurze Name „Fernpunkt“ stammt von GERHARD KOWALEWSKI (1933). Den Namen „*Fluchtpunkt*“ hat GUIDO SCHREIBER (1839) eingeführt, den Namen „*Verschwindungspunkt*“ WILHELM FIEDLER (1875).

Dieser grundlegende „Satz vom Fluchtpunkt“ oder „Hauptsatz der Perspektive“ stammt von den Malern der italienischen Renaissance (15. Jahrhundert) oder ist zumindest von diesen neu entdeckt worden. In Deutschland wurde er von ALBRECHT DÜRER (1471–1528), der ihn in Italien kennenlernte, in seinen Bildern angewandt und in seiner „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit“ neben anderen grundlegenden Konstruktionen der Darstellenden Geometrie für seine Zeitgenossen gelehrt.

3. Parallelprojektion

Läßt man (Fig. 3) das Projektionszentrum O in beliebiger (jedoch nicht zur Bildebene π paralleler) Richtung ins Unendliche rücken, wählt man

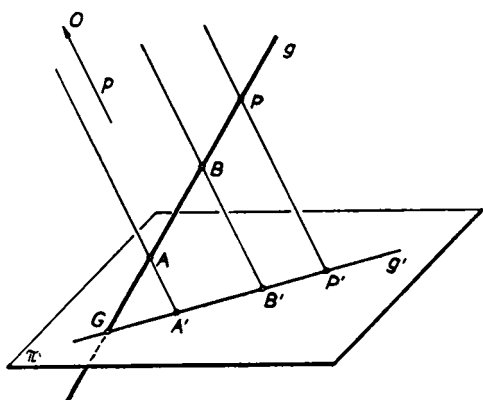


Fig. 3. Parallelprojektion (Schrägriff) einer geraden Punktreihe aus dem Fernpunkt O auf die Bildebene π . Invarianz des Teilverhältnisses von drei Punkten der Geraden: $(AB \cdot P) = (A'B' \cdot P')$

also als Projektionszentrum einen beliebigen Fernpunkt, der nur nicht auf der Ferngeraden der Bildebene liegt, so geht das Bündel der Sehstrahlen durch O in ein Parallelbündel über. An die Stelle des eigentlichen Projektionszentrums O tritt eine feste Projektionsrichtung p . Da nunmehr das räumliche Objekt durch *parallele Sehstrahlen* auf die Bildebene π abgebildet wird, heißt das Abbildungsverfahren *Parallelprojektion* und das dabei entstehende Bild ein *Parallelriff* des Raumgegenstandes. Diese Projektionsrichtung p (*Sehrichtung*, *Sehstrahlrichtung*) ist in Fig. 3 und den folgenden Figuren die Gegenrichtung zur Richtung des Fernpunktes O .

Fallen die Projektionsstrahlen p schräg auf die Bildebene π auf, so spricht man von *allgemeiner* oder *schiefer Parallelprojektion* oder auch vom *Schrägriffverfahren*. Das dabei gewonnene Bild heißt ein *Schrägriff* oder eine *schiefe Projektion* des Objektes. Auch bei einfachster Lage des abzubildenden Objektes gegen die Bildebene entstehen beim Schrägriffverfahren anschauliche Bilder, die auch maßtreu sind, soweit Strecken und Winkel zur Bildebene π parallel liegen. Man verwendet daher Schrägrisse gern zur raschen

Anfertigung von anschaulichen Handskizzen räumlicher Objekte. Alle unsere anschaulichen Bilder sind solche Schrägrisse.

Fallen die Projektionsstrahlen p normal (senkrecht) zur Bildebene π ein, dann erhält man (als wichtigsten Sonderfall der allgemeinen Parallelprojektion) die *normale Parallelprojektion* oder kurz die *Normalprojektion*. Das zugehörige Bild heißt ein *Normalriß* des räumlichen Objekts. Der Normalriß ist weitgehend maßtreu, nämlich für alle zur Bildebene π parallelen Figuren; er ist aber auch für andere Lagen des Objektes konstruktiv besonders handlich. Normalrisse sind deshalb vor allem geeignet als Konstruktionszeichnungen in der technischen Praxis. Freilich sind solche Konstruktionspläne oft wenig anschaulich, und es verlangt eine gut entwickelte Raumanschauung, sie richtig zu lesen.

II

Parallelprojektion und perspektive Affinität

4. Invarianten der Parallelprojektion

Der Schrägriß P' eines beliebigen Raumpunktes P ist nach 3. jener Punkt, in dem der zur Projektionsrichtung p parallele Sehstrahl durch P die Bildebene π trifft (Fig. 3). Eine beliebige Gerade g im Raum, deren Richtung von der Projektionsrichtung abweicht, hat als Schrägbild in π wieder eine Gerade g' . Die untereinander parallelen Sehstrahlen durch g erfüllen nämlich eine Ebene, die *Sehebene* oder *projizierende Ebene* durch g , und diese schneidet die Bildebene in einer Geraden, der Spurgeraden g' der Sehebene auf der Bildebene π .

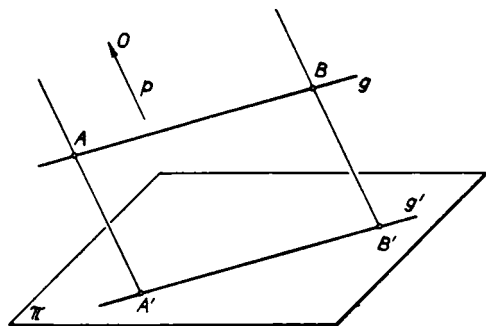


Fig. 4. Parallelprojektion einer zur Bildebene π parallelen Geraden g

Der (eigentliche oder uneigentliche) *Spurpunkt* G der Geraden g , in dem g die Bildebene π durchstößt, ist sein eigener Schrägriß; durch ihn geht deshalb auch das Schrägbild g' der Geraden g .

Liegt der Raumpunkt P auf der Raumgeraden g , dann liegt auch der Bildpunkt P' auf der Bildgeraden g' . Diese *Lageeigenschaft* des *Ineinanderliegens*, das *Inzidieren* zwischen Punkten und Geraden, bleibt bei Parallelprojektion *unverändert* erhalten; mit anderen Worten, es gilt

Satz 1: Die Parallelprojektion ist eine geradentreue Abbildung. Die Inzidenz zwischen Punkten und Geraden ist eine Invariante der Parallelprojektion.

Gibt es auch *Maßbeziehungen*, die bei Parallelprojektion unverändert erhalten bleiben?

Es sei AB eine beliebige Strecke auf einer zur Bildebene π parallelen Geraden g (Fig. 4). Dann ist der Parallelriß g' von g zu g parallel, da der Spurpunkt von g auf π der Fernpunkt von g ist. Andererseits sind auch die Projektionsstrahlen $[AA']$ und $[BB']$ zueinander parallel, so daß die

Es sei AB eine beliebige Strecke auf einer zur Bildebene π parallelen Geraden g (Fig. 4). Dann ist der Parallelriß g' von g zu g parallel, da der Spurpunkt von g auf π der Fernpunkt von g ist. Andererseits sind auch die Projektionsstrahlen $[AA']$ und $[BB']$ zueinander parallel, so daß die

Punkte A, B, A', B' ein Parallelogramm bilden. Daher ist die Bildstrecke $A'B'$ gleich der Originalstrecke AB .

Sind weiter (Fig. 5) die Schenkel a, b eines Winkels φ zur Bildebene π parallel, dann ist $a' \parallel a, b' \parallel b$, und die Bilder a', b' schließen denselben Winkel φ ein wie a und b . Also gilt:

Satz 2: *Strecken und Winkel und damit beliebige ebene Figuren, die in einer zur Bildebene π parallelen Ebene liegen, werden bei Parallelprojektion auf π kongruent abgebildet.*

Bei beliebiger Lage gegen die Bildebene π wird eine Strecke AB im Schrägbild i. a. verzerrt, d. h. verkleinert oder vergrößert wiedergegeben. Ebenso erfährt ein Winkel, dessen Ebene zur Bildebene nicht parallel ist, bei Parallelprojektion i. a. eine Verzerrung.

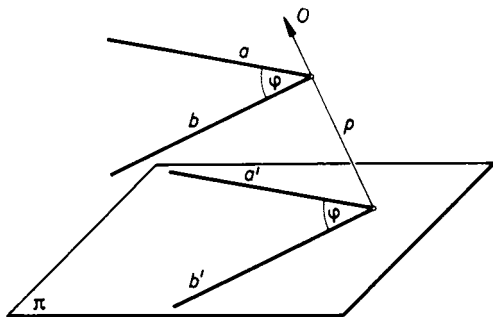


Fig. 5. Parallelprojektion eines zur Bildebene π parallelen Winkels φ in einen gleichgroßen Winkel

Es gibt jedoch außer den zur Bildebene π parallelen Ebenen noch eine weitere ausgezeichnete Schar untereinander paralleler Ebenen π^* , die mit allen in ihnen liegenden Figuren kongruent auf die Bildebene π projiziert werden. Spiegelt man nämlich die Bildebene π an einer beliebigen Normalebene σ zur Projektionsrichtung p in die Lage π^* (Fig. 6), dann hat jede in einer solchen Ebene π^* liegende Figur in π ein kongruentes Bild. Also gilt

Satz 3: *Strecken und Winkel und damit beliebige ebene Figuren werden bei Parallelprojektion auch dann kongruent abgebildet, wenn sie in einer Ebene π^* liegen, die zur Bildebene π bezüglich einer Normalebene σ der Projektionsrichtung p symmetrisch ist.*

Von den beiden genannten Sonderfällen abgesehen, wird bei Parallelprojektion eine Strecke AB im Bilde verzerrt dargestellt. Die metrische Eigenschaft einer Strecke, eine bestimmte Länge zu besitzen, bleibt bei Parallelprojektion nicht erhalten. Nimmt man jedoch (Fig. 3) auf der (beliebig orientierten) Träger-

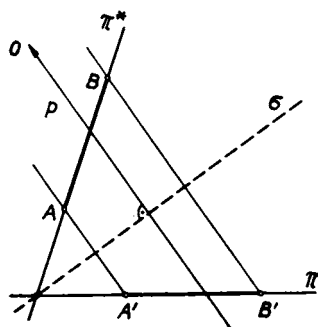


Fig. 6. Die Parallelprojektion einer Ebene π^* , die zur Bildebene π bezüglich der Normalebene σ der Sehstrahlen p symmetrisch ist, ergibt in π^* und π kongruente Figuren

geraden g zu A und B noch einen dritten Punkt P hinzu mit dem Bildpunkt P' auf g' , so gilt für die gerichteten Strecken auf g und g' nach dem Strahlensatz:

$$(1) \quad \frac{AP}{BP} = \frac{A'P'}{B'P'}.$$

Dieses Streckenverhältnis nennt man das Teilverhältnis der drei Punkte A, B, P (in dieser Reihenfolge) oder genauer das *Teilverhältnis des Punktes P bezüglich der Punkte A und B* und schreibt dafür

$$(2) \quad \frac{AP}{BP} = (AB \cdot P).$$

Damit können wir sagen:

Satz 4: Das Teilverhältnis von drei Punkten einer Geraden bleibt bei Parallelprojektion erhalten, es ist eine Invariante gegenüber Parallelprojektion:

$$(3) \quad (AB \cdot P) = (A'B' \cdot P').$$

Das Vorzeichen des Teilverhältnisses des Punktes P bezüglich der Punkte A und B gibt über die Lage von P zu A und B Aufschluß. Liegt P außer-

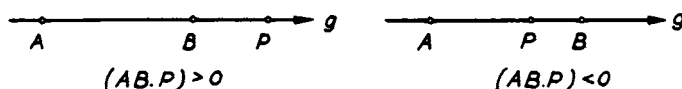


Fig. 7. Teilverhältnis $(AB \cdot P) = \frac{AP}{BP}$ von drei Punkten A, B, P einer Geraden. Dabei ist $(AB \cdot P) > 0$, wenn P außerhalb AB liegt, $(AB \cdot P) < 0$, wenn P innerhalb AB liegt

halb der Strecke AB , so haben die Strecken AP und BP denselben Sinn, liegt P innerhalb AB , so haben AP und BP verschiedenen Sinn. Also gilt (Fig. 7)

$$(4) \quad (AB \cdot P) > 0, \text{ wenn } P \text{ außerhalb } AB, \text{ und}$$

$$(AB \cdot P) < 0, \text{ wenn } P \text{ innerhalb } AB \text{ liegt.}$$

Insbesondere gilt:

$$(5) \quad (AB \cdot P) = -1, \text{ wenn } P \text{ der Mittelpunkt von } AB \text{ ist, und}$$

$$(AB \cdot P) \rightarrow +1, \text{ wenn } P \text{ gegen den Fernpunkt der Trägergeraden } g \text{ strebt.}$$

Aus der Invarianz des Teilverhältnisses ergibt sich somit:

Satz 5: Der Mittelpunkt einer Strecke bildet sich bei Parallelprojektion in den Mittelpunkt der Bildstrecke ab.

Da der Fernpunkt einer Geraden durch das (invariante) Teilverhältnis $+1$ gekennzeichnet ist, gilt weiter:

Satz 6: Der Fernpunkt einer Geraden bildet sich bei Parallelprojektion in den Fernpunkt der Bildgeraden ab.

Zwei parallele Geraden g und h haben denselben Fernpunkt. Sein Bild ist ebenfalls ein Fernpunkt, und daher sind die Bildgeraden g' und h' ebenfalls parallel, d. h. es gilt

Satz 7: Parallele Geraden haben parallele Schrägrisse; oder: auch der Parallelismus von Geraden ist eine Invariante bei Parallelprojektion.

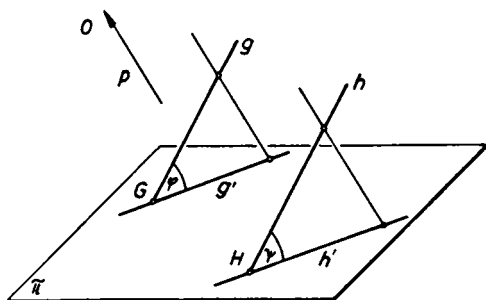


Fig. 8. Parallele Geraden $g \parallel h$ haben parallele Schrägrisse $g' \parallel h'$

Diese wichtige Tatsache folgt auch unmittelbar aus Fig. 8. Die zueinander parallelen Geraden g und h werden bei Parallelprojektion durch parallele Sehebene φ und ψ auf die Bildebene π projiziert. Die Spurgeraden g' und h' dieser Sehebene sind daher ebenfalls zueinander parallel.

5. Der Satz von Desargues

In der Ebene σ liege das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten a, b, c . Durch parallele Sehstrahlen werde es auf eine zweite Ebene σ' in das Dreieck A', B', C' mit den Seiten a', b', c' projiziert (Fig. 9). Die beiden Dreiecke sind dann in *parallelperspektiver Lage*. Die Seiten a, b, c des Dreiecks in der Ebene σ treffen die Schnittgerade s der Ebenen σ und σ' in den Spurpunkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Da die Seiten a', b', c' des Dreiecks in der Ebene σ' die Schrägrisse von a, b, c sind, gehen auch a', b', c' durch die Punkte \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{C} . Entsprechende

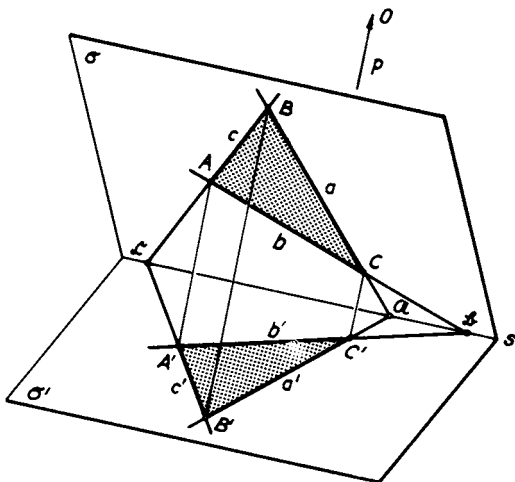


Fig. 9. Satz von DESARGUES über parallelperspektive Dreiecke

Seiten der beiden Dreiecke schneiden sich also paarweise auf der Schnittgeraden s der Ebenen σ und σ' . Diese Gerade s heißt die *Perspektivitätsachse* oder die *Desarguessche Achse* der beiden parallelperspektiv aufeinander bezogenen Dreiecke. Daraus folgt der

Satz von Desargues (1648) über parallelperspektive Dreiecke: *Sind zwei Dreiecke parallelperspektiv aufeinander bezogen, so schneiden sich entsprechende Seiten der beiden Dreiecke paarweise in drei Punkten einer Geraden, der Desarguesschen Achse der beiden parallelperspektiven Dreiecke.*

Projiziert man die in Fig. 9 dargestellte räumliche DESARGUESsche Konfiguration durch Parallelprojektion in eine beliebige Ebene π (man denke sich die Umrahmung der beiden Ebenen σ und σ' weggewischt), dann bleibt die parallelperspektive Lage zwischen den beiden Dreiecken (ABC) und $(A'B'C')$ bestehen, und entsprechende Dreiecksseiten schneiden sich nach wie vor auf der Achse s . *Der Desarguessche Satz gilt also auch dann, wenn die beiden parallelperspektiven Dreiecke in der gleichen Ebene liegen; er ist also auch ein Satz der ebenen Geometrie.*

Der nach GIRARD DESARGUES (1593–1662) benannte Satz ist ein *Schließungssatz*: Hat man in Fig. 9 außer dem Dreieck (ABC) und der Achse s einen Punkt (etwa C') des Bilddreiecks (und damit die Projektionsrichtung $p = [CC']$) gewählt, dann ist der zweite Eckpunkt A' als Schnitt des Projektionsstrahls durch A mit der Seite $b' = [C'B]$ bestimmt und ebenso B' als Schnitt des Projektionsstrahls durch B mit der Seite $a' = [CA]$. Jetzt schließt sich die Figur: Nach dem DESARGUESschen Satz treffen sich die Seiten $c' = [A'B']$ und $c = [AB]$ im Punkt \mathfrak{C} der Achse s .

6. Perspektive Affinität

Zwei Ebenen σ und σ' , die sich in der Geraden s schneiden, seien durch parallele Projektionsstrahlen p parallelperspektiv aufeinander abgebildet (Fig. 10). Eine solche *geometrische Verwandtschaft* zwischen den beiden Ebenen nennt man eine *perspektiv affine Verwandtschaft* oder eine *perspektive Affinität*. Die untereinander parallelen Projektionsstrahlen, die Punkt für Punkt die Verwandtschaft zwischen den beiden Ebenen herstellen, heißen *Affinitätsstrahlen*, ihre Richtung p heißt *Affinitätsrichtung* und die Schnittgerade s der beiden perspektiv affin aufeinander bezogenen Ebenen *Affinitätsachse*. Jedem Punkt P der einen Ebene σ entspricht in der Affinität genau ein Punkt P' der zweiten Ebene σ' , und umgekehrt hat jeder Punkt P' von σ' genau einen Partner P in σ , d. h. es gilt

Satz 1: Die perspektive Affinität ist eine umkehrbar eindeutige oder eine ein-eindeutige Punktverwandtschaft zwischen zwei Ebenen.

Aus den Eigenschaften der Parallelprojektion folgen die von JOHANN HEINRICH LAMBERT (1774) aufgestellten

Grundeigenschaften der perspektiven Affinität zwischen den Ebenen σ und σ' :

1. Entsprechende Punkte liegen auf einem Affinitätsstrahl.
2. Die Punkte der Affinitätsachse entsprechen sich selbst.
3. Jeder Geraden entspricht eine Gerade. Entsprechende Geraden treffen sich auf der Affinitätsachse, oder beide sind dazu parallel.
4. Parallelen Geraden entsprechen parallele Geraden.
5. Das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden ist invariant.

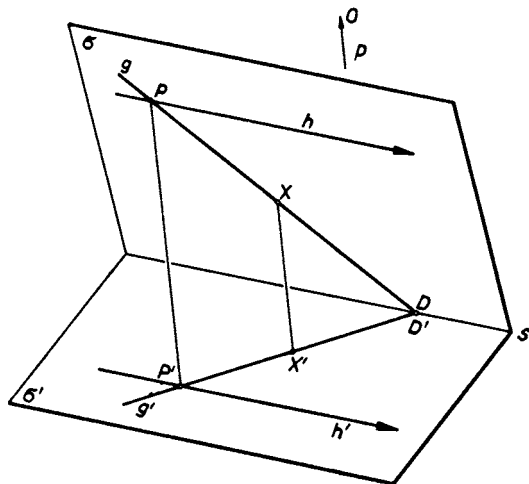


Fig. 10. Perspektivische Affinität zwischen zwei nicht parallelen Ebenen σ und σ'

Denkt man sich die der perspektiven Affinität zugrunde liegende räumliche Figur durch Parallelprojektion in eine dritte Ebene π projiziert (man entferne in Fig. 10 die Umrahmung der Ebenen σ und σ'), so decken sich in diesem Bild die beiden perspektiv affinen Ebenen, und die Affinitätsstrahlen liegen gleichfalls in dieser Ebene π . In ein und derselben Ebene, die man sich aus zwei übereinanderliegenden Exemplaren $\pi = \pi'$ bestehend vorzustellen hat, ist da-

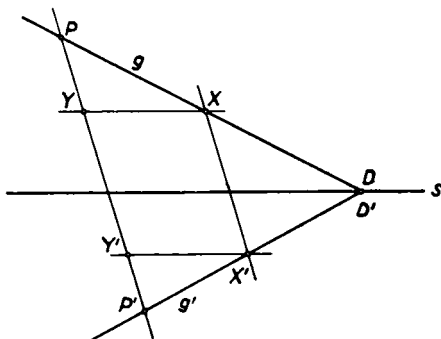


Fig. 11. Vervollständigung einer ebenen perspektiven Affinität

durch eine ein-eindeutige Punktverwandtschaft, eine geometrische Abbildung von π auf π' , hergestellt mit den oben aufgezählten fünf Eigenschaften. Sie heißt eine ebene perspektive Affinität (Fig. 11).

Von einer ebenen perspektiven Affinität seien die Affinitätsachse s und ein Paar entsprechender Punkte P, P' gegeben. Ist dann X ein beliebiger Punkt, so ist der affin zugeordnete Punkt X' durch folgende einfache Konstruktion eindeutig festgelegt:

1. X' liegt auf dem zu $[PP']$ parallelen Affinitätsstrahl durch X .
2. Die Gerade $g = [PX]$ treffe die Affinitätsachse s in dem (sich selbst entsprechenden) Punkte $D = D'$; dann liegt X' auf der zu g affinen Geraden $g' = [P'D']$.

Diese Konstruktion versagt nur dann, wenn der Punkt Y auf dem Affinitätsstrahl $[PP']$ liegt. Wie man dann den zu Y affinen Punkt Y' über den beliebigen Hilfspunkt X und sein Bild X' findet, zeigt Fig. 11. Man kann die ebene perspektive Affinität also stets vervollständigen. Somit gilt

Satz 2: Durch ihre Achse s und ein Paar entsprechender Punkte P, P' ist eine ebene perspektive Affinität eindeutig festgelegt.

7. Analytische Darstellung einer ebenen perspektiven Affinität

Eine ebene perspektive Affinität sei festgelegt durch die Affinitätsachse s und ein Paar entsprechender Punkte A, A' . Um sie analytisch darzustellen,

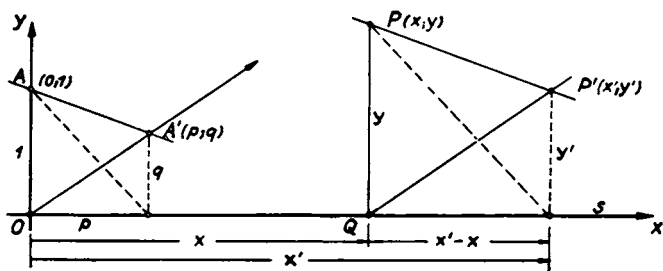


Fig. 12. Herleitung der analytischen Darstellung einer ebenen perspektiven Affinität

legen wir in die Affinitätsachse s die x -Achse und durch den Punkt A die y -Achse eines rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems (Fig. 12). Als Einheitspunkt auf der y -Achse werde der Punkt A gewählt, so daß dieser die Koordinaten $(0;1)$ hat. Der affin entsprechende Punkt A' habe die Koordinaten $(p;q)$ mit $q \neq 0$. Dann liegt der einem beliebigen Punkte $P(x;y)$ affin entsprechende Punkt $P'(x';y')$ nach 6:

1. auf dem zu $[AA']$ parallelen Affinitätsstrahl durch P ,
2. auf der zu $[OA']$ parallelen Geraden durch den Fußpunkt Q des Lotes von P auf die Affinitätsachse. Die Gerade $[OA]$ geht nämlich bei der Affinität in die Gerade $[OA']$ über; daher geht die Parallele zu $[OA]$

durch P , die die Affinitätsachse im Punkte Q trifft, in die Parallele zu $[OA']$ durch Q über.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (OAA') und (QPP') folgt:

$$(1) \quad \frac{x' - x}{p} = \frac{y}{1} = \frac{y'}{q}$$

oder

(2)

$$\begin{cases} x' = x + p y \\ y' = q y \end{cases}.$$

Durch dieses Gleichungspaar, in dem $q \neq 0$ ist, sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x; y)$ mit den Koordinaten des perspektiv affinen Punktes $P'(x'; y')$ verbunden. Die Gleichungen (2) der *ebenen perspektiven Affinität* stellen eine *lineare Transformation der Koordinaten* dar.

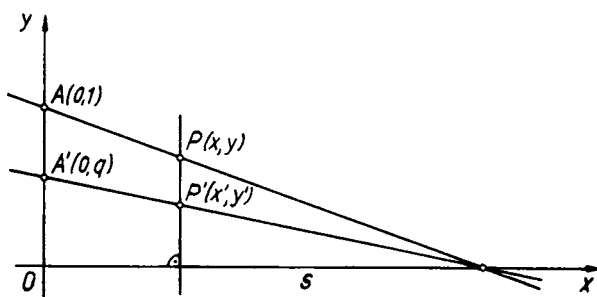


Fig. 13. Orthogonale perspektive Affinität

Von besonderer Bedeutung sind zwei Sonderfälle der allgemeinen perspektiven Affinität (2), nämlich:

1. Eine *orthogonale perspektive Affinität* liegt vor, wenn die *Affinitätsrichtung* $[AA']$ zur *Affinitätsachse* s senkrecht, also $p = 0$ ist. Aus Fig. 13 liest man ihre analytische Darstellung ab:

(3)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = q y \end{cases}.$$

Wieder ist dabei $q \neq 0$. Die x -Koordinate eines beliebigen Punktes P bleibt bei der orthogonalen perspektiven Affinität ungeändert, während die y -Koordinate in konstantem Verhältnis verändert wird. Dieser Sonderfall (3) der orthogonalen perspektiven Affinität findet sich schon bei LEON-

HARD EULER (1748), von dem auch der Name *Affinität* (von *affinitas* = Verwandtschaft) stammt.

2. Eine *Scherung* liegt vor, wenn die *Affinitätsrichtung* zur *Affinitätsachse* *s* *parallel* ist (Fig. 14). Jeder Punkt erfährt dabei eine Parallelverschiebung in Richtung der Affinitätsachse, wobei der Betrag der Verschiebung proportional zur Entfernung des Punktes von der Affinitätsachse ist. Der Name Scherung erklärt sich aus der Analogie zum Mechanismus einer

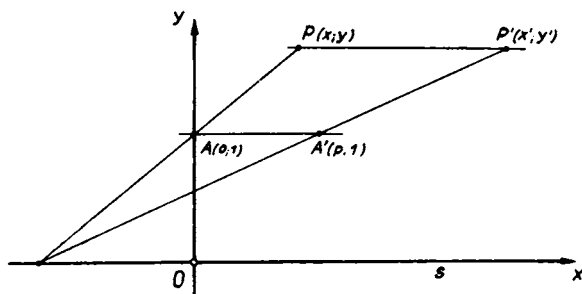


Fig. 14. Scherung (perspektive Affinität, deren Affinitätsstrahlen zur Affinitätsachse parallel sind)

Schere. Die analytische Darstellung der Scherung ergibt sich aus der Darstellung (2) der allgemeinen ebenen perspektiven Affinität für $q = 1$ zu:

(4)

$$\begin{cases} x' = x + p y \\ y' = y \end{cases}.$$

Die perspektive Affinität ist ihrerseits ein Sonderfall der allgemeinen Affinität zwischen zwei ebenen Punktfeldern $\sigma(x; y)$ und $\sigma'(x'; y')$. Diese ist die *allgemeinste ein-eindeutige Punktverwandtschaft* zwischen den (sich überdeckenden) Ebenen σ und σ' , die Geraden in Geraden und parallele Geraden in parallele Geraden überführt. Die Ferngerade wird dabei (als Ganzes) in sich transformiert.

Die *allgemeine ebene Affinität* wird analytisch durch eine *lineare Transformation der Koordinaten* dargestellt.

$$(5) \quad \begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y \end{cases} \quad \text{mit } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Hierbei sind jetzt affin entsprechende Figuren nicht mehr in parallelperspektiver Lage, und es gibt keine punktweise sich selbst entsprechende Gerade (Affinitätsachse) mehr. Dagegen gilt nach wie vor die *Invarianz des*

Teilverhältnisses dreier Punkte einer Geraden und die *Invarianz des Parallelismus* zweier Geraden.

Die affinen Transformationen (5) haben die folgende wichtige Eigenschaft: Führt man zuerst durch die Affinität (5) die Punkte $P(x; y)$ der Ebene σ in die Punkte $P'(x'; y')$ der (σ überdeckenden) Ebene σ' über und danach durch die Affinität

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} x'' &= a'_0 + a'_1 x' + a'_2 y' \\ y'' &= b'_0 + b'_1 x' + b'_2 y' \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 \neq 0$$

die Punkte $P'(x'; y')$ von σ' in die Punkte $P''(x''; y'')$ der (σ und σ' überdeckenden) Ebene σ'' über, so ist auch der direkte Zusammenhang zwischen den Punkten $P(x; y)$ von σ und den Punkten $P''(x''; y'')$ von σ'' eine Affinität der Gestalt

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} x'' &= a''_0 + a''_1 x + a''_2 y \\ y'' &= b''_0 + b''_1 x + b''_2 y \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } a''_1 b''_2 - a''_2 b''_1 \neq 0.$$

Für die Vorzeichen dieser *resultierenden Affinität* (7), die man dann als das *Produkt* oder als die *Zusammensetzung* der beiden Affinitäten (5) und (6) (in dieser Reihenfolge!) bezeichnet, erhält man dabei durch Elimination von x' und y' aus (5) und (6) die einfachen Formeln

$$(8) \quad \begin{aligned} a''_0 &= a'_0 + a'_1 a_0 + a'_2 b_0, & a''_1 &= a'_1 a_1 + a'_2 b_1, & a''_2 &= a'_1 a_2 + a'_2 b_2, \\ b''_0 &= b'_0 + b'_1 a_0 + b'_2 b_0, & b''_1 &= b'_1 a_1 + b'_2 b_1, & b''_2 &= b'_1 a_2 + b'_2 b_2, \\ a''_1 b''_2 - a''_2 b''_1 &= (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft, daß die Aufeinanderfolge zweier affiner Abbildungen immer wieder eine affine Abbildung ergibt, nennt man die *Gruppeneigenschaft* der affinen Abbildungen. Man sagt daher auch, *die affinen Abbildungen der Ebene bilden eine Gruppe*¹⁾.

8. Das Rechtwinkelpaar einer ebenen perspektiven Affinität

Eine perspektive Affinität sei durch die Affinitätsachse s und ein Paar entsprechender Punkte P, P' gegeben. Einem rechten Winkel, der seinen Scheitel in P hat, entspricht i. a. nicht wieder ein rechter Winkel mit dem Scheitel in P' . Wir fragen: Gibt es unter allen rechten Winkeln in P solche, die sich bei der Affinität wieder als rechte Winkel in P' abbilden?

¹⁾ Ausführlicheres darüber findet man in K. STRUBECKER, *Einführung in die höhere Mathematik, Band I: Grundlagen*, § 97, 2. Aufl., München—Wien 1966.

Sind x und y die Schenkel eines solchen rechten Winkels in P , x' und y' die Schenkel des Bildwinkels in P' , so daß sich x mit x' in einem Punkte $X = X'$ und y mit y' in einem Punkte $Y = Y'$ der Affinitätsachse s trifft, dann muß $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(x', y') = \text{rechter Winkel}$ sein (Fig. 15). Die Punkte P und P' liegen daher auf dem THALESkreis über dem Durchmesser XY . Der Mittelpunkt M dieses THALESkreises liegt

1. auf der Affinitätsachse s ,
2. auf der Streckensymmetrale von PP' .

Daraus ergibt sich folgende *Konstruktion des Rechtwinkelpaares* einer perspektiven Affinität (Fig. 15): Man schneidet die Streckensymmetrale

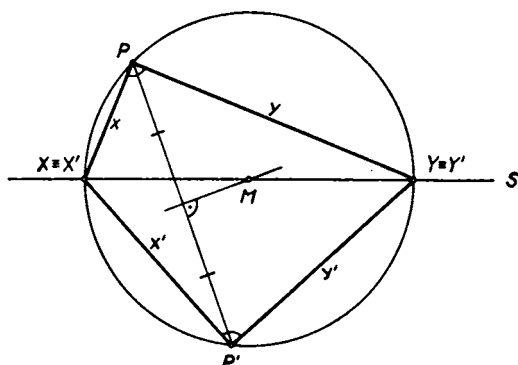


Fig. 15. Konstruktion der entsprechenden rechten Winkel einer ebenen perspektiven Affinität

von PP' mit der Affinitätsachse s im Punkte M und zeichnet um M den Kreis durch P und P' , der s in den Punkten X und Y trifft. Dann sind $x = [PX]$ und $y = [PY]$ die Schenkel des gesuchten rechten Winkels in P , desgleichen $x' = [P'X]$ und $y' = [P'Y]$ die Schenkel des affin entsprechenden rechten Winkels in P' .

Diese Konstruktion des Rechtwinkelpaares zeigt, daß es i. a. genau einen rechten Winkel in P gibt, der bei der Affinität in einen rechten Winkel

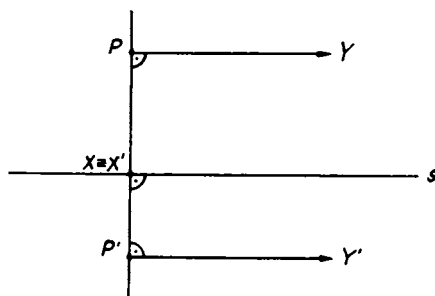


Fig. 16. Rechtwinkelpaar einer ebenen perspektiven Affinität (Sonderfall)

in P' übergeht. Ist die Streckensymmetrale von PP' zur Affinitätsachse s parallel, aber von ihr verschieden, so ist M der Fernpunkt von s . Der THALESkreis artet in eine Senkrechte zu s aus, und P und P' sind zueinander orthogonal-affin. Auch in diesem Sonderfall existiert nur ein Rechtwinkelpaar, und zwar ist der eine Schenkel zur Affinitätsachse s parallel, der andere zu ihr senkrecht (Fig. 16).

Fällt jedoch die Streckensymmetrale von PP' mit der Affinitätsachse s zusammen, so ist M nicht eindeutig bestimmt. Jeder der unendlich vielen

Punkte von s kann als Mittelpunkt M des THALESkreises durch P und P' gewählt werden. Die Affinität ist dann jener Sonderfall der orthogonalen Affinität, bei dem P und P' von s gleichen Abstand haben, d. h. es liegt eine Spiegelung an der Affinitätsachse s vor. Jedem rechten Winkel in P entspricht dann ein rechter Winkel in P' . Zusammenfassend gilt:

Satz 1: *In einer ebenen perspektiven Affinität gibt es in jedem affin entsprechenden Punktpaar entweder genau ein oder unendlich viele einander affin entsprechende Rechtwinkelpaare. Das letzte trifft dann und nur dann zu, wenn die perspektive Affinität eine Spiegelung an der Affinitätsachse ist.*

9. Die Ellipse als affines Bild des Kreises

Die Punkte O und O' in Fig. 17 seien ein beliebiges affin entsprechendes Punktpaar einer ebenen perspektiven Affinität mit der Achse s . Um eine möglichst einfache analytische Darstellung der dadurch bestimmten perspektiven Affinität zu erhalten, legen wir nach O und O' je ein rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem, dessen Achsen x, y bzw. x', y' mit den Schenkeln des affin entsprechenden Rechtwinkelpaares zusammenfallen. Die Achsen beider Koordinatensysteme seien so orientiert, daß die

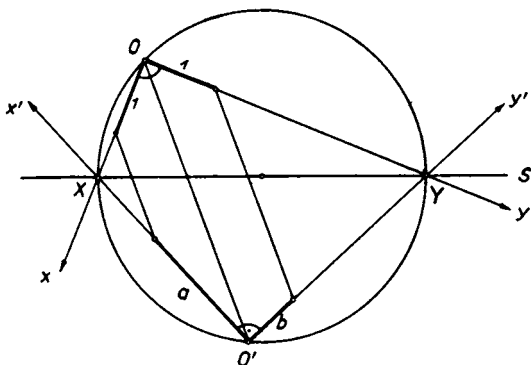


Fig. 17. Herleitung der auf das affine Rechtwinkelpaar gestützten einfachsten analytischen Darstellung einer affinen Abbildung

Schnittpunkte X, Y mit der Affinitätsachse positive Koordinaten haben. Die Einheitsstrecken auf den Koordinatenachsen des $(x; y)$ -Systems (Fig. 17) bilden sich ab in die Strecken a und b auf den Koordinatenachsen des $(x'; y')$ -Systems. Die Einheitsstrecken von O werden also durch die Affinität in O' im Verhältnis $a:1$ bzw. $b:1$ verzerrt; dabei ist $a > 0$ und $b > 0$. Hat dann ein Punkt P im ersten Koordinatensystem die Koordinaten $(x; y)$, und hat der affine Punkt P' im affin entsprechenden System die Koordinaten $(x'; y')$, so bestehen wegen der Invarianz des Teilverhältnisses die Beziehungen:

$$\begin{cases} x' = a x \\ y' = b y \end{cases}$$

(1)

Dies ist die *einfachste Darstellung der Affinität zwischen zwei ebenen Punktfeldern*. Sie gilt auch dann noch, wenn die perspektive Lage der beiden affinen Felder gelöst wird, indem man etwa das eine Feld (samt seinem Koordinatensystem) in eine beliebige neue Lage bringt.

Ist der Bildpunkt $P'(x'; y')$ koordinatenmäßig gegeben, so berechnen sich die Koordinaten $(x; y)$ des zugehörigen Originalpunktes $P(x; y)$ aus (1) durch die *Umkehrtransformation*:

$$(2) \quad \boxed{x = \frac{x'}{a}, \quad y = \frac{y'}{b}}.$$

Ein Kreis k in der ersten Ebene $\sigma(x; y)$ mit dem Radius r und dem beliebigen Mittelpunkt O (Fig. 20) hat, wenn man O als Nullpunkt des $(x; y)$ -Systems wählt, die Gleichung

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Für sein affines Bild in der Ebene $\sigma'(x'; y')$ erhält man in dem affin entsprechenden Koordinatensystem $(x'; y')$ aus (2) und (3) die Gleichung

$$(4) \quad \left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{x'^2}{(ar)^2} + \frac{y'^2}{(br)^2} = 1,$$

d. h. eine *Ellipse* k' mit dem Mittelpunkt O' und den beiden Halbachsen $a' = ar$ und $b' = br$. Damit ist bewiesen:

Satz 1: *Das affine Bild eines Kreises ist eine Ellipse.*

Damit gleichbedeutend ist

Satz 2: *Durch Parallelprojektion entsteht aus einem Kreis eine Ellipse.*

Beide Sätze waren schon ARCHIMEDES (287–212 v. Chr.), dem größten der antiken Mathematiker, bekannt.

Aus der einfachen analytischen Darstellung (1) einer Affinität ist auch leicht der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten affiner Figuren zu erschließen. Einem Rechteck mit den Eckpunkten $(0; 0)$, $(x; 0)$, $(x; y)$, $(0; y)$, das den Flächeninhalt $f = xy$ hat, entspricht in der Affinität das Rechteck mit den Ecken $(0; 0)$, $(x'; 0)$, $(x'; y')$, $(0; y')$ mit dem Flächeninhalt $f' = x'y'$. Für das Verhältnis der Flächeninhalte erhält man

$$(5) \quad \frac{f'}{f} = \frac{x'y'}{xy} = \frac{axby}{xy} = ab,$$

d. h. einen konstanten, allein durch die Affinität bestimmten Wert. Da sich der Inhalt einer beliebigen geschlossenen ebenen Figur mit jeder gewünschten Genauigkeit durch eine Summe von Rechtecksinhalten approximieren läßt, gilt dieser Zusammenhang auch für beliebige affine Flächenstücke. Es folgt

Satz 3: Der Flächeninhalt f eines beliebig berandeten ebenen Flächenstückes steht zu dem Inhalt f' des affin entsprechenden Flächenstückes in einem festen, allein durch die Affinität bestimmten Verhältnis:

$$(6) \quad f' = a b \cdot f.$$

Da dem Kreis mit dem Radius 1 die Ellipse mit den Halbachsen a und b affin entspricht, errechnet sich insbesondere der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b zu

$$(7) \quad f_{\text{Ellipse}} = a b \cdot f_{\text{Kreis}} = a b \pi.$$

10. Affine Eigenschaften der Ellipse

Da die Ellipse als affines Bild eines Kreises aufgefaßt werden kann, lassen sich alle Kreiseigenschaften, die gegenüber einer affinen Transfor-



Fig. 18. Kreis und Ellipse als affine Figuren (Mittelpunkt und Durchmesser)

mation oder gegenüber Parallelprojektion invariant sind, in Eigenschaften der Ellipse umsetzen.

Hierzu einige Beispiele:

1. Der *Kreis* hat einen *Mittelpunkt* O . Jede Kreissehne durch O (jeder Kreisdurchmesser) wird durch O halbiert (Fig. 18a).

Die *Ellipse* hat einen *Mittelpunkt* O' . Jede Ellipsensehne durch O' (jeder Ellipsendurchmesser) wird durch O' halbiert (Fig. 18b).

2. Zu jedem *Kreisdurchmesser* d gibt es einen *orthogonalen Kreisdurchmesser* \bar{d} . Er halbiert die zu d parallelen Kreissehnen und geht durch die Berührungspunkte der beiden zu d parallelen Kreistangenten (Fig. 19a).

Zu jedem *Ellipsendurchmesser* d gibt es einen *konjugierten Ellipsendurchmesser* \bar{d} . Er halbiert die zu d parallelen Ellipsensehnen und geht durch die Berührungspunkte der beiden zu d parallelen Ellipsentangenten (Fig. 19b). Also gilt

Satz 1: *Einem beliebigen Paar zueinander orthogonaler Kreisdurchmesser entspricht affin ein Paar zueinander konjugierter Ellipsendurchmesser. Jeder von beiden halbiert die zu dem konjugierten Durchmesser parallelen Sehnen und ist parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers.*



Fig. 19. Kreis und Ellipse als affine Figuren (Paaren orthogonaler Kreisdurchmesser entsprechen affin Paare konjugierter Ellipsendurchmesser)

Da unter allen orthogonalen Durchmesserpaaren des Kreises genau eines vorhanden ist, dem in der Affinität wieder ein orthogonales Ellipsendurchmesserpaar entspricht, gilt ferner:

Satz 2: *Unter allen Paaren konjugierter Ellipsendurchmesser gibt es genau eines, das zugleich orthogonal ist, das Paar der Hauptachsen der Ellipse.*

Die Ellipse k' wird als perspektivaffines Bild eines Kreises k am einfachsten nach dem Satz über das Rechtwinkelpaar einer perspektiven Affinität konstruiert, der sofort die Hauptachsen der Ellipse liefert (Fig. 20).

Aus der in 7. bewiesenen Gruppeneigenschaft der affinen Abbildungen folgt, daß aus der Ellipse k' , wenn man auf sie

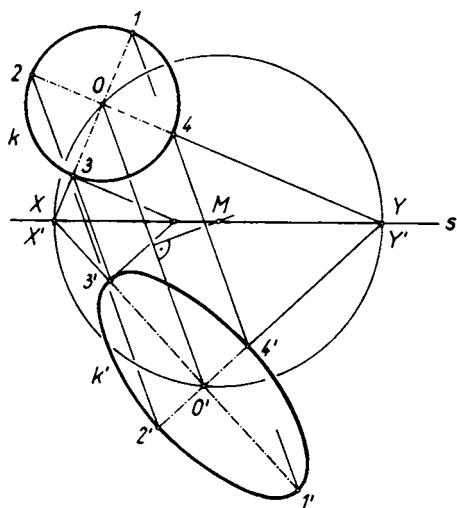


Fig. 20. Konstruktion der Hauptachsen der zu dem Kreise k perspektiv affinen Ellipse k'

wieder eine Affinität ausübt, eine neue zum Kreise k affine Kurve, also wieder eine Ellipse k'' entsteht, wobei den Paaren orthogonaler Durchmesser des Kreises k bzw. konjugierter Durchmesser der Ellipse k'

wieder Paare konjugierter Durchmesser der Ellipse k'' entsprechen. Somit folgt

Satz 3: *Das affine Bild einer Ellipse ist wieder eine Ellipse, wobei konjugierten Durchmessern der einen konjugierte Durchmesser der anderen Ellipse entsprechen.*

Insbesondere folgt

Satz 4: *Durch Parallelprojektion einer Ellipse entsteht (wenn die Projektionsstrahlen weder zur Ebene der Ellipse noch zur Bildebene parallel sind) immer wieder eine Ellipse. Konjugierten Durchmessern der Raumellipse entsprechen dabei konjugierte Durchmesser der Bildellipse (und umgekehrt).*

11. Ellipsenkonstruktionen

1. In den Elementen wird die Ellipse definiert als der Ort jener Punkte der Ebene, die von zwei festen Punkten F_1 und F_2 , den Brennpunkten, eine konstante Abstandssumme haben (Fig. 21). Hat der Ellipsenpunkt P von den Brennpunkten F_1 und F_2 den Abstand r_1 bzw. r_2 , dann ist

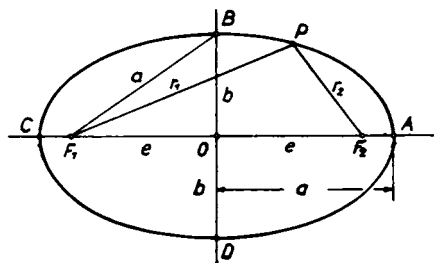


Fig. 21. Gärtnerkonstruktion der Ellipse

$$(1) \quad r_1 + r_2 = 2a = \text{const.}$$

Die konstante Abstandssumme ist gleich der Länge $2a$ der großen Ellipsenachse, wie man erkennt, wenn P mit dem einen Hauptscheitel A identisch ist. Legt man P in den Nebenscheitel B der Ellipse, dann ist wegen $r_1 = r_2 = a$ die Beziehung

$$(2) \quad a^2 - b^2 = e^2$$

abzulesen, wobei $2b$ die Länge der kleinen Ellipsenachse und $2e = F_1F_2$ die Entfernung der Brennpunkte ist. Auf dieser elementaren Definition beruht die bekannte *Gärtnerkonstruktion der Ellipse*, die schon bei APOLLONIOS von Pergae (262–190 v. Chr.) vorkommt.

Trägt man in der Verlängerung des Leitstrahls F_1P über P hinaus die Länge r_2 des zweiten Leitstrahls F_2P auf, dann hat der so erhaltene Punkt L von F_1 den konstanten Abstand $r_1 + r_2 = 2a$ (Fig. 22). Er erzeugt also, wenn P die Ellipse durchläuft, einen Kreis l_1 um F_1 vom Radius $2a$, den *Leitkreis* um F_1 . (Analog existiert ein Leitkreis l_2 von gleichem Radius um F_2 .) Die Symmetrielinie in dem gleichschenkligen Dreieck (F_2PL) ist

die *Ellipsentangente* t im Punkte P . Denn wäre sie eine Ellipsensehne, dann läge auf ihr ein weiterer, von P verschiedener Ellipsenpunkt P^* , für den ebenfalls die Beziehung $F_1P^* + F_2P^* = F_1P + P^*L = 2a$ gelten müßte. Dies ist aber unmöglich, da die geradlinige Verbindung F_1L die Länge $2a$ hat und daher $F_1P^* + P^*L > F_1L = 2a$ ist. Damit ist bewiesen:

Satz 1: Die Tangente t im Punkt P der Ellipse halbiert den äußeren, die Normale n den inneren Winkel der beiden Leitstrahlen von P .

Eine andere, einfachere Tangentenkonstruktion der Ellipse läßt sich durch affine Übertragung aus einer Tangentenkonstruktion des Kreises gewinnen. Es sei $AB = d$ ein beliebiger Kreisdurchmesser, h die Kreistangente in A und P ein beliebiger Kreispunkt (Fig. 23a). Die

Gerade $[BP]$ schneide h in C . Die Kreistangente t in P geht dann durch den Mittelpunkt H der Strecke AC .

Beweis: Der Zentriwinkel $\sphericalangle AOP$ ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle ABP$ über dem gleichen Bogen AP . Schneiden sich die Tangente h des Punktes A und die Tangente t des Punktes P im Punkte H , so ist die Gerade $[OH]$ die Win-

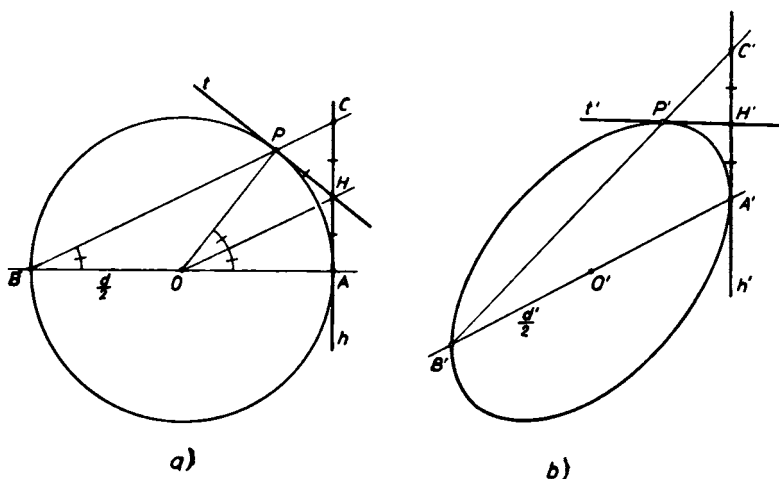


Fig. 23. Einfachere Konstruktion der Ellipsentangente t' in P' aus einem beliebigen Durchmesser $A'B'$ und der Tangente h' in A'

kelsymmetrale des Winkels $\angle AOP$ und ist somit zu $[BP]$ parallel. Nach dem Zweistrahlsatz ist dann $AH:HC = AO:OB = 1:1$, d. h. H halbiert die Strecke AC .

Durch affine Abbildung des Kreises in eine Ellipse erhält man die dazu analoge *affine Konstruktion der Ellipsentangente t'* im Punkt P' , wenn von der Ellipse ein beliebiger Durchmesser d' (im Sonderfall auch eine Hauptachse) mit den Endpunkten A' und B' und die Tangente h' in einem Endpunkt A' bekannt sind (Fig. 23b). Die Tangente t' geht durch den Mittelpunkt H' der Strecke $A'C'$.

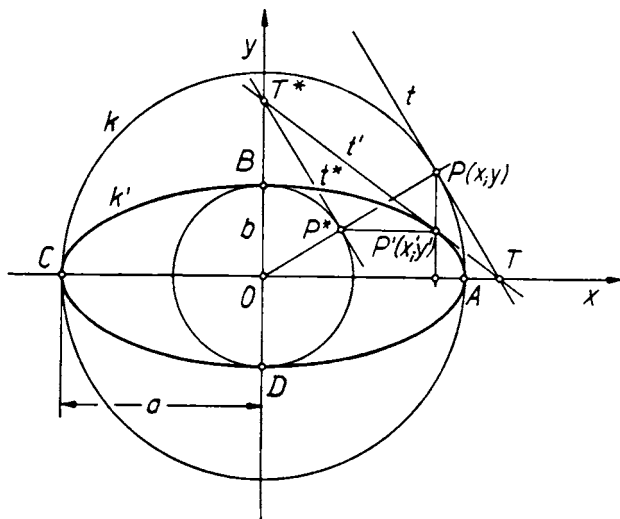


Fig. 24. Punktweise Konstruktion einer Ellipse mittels ihrer Affinität zu den beiden Scheitelkreisen

Diese einfache Tangentenkonstruktion für die Ellipse gilt übrigens sinngemäß auch für jeden anderen Kegelschnitt, also auch für die Parabel und die Hyperbel.

2. *Konstruktion einer Ellipse mit Hilfe ihrer beiden Scheitelkreise.* Die beiden Kreise mit dem Radius a bzw. b um den Ellipsenmittelpunkt O heißen *großer* bzw. *kleiner Scheitelkreis*. Die *Ellipse* selbst kann aufgefaßt werden als *orthogonal-perspektivaffines Bild ihrer beiden Scheitelkreise* mit der großen bzw. kleinen Ellipsenachse als Affinitätsachse. Ein beliebiger Strahl durch O schneide den großen Scheitelkreis im Punkte P , den kleinen im Punkte P^* . Die Parallele durch P zur kleinen Ellipsenachse und die Parallele durch P^* zur großen Ellipsenachse schneiden sich dann in einem Punkt P' der Ellipse (Fig. 24). Damit ist eine einfache Punkt-konstruktion der Ellipse gewonnen.

Gibt man nämlich in dem achsenrechten $(x;y)$ -System dem Punkt P die Koordinaten $(x;y)$, dem Punkt P' die Koordinaten $(x';y')$, so ist

$$(3) \quad x' = x, \quad y':y = b:a.$$

Durch diese Gleichungen ist eine orthogonale perspektive Affinität definiert mit der x -Achse als Affinitätsachse, die den Kreis k

$$(4) \quad x^2 + y^2 = a^2$$

in die *Ellipse* k'

$$(5) \quad x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

überführt. Der Punkt P' ($x';y'$) ist also ein Ellipsenpunkt.

Diese einfache Konstruktion der Ellipse aus ihren beiden Scheitelkreisen stammt von PHILIPPE DE LA HIRE (1685). Die Herleitung der Ellipse (5) aus

dem großen Scheitelkreise (4) mittels der orthogonalen Affinität (3) war jedoch schon ARCHIMEDES von Syracus (287—212 v. Chr.) bekannt.

Die orthogonale Affinität zwischen der Ellipse und ihren Scheitelkreisen kann mit Vorteil auch bei anderen Konstruktionen an der Ellipse herangezogen werden.

Die *Tangentenkonstruktion* im Ellipsenpunkt P' z. B. löst man zunächst

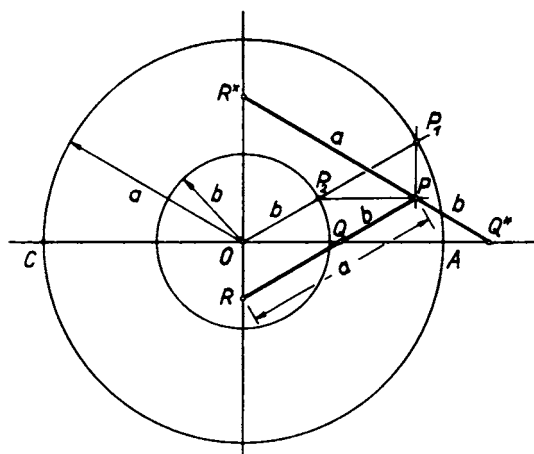


Fig. 25. Papierstreifenkonstruktion der Ellipse (Herleitung)

im affinen Kreisbild, was mit Zirkel und Lineal allein möglich ist. Dann überträgt man die gefundene Kreistangente affin in die Ellipsenebene. Es seien (Fig. 24) t bzw. t^* die Kreistangenten in den Punkten P bzw. P^* der beiden Scheitelkreise, die dem Ellipsenpunkt P' affin entsprechen. Ihre Schnittpunkte T bzw. T^* mit der jeweiligen Affinitätsachse (d. h. mit der x -Achse bzw. mit der y -Achse) sind dann weitere Punkte der gesuchten Ellipsentangente t' in P' .

3. *Papierstreifenkonstruktion der Ellipse.* Es sei P ein beliebiger Ellipsenpunkt, P_1 der dazu affine Punkt des großen, P_2 der affine Punkt des kleinen Scheitelkreises (Fig. 25), so daß

$$(6) \quad OP_1 = a, \quad OP_2 = b$$

ist. Zieht man nun durch P die Parallele zu OP_1 , die die große Achse in Q , die kleine Achse in R trifft, dann ist, da (OP_1PR) und (OP_2PQ) Parallelogramme sind, die Strecke PR zwischen P und der kleinen Achse gleich der Länge der großen Halbachse a , die Strecke PQ zwischen P und der großen Achse gleich der Länge der kleinen Halbachse b der Ellipse, also

$$(7) \quad PR = a, \quad PQ = b.$$

Spiegelt man den Punkt R an der Horizontalen durch P in den Punkt R^* , den Punkt Q an der Vertikalen durch P in den Punkt Q^* , so liegen die drei Punkte R^*, P, Q^* ebenfalls in einer Geraden, und es ist

$$(8) \quad PR^* = a, \quad PQ^* = b.$$

Die Ergebnisse (7) und (8) lassen sich konstruktiv in verschiedener Weise auswerten.

3.1. Sind von einer Ellipse Lage und Größe einer Hauptachse und ein Punkt P bekannt, so ergibt sich die andere Hauptachse durch folgende Konstruktion (Fig. 26):

Ist z. B. die Lage OA und die Länge a der großen Halbachse gegeben, so ist zunächst auch die Lage der kleinen Hauptachse bekannt. Um ihre halbe Länge b zu finden, schlägt man um P einen Kreis mit dem Radius a , der die kleine Achse in den Punkten R und R^* schneidet. Trifft nun die Gerade $[RP]$ die große Achse in Q , oder die Gerade $[R^*P]$ die große Achse in Q^* , dann ist $PQ = PQ^* = b$.

Diese einfache Konstruktion stammt von dem Flamen SIMON STEVIN (1548–1630), dem Erfinder des Segelschlittens und verdienstvollen Vorkämpfer der dezimalen Einteilung der Münzen, Maße und Gewichte.

3.2. Der gleiche Gedanke kann verwertet werden, um auf raschem Wege bei gegebener Lage und Länge der Hauptachsen beliebig viele Ellipsenpunkte P zu finden:

Auf einem Papierstreifen der Gesamtlänge a markiere man drei Punkte P, Q, R so, daß $PQ = b$, $PR = a$ ist. Legt man den Streifen so, daß Q auf die große, R auf die kleine Achse der Ellipse zu liegen kommt, so ist P stets ein Punkt der Ellipse (Fig. 27a). Statt dessen kann auch ein Papierstreifen der Länge $a + b$ verwendet werden mit den Markierung-

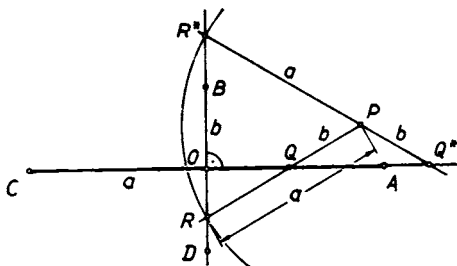


Fig. 26. Konstruktion der kleinen Halbachse b einer Ellipse aus der Länge und Lage der großen Halbachse a und einem Ellipsenpunkt P

gen R^* , P , Q^* , wobei $PR^* = a$, $PQ^* = b$ ist (Fig. 27b). Dieser Streifen ist mit Q^* auf die große und mit R^* auf die kleine Achse zu legen, damit P ein Ellipsenpunkt ist. Wegen dieser Anwendungen führt die geschilderte Konstruktion den Namen *Papierstreifenkonstruktion* der Ellipse. Auch sie kommt schon im hellenistischen Altertum vor, nämlich bei dem bedeutenden EUKLID-Kommentator und Vorsteher der Neuplatonischen Akademie zu Athen PROKLOS DIADOCHOS (410–485 n. Chr.).

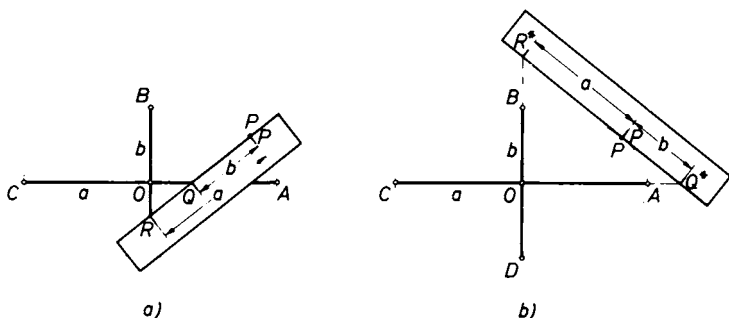


Fig. 27. Papierstreifenkonstruktion einer Ellipse (Ausführung)

Schließlich liegt die Idee der Papierstreifenkonstruktion auch den meisten *Ellipsenzirkeln* zugrunde, mittels deren eine Ellipse mechanisch gezeichnet werden kann. Eine Stange von der Länge a trägt im Punkte R und im Punkte Q (wobei $RQ = a - b$ ist) je einen Führungsstift. Werden diese Stifte in zwei zueinander orthogonalen Schienen geführt, so beschreibt der Punkt P , dessen Entfernung von R gleich a ist, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . Natürlich kann auch die zweite Papierstreifenstellung R^*PQ^* für die Konstruktion eines Ellipsenzirkels dienen.

4. *Rytzsche Achsenkonstruktion*. Sehr oft hat man eine Ellipse zu konstruieren, von der ein *konjugiertes Durchmesserpaar* der Lage und Größe nach bekannt ist. Dann liefert die von dem Schweizer Gewerbeschullehrer DAVID RYTZ (1845) angegebene *Rytzsche Konstruktion* die beiden *Hauptachsen* der Ellipse, und zwar der Lage und der Größe nach.

Auf den beiden Scheitelkreisen der Ellipse mit den Hauptachsen AC und BD seien die Punkte P_1 , P_2 und Q_1 , Q_2 auf zwei zueinander orthogonalen Radien gelegen (Fig. 28). Sie bestimmen die beiden Ellipsenpunkte P und Q , deren Halbmesser $p = OP$ und $q = OQ$ zueinander konjugiert sind. Schwenken wir den Halbmesser q samt dem anhängenden Dreieck (QQ_1Q_2) um 90° auf p zu, dann gelangt $q = OQ$ in die neue Lage $\bar{q} = O\bar{Q}$,

während Q_1 auf P_1 und Q_2 auf P_2 fällt. Wegen der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke (PP_1P_2) und $(\bar{Q}P_2P_1)$ ist $(PP_1\bar{Q}P_2)$ ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Hauptachsen der Ellipse sind. Seine erste Diagonale $[P_1P_2]$ geht durch O ; seine zweite Diagonale $[P\bar{Q}]$ schneidet die große Ellipsenachse im Punkte M , die kleine im Punkte N . Dann ist aus Symmetriegründen und nach der Papierstreifenkonstruktion der Ellipse

$$(9) \quad NP = \bar{Q}M = OP_1 = a, \quad MP = \bar{Q}N = OP_2 = b.$$

Der Diagonalenschnittpunkt R hat daher von den drei Punkten O, M, N den gleichen Abstand, d. h. die Punkte O, M, N liegen auf einem Kreis (vom Radius $\frac{a+b}{2}$) um R .

Aus Fig. 28 ergibt sich somit der folgende Ablauf der Rytz'schen Achsenkonstruktion (Fig. 29).

OP und OQ seien das gegebene konjugierte Halbmesserpaar der Ellipse. Dann findet man Lage und Größe ihrer Hauptachsen durch folgende Konstruktionschritte:

1. Drehe den einen Halbmesser OQ (in beliebigem Sinn) um 90° in die Lage \bar{OQ} .
2. Verbinde P mit \bar{Q} und halbiere die Strecke $P\bar{Q}$ im Punkte R .

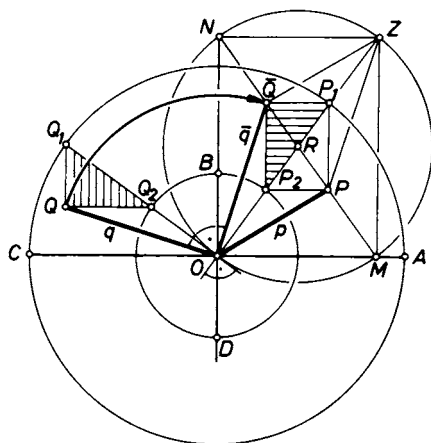


Fig. 28. Rytz'sche Konstruktion der Hauptachsen OA, OB einer Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern OP, OQ (Herleitung)

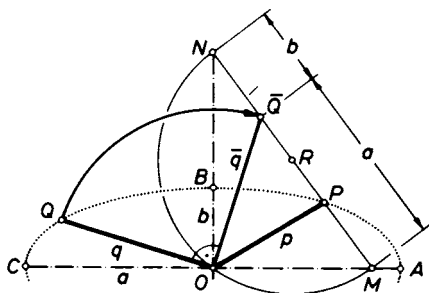


Fig. 29. Rytz'sche Konstruktion der Hauptachsen OA, OB einer Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern OP, OQ (Ausführung)

Die damit für den Kreis bewiesene Punkt- und Tangentenkonstruktion läßt sich nun affin auf die *Ellipse* übertragen. Die Rolle des orthogonalen Kreisdurchmesserpaares übernimmt dabei ein konjugiertes Paar von Ellipsendurchmessern. Statt kongruenter Strecken müssen gleiche Teilverhältnisse verwendet werden.

Von einer Ellipse sei ein beliebiger Durchmesser AC und der dazu konjugierte Halbmesser OB gegeben (Fig. 30b). Man zeichnet zunächst die Ellipsentangente in $A \parallel OB$ und die Tangente in $B \parallel OA$. Ihr Schnittpunkt sei E . Auf OB sei der Punkt U beliebig angenommen, auf EB bestimme man den Punkt V so, daß $(OB \cdot U) = (EB \cdot V)$ ist. Dann schneiden sich die Geraden $[CU]$ und $[AV]$ in einem Punkte P der Ellipse. Wählt man ferner auf AE den Punkt W so, daß $(AE \cdot W) = (OB \cdot U)$ ist, d. h. macht man $AW = OU$, dann geht die Ellipsentangente t in P durch den Punkt W .

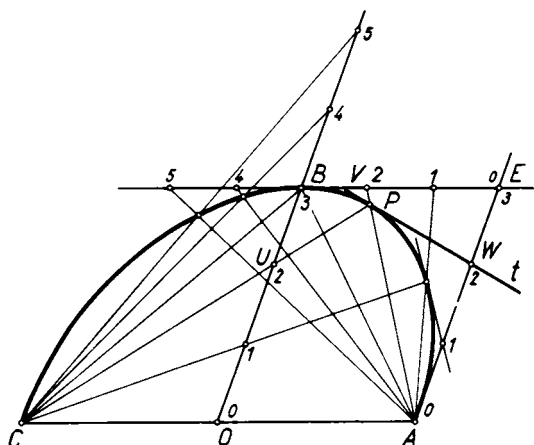


Fig. 30b. Affin-invariante Konstruktion einzelner Punkte P und Tangenten t einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Halbmesser OA, OB

Zur bequemen Übertragung der Teilverhältnisse teilt man die Strecken OB, EB und AE durch die Teilungspunkte $0, 1, 2, \dots, n$ in n gleiche Teile; dann haben gleichnumerierte Punkte das gleiche Teilverhältnis.

6. *Schmiegekreise der Ellipse.* Für das praktische Zeichnen einer Ellipse sind ihre Schmiegekreise von Bedeutung, da sie gestatten, ein mehr oder weniger großes Stück eines Ellipsenbogens näherungsweise durch einen Kreisbogen zu ersetzen.

Durch drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 einer Kurve c , die nicht in einer Geraden liegen, ist eindeutig ein Kreis k bestimmt (Fig. 31). Läßt man den Punkt P_2 bei festgehaltenen Punkten P_1 und P_3 auf der Kurve

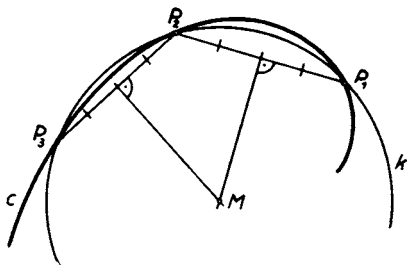


Fig. 31. Kreis k durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 einer ebenen Kurve c

unbegrenzt gegen P_1 wandern, dann nähert sich der Kreis k als Grenzlage einem Kreis durch P_3 , der die Kurve c im Punkte P_1 berührt, dessen Mittelpunkt M also auf der Kurvennormalen n des Punktes P_1 liegt (Fig. 32). Ein solcher Kreis berührt, wie man sagt, die Kurve c in P_1 zweipunktig. Je nach der Wahl des dritten Punktes P_3 auf c erhält man unendlich viele derartige allgemeine *Berührkreise* im Punkte P_1 , die „zwei in P_1 zusammengerückte Punkte“ der Kurve c enthalten oder die Kurve c in P_1 zweipunktig berühren.

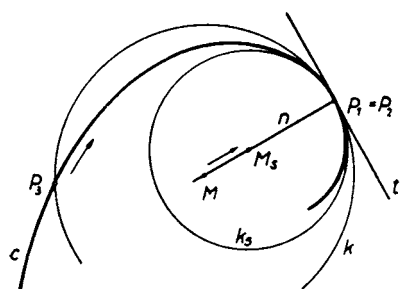


Fig. 32. Der Schmiegekreis k_s im Punkte P_1 der ebenen Kurve c ist die Grenzlage eines c in P_1 berührenden Kreises k ; der Schmiegekreis k_s durchsetzt die Kurve c in P_1

„zwei in P_1 zusammengerückte Punkte“ der Kurve c enthält oder der, anders ausgedrückt, die Kurve c im Punkte P_1 dreipunktig berührt.

Der Schmiegekreis durchsetzt i. a. die Kurve im Berührungspunkt, während ein gewöhnlicher Berührkreis in der Umgebung des Berührungspunktes auf derselben Seite der Kurve verbleibt. Diese kennzeichnende Eigenschaft kann dazu dienen, den Schmiegekreis durch systematisches Probieren aus der Schar der Berührkreise auszulesen.

Ist R der Radius des Schmiegekreises, so nennt man $\kappa = 1/R$ die *Krümmung* der Kurve c im Punkte P_1 . Der Schmiegekreis besitzt in P_1 dieselbe Krümmung wie die Kurve c und wird deshalb auch als *Krümmungskreis* der Kurve c im Punkte P_1 bezeichnet.

Für eine *Ellipse* findet man den Schmiegekreis k_s in einem beliebigen Punkte P durch folgende Konstruktion (Fig. 33a), welche die Kenntnis einer Hauptachse und eines Brennpunktes F auf ihr voraussetzt und von dem Schotten JOHN KEILL (1708) stammt.

Gegeben sei von der Ellipse ein Brennpunkt F , die durch F verlaufende Hauptachse sowie die Tangente t im Punkte P . Man schneidet die Normale n des Punktes P mit der Hauptachse im Punkte N , errichtet in N das Lot auf die Normale n und bringt es im Punkte H mit dem Leitstrahl $l = [FP]$ zum Schnitt. Schließlich errichtet man in H das Lot auf den Leitstrahl l .

Dieses schneidet die Normale n im *Mittelpunkte* M des gesuchten Schmieglekreises. Die Strecke MP ist der *Schmieglekreisradius* R , der auch *Krümmungsradius* der Ellipse im Punkt P heißt.

Diese Konstruktion für den Schmieglekreis einer Ellipse gilt unverändert für jeden Kegelschnitt, also auch für die *Parabel* und für die *Hyperbel*, von dem eine Hauptachse und ein Brennpunkt F auf ihr bekannt sind.

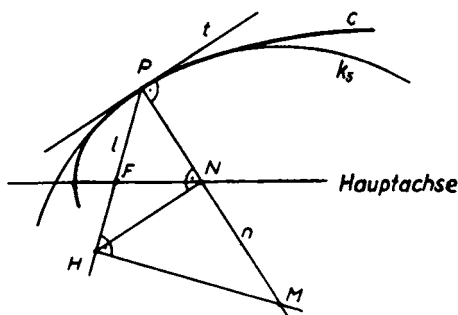
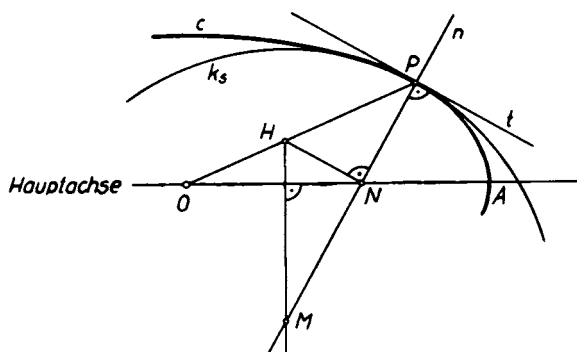


Fig. 33. Konstruktion der Mitte M des Schmieglekreises k_s eines Kegelschnittes c im Punkte P mit der Tangente t , a) mittels des Brennpunktes F und der Hauptachse durch F



b) mittels des Mittelpunktes O und der Hauptachse

Sie versagt nur dann, wenn P ein Scheitel des Kegelschnittes ist, da dann die Kurvennormale n mit der Hauptachse zusammenfällt und der Punkt N nicht bestimmt ist.

Kennt man von der *Ellipse* eine *Hauptachse* und den *Mittelpunkt* O , so kann man den Schmieglekreis k_s in einem ihrer Punkte P mit der Tangente t durch eine von KARL HEINRICH SCHELLBACH (1843) angegebene Konstruktion finden, die in Fig. 33 b dargestellt ist.

Die Richtigkeit der beiden Konstruktionen bestätigt man am einfachsten rechnerisch¹⁾ mit den Mitteln der Analysis (Infinitesimalrechnung).

7. Von besonderer Bedeutung sind die *Scheitelschmiegekreise der Ellipse*. Ist k ein allgemeiner Berührkreis im Ellipsenscheitel A , der die Ellipse in dem weiteren Punkte P_3 schneidet (Fig. 34), so trifft k aus Symmetriegründen die Ellipse auch in dem Spiegelpunkte P_4 zu P_3 bezüglich der x -Achse. Beim Grenzübergang $P_3 \rightarrow A$ geht von selbst auch

$P_4 \rightarrow A$, so daß der dabei aus k entstehende Scheitelschmiegekreis k_s die Ellipse in A sogar vierpunktig berührt.

Diese Eigenschaft (vierpunktige Berührung des Schmiegkreises k_s) kennzeichnet übrigens allgemein die Scheitelpunkte einer beliebigen Kurve. Da der Scheitelschmiegekreis ein Kreis durch „vier zusammengerückte Kurvenpunkte“ ist, durchsetzt er die Kurve im Scheitel nicht. Er bleibt

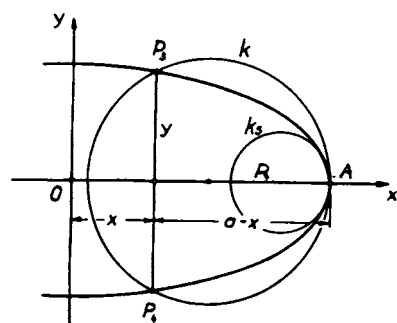


Fig. 34. Konstruktion der Scheitelschmiegekreismitten einer Ellipse (Herleitung)

vielmehr in der Umgebung des Scheitels auf derselben Seite der Kurve. Der Scheitelschmiegekreis im Hauptscheitel A einer Ellipse liegt z. B. ganz im Innern, der Schmiegkreis im Nebenscheitel B ganz im Äußern der Ellipse (Fig. 35).

Da ein Scheitelschmiegekreis die Kurve noch besser annähert als ein gewöhnlicher Schmiegkreis und da das Auge für die Symmetrie der Kurve im Scheitel besonders empfindlich ist, ist es zweckmäßig, beim Zeichnen einer Ellipse die Scheitelschmiegekreise stets zu verwenden.

Die *Schmiegekreisradien* R_a , R_b in den *Ellipsenscheiteln* A , B haben die Längen:

$$(10) \quad \begin{aligned} R_a &= \frac{b^2}{a} \text{ im Hauptscheitel } A, \\ R_b &= \frac{a^2}{b} \text{ im Nebenscheitel } B. \end{aligned}$$

Beweis: Hat der Punkt P_3 der Ellipse

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in Fig. 34 die Koordinaten $(x; y)$, und ist R der Radius jenes Berührkreises k im

¹⁾ Vgl. K. STRUBECKER, *Einführung in die Höhere Mathematik*, II. Band, Nr. 167 und 168, München/Wien 1967.

Scheitel A , der den Punkt P_3 enthält, so gilt nach dem Sehnensatz im Kreise k wegen (11) zunächst

$$(12) \quad y^2 = (a - x)(2R - (a - x)) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder

$$(13) \quad 2R - (a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a + x).$$

Läßt man nun $P_3 \rightarrow A$, d. h. $x \rightarrow a$ gehen, so erhält man für den Radius R_a des Scheitelschmieglekreises k_s in A aus (13)

$$(14) \quad R_a = \lim_{P_3 \rightarrow A} R = \frac{b^2}{a}.$$

Vertauscht man die Rollen von a und b , so folgt der in (10) angegebene Wert für R_b .

Die aus (10) folgenden Proportionen

$$(15) \quad \begin{aligned} R_a : b &= b : a, \\ R_b : a &= a : b \end{aligned}$$

lassen sich leicht in eine einfache *geometrische Konstruktion der Scheitelschmieglekreismitten* umsetzen (Fig. 35). Ergänzt man das Dreieck (AOB) mittels der Ecke H zu einem Rechteck mit den Seiten a und b , so schneidet das aus H auf die Diagonale $[AB]$ gefällte Lot auf den Hauptachsen die gesuchten Schmieglekreismitten M_a und M_b aus. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (AM_aH) , (HAB) und (BHM_b) liest man nämlich sofort die Proportionen (15) ab.

Wie Fig. 35 deutlich zeigt, kann man die *Ellipse* beim Ausziehen in der Gegend ihrer Scheitel A, B, C, D in einem weiten Bereich durch ihre *Scheitelschmieglekreise* ersetzen.

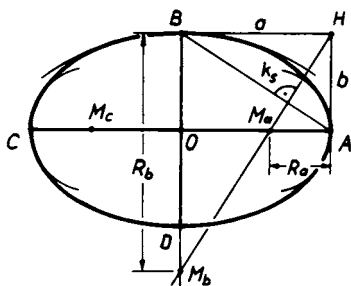


Fig. 35. Konstruktion der Scheitelschmieglekreismitten M_a, M_b einer Ellipse (Ausführung)

III

Grund- und Aufrißverfahren

12. Grundbegriffe

Das von GASPARD MONGE systematisch entwickelte Abbildungsverfahren zur Darstellung eines räumlichen Objektes benutzt zwei zueinander senkrechte Bildtafeln (Rißtafeln). Die erste Bildebene, die man sich in horizontaler Lage denkt, heißt Grundrißebene π_1 , die zweite Bildebene, die vertikal steht und dem Betrachter zugekehrt ist, heißt Aufrißebene π_2 . Die Schnittgerade der beiden Rißtafeln ist die Rißachse x_{12} . Das räumliche Objekt wird durch orthogonale Projektion gleichzeitig auf die beiden Rißtafeln geworfen, wodurch in π_1 der Grundriß und in π_2 der Aufriß des Objektes entsteht (Fig. 36). Daher heißt das Mongesche Grund- und Aufrißverfahren auch das Zweitafelverfahren oder das Verfahren der zugeordneten Normalrisse. Die Ursprünge dieses Abbildungsverfahrens lassen sich jedoch bis ins Altertum zurückverfolgen¹⁾.

¹⁾ Schon den Bauten der Babylonier und Ägypter lagen Pläne mit Maßangaben zugrunde. Genauere Urkunden über das antike Bauzeichnen verdanken wir jedoch erst dem römischen Baumeister und Ingenieur VITRUVIUS POLLIO, der in seinem 25 v. Chr. dem Kaiser AUGUSTUS gewidmeten Werke „*De architectura*“ erstmals von „*Ichnographie*“ (d. h. Fußspurzeichnung = Grundriß) und „*Orthographie*“ (d. h. Aufrechtzeichnung = Aufriß) spricht. Diese griechischen Namen kommen noch im 18. Jahrhundert vor. Das Verfahren wurde dann als Summe von Zeichenregeln und Kunstgriffen in den mittelalterlichen *Bauhütten* als zunftgeheimes Erfahrungsgut weitergegeben; für genauere Begründungen oder Beweise der geometrischen Richtigkeit dieser „Künste“ bestand kein Bedürfnis. Vor allem forderte dabei der Steinschnitt genaue zeichnerische Darstellungen. Das erste dem Steinschnitt gewidmete Werk stammt von PHILIBERT DE L'ORME „*Traité de l'architecture*“ (Paris 1567). Auch GIRARD DESARGUES (1591–1662) hat sich mit den konstruktiven Verfahren des Steinschnittes beschäftigt. Das größte Verdienst um die Heranbildung der Darstellenden Geometrie an Hand der konstruktiven Probleme des Stein- und Holzschnittes hat der französische Offizier und Ingenieur A. F. FRÉZIER mit seinem Werke „*La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie*“ (Straßburg 1738/39). FRÉZIER trennt darin als erster Theorie und Praxis und gibt erstmals genaue Begründungen und Beweise. Als wirklich methodisch geordneter Wissenszweig wurde das Grund- und Aufrißverfahren unter dem Namen *Géométrie descriptive* erst von GASPARD MONGE

13. Darstellung eines Punktes

Ist P ein beliebiger Raumpunkt (Fig. 36), dann ist sein *Grundriß* (P') der Normalriß von P auf die Grundrißebene π_1 , sein *Aufriß* P'' der Normalriß von P auf die Aufrißebene π_2 . Grund- und Aufriß werden durch die zu π_1 bzw. π_2 normalen *Projektionsstrahlen* aus den Rißtafeln ausgeschnitten. Ist noch P_{12} die Normalprojektion von P auf die Rißachse

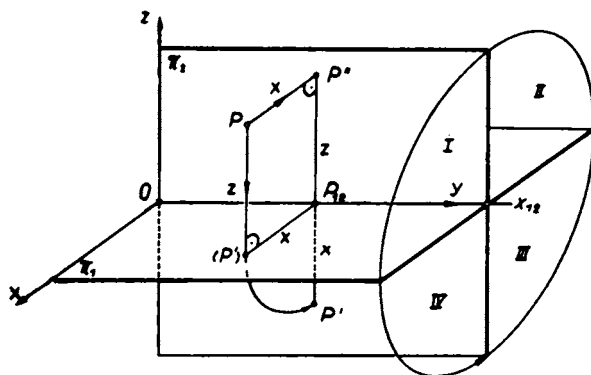


Fig. 36. Grundriß P' und Aufriß P'' eines Raumpunktes P (Entstehungsweise)

x_{12} , so bilden die vier Punkte P , (P'), P_{12} , P'' ein Rechteck, dessen Seiten (P') P_{12} und P'' P_{12} zur Rißachse x_{12} senkrecht sind.

Wir legen ein rechtshändiges rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem so, daß seine y -Achse mit der Rißachse x_{12} zusammenfällt, während die x -Achse in der Grundrißebene π_1 liegt und nach vorn orientiert ist, die z -Achse der Aufrißebene π_2 angehört und nach oben zeigt. Dann kann aus den Vorzeichen der Koordinaten (Koten) des Raumpunktes

(Fortsetzung der Fußnote ¹⁾ von Seite 36)

(1746–1818) geschaffen, dessen Bedeutung für die Begründung der Darstellenden Geometrie wir schon in 1. gedacht haben.

In Deutschland wurde das MONGESCHE Verfahren zuerst durch GUIDO SCHREIBER (1799–1871), der von 1827–1852 Professor der Darstellenden und Praktischen Geometrie an der Polytechnischen Schule (= Technischen Hochschule) Karlsruhe war, verbreitet durch sein „*Lehrbuch der Darstellenden Geometrie nach Monges géométrie descriptive vollständig bearbeitet*“ (Karlsruhe und Freiburg 1828/29). Für die Entwicklung der Darstellenden Geometrie in Deutschland hat sich ferner sein in den Jahren 1852–1896 lehrender Amtsnachfolger an der Technischen Hochschule Karlsruhe CHRISTIAN WIENER (1826–1896) durch sein hervorragendes „*Lehrbuch der Darstellenden Geometrie I/II*“ (Leipzig 1884/87) große Verdienste erworben.

Der modernen Gestaltung der Darstellenden Geometrie durch EMIL MÜLLER und seine Wiener Schüler wurde schon in 1. gedacht.

$P(x; y; z)$ entnommen werden, welchem der vier Quadranten I-IV, in die der Raum durch die beiden Reißtafeln zerlegt wird, der Punkt P angehört. Numeriert man die Quadranten so, daß der vordere obere der erste, der hintere obere der zweite, der hintere untere der dritte und der vordere untere der vierte Quadrant ist, dann gilt die folgende Vorzeichentafel:

Quadrant	x	y	z
I	+	beliebig	+
II	—	beliebig	+
III	—	beliebig	—
IV	+	beliebig	—

Um in einer einzigen Zeichenebene (Reißbrett) konstruieren zu können, vereinigt man die Grund- und Aufrißebene: man dreht die Grundrißebene π_1 um die Reißachse x_{12} so in die Aufrißebene π_2 hinein, daß ihr vorderer

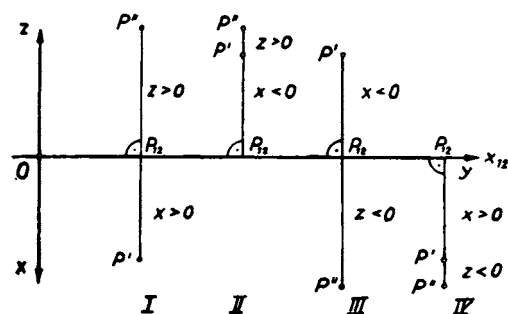


Fig. 37. Grund- und Aufriß von Punkten P aus den vier Quadranten I, II, III, IV

Teil $x > 0$ auf den unteren Teil $z < 0$ der Aufrißebene zu liegen kommt. Der dabei aus dem wahren Grundriß (P') entstehende gedrehte Grundriß des Punktes P wird weiterhin ebenfalls kurz Grundriß genannt und mit P' bezeichnet. Da bei dieser Drehung das Lot von (P') auf die Reißachse x_{12} in das Lot von P' auf die Reißachse übergeht, folgt:

Satz 1: Grundriß P' und Aufriß P'' eines Raumpunktes P liegen stets auf einer zur Reißachse x_{12} senkrechten Geraden. Diese heißt Ordnungslinie oder kurz Ordner des Punktes P .

Aus der Lage von P' und P'' zur Reißachse x_{12} geht eindeutig hervor, in welchem Quadranten der zugehörige Raumpunkt P liegt (Fig. 37). Zu beliebig auf dem gleichen Ordner gewählten Punkten P' , P'' gehört ein bestimmter Raumpunkt P . Liegt P' auf der Reißachse x_{12} , so gehört P der Aufrißebene π_2 an und deckt sich mit seinem Aufriß, d. h. es ist $P'' = P$. Liegt P'' auf der Reißachse x_{12} , dann ist P ein Punkt der Grundrißebene π_1 , so daß er mit seinem Grundriß identisch ist: $P' = P$. Fallen P' und P'' in einen einzigen Punkt der Reißachse x_{12} zusammen, so liegt P selbst auf der Achse x_{12} und es ist $P' = P'' = P$.

Decken sich Grundriß P' und Aufriß P'' eines Punktes (Fig. 38), so gilt für die Koordinaten eines solchen Punktes $x = -z$ oder

$$(1) \quad x + z = 0.$$

Dies ist die Gleichung der winkelhalbierenden Ebene des zweiten und vierten Quadranten. Es folgt

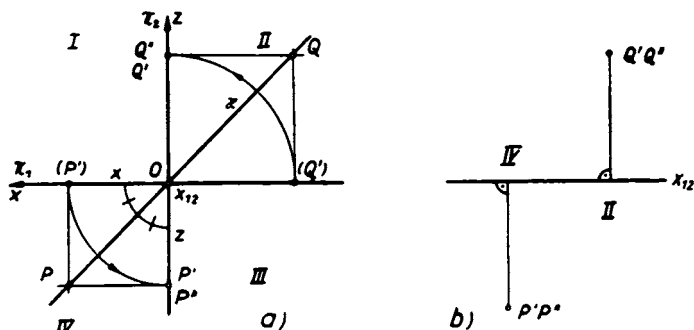


Fig. 38. Die Punkte P der Deckebene oder Koinzidenzebene κ haben zusammenfallende (sich deckende) Grund- und Aufrisse $P' = P''$

Satz 2: Alle Raumpunkte P , deren Grundriß und Aufriß zusammenfallen ($P' = P''$), liegen in der Symmetrieebene des zweiten und vierten Quadranten. Sie heißt Deckebene oder Koinzidenzebene κ .

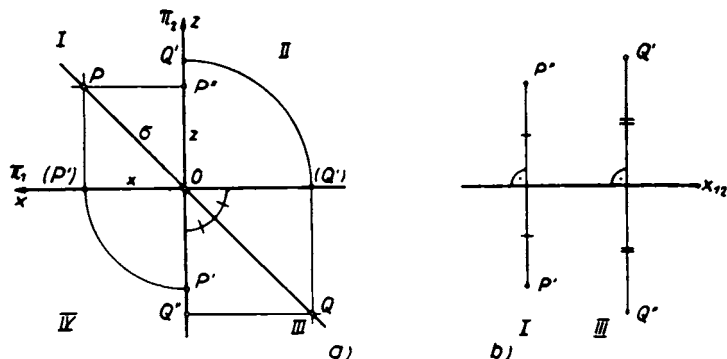


Fig. 39. Die Punkte P der Symmetrieebene σ haben bezüglich der Rißachse x_{12} symmetrische Grund- und Aufrisse

Die Deckebene hat zuerst der Luxemburger JEAN BAPTISTE BRASSEUR (1853) in die Darstellende Geometrie eingeführt.

Liegen Grundriß P' und Aufriß P'' eines Raumpunktes P zur Rißachse symmetrisch (Fig. 39), so besteht zwischen den Koordinaten des Punktes P

die Beziehung $x = z$ oder

$$(2) \quad x - z = 0.$$

Dies ist die Gleichung der winkelhalbierenden Ebene des ersten und dritten Quadranten. Also gilt

Satz 3: *Alle Raumpunkte, deren Grundriß und Aufriß zur Rißachse symmetrisch liegen, gehören der Symmetrieebene des ersten und dritten Quadranten an. Sie heißt Symmetrieebene σ .*

14. Darstellung einer Geraden

Der Normalriß einer beliebigen Raumgeraden g ist wieder eine Gerade, falls wir den Sonderfall, daß g auf einer der Bildebenen senkrecht steht, vorläufig ausschließen. Der Grundriß g' der Geraden g entsteht dadurch,

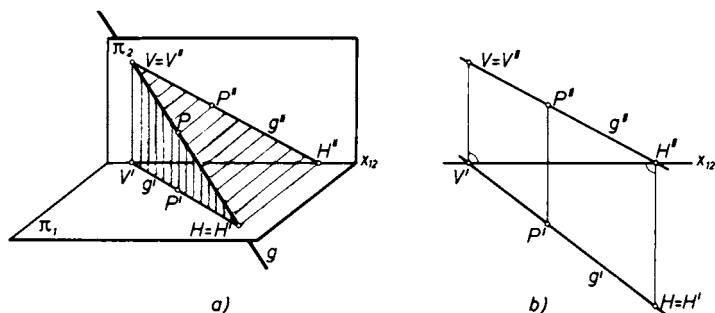


Fig. 40. Grundriß g' und Aufriß g'' einer Raumgeraden g . Erster Spurpunkt H (Horizontalspurpunkt) und zweiter Spurpunkt V (Vertikalspurpunkt). H'' und V' liegen auf der Rißachse x_{12} . Dabei ist $H' = H$ und $V'' = V$

daß die zu π_1 normale projizierende Ebene durch g , die sogenannte *erstprojizierende Ebene* durch g , mit der Grundrißebene π_1 geschnitten wird (Fig. 40a). (Daß eigentlich die Grundrißebene π_1 noch in die Aufrißebene π_2 um die Rißachse x_{12} hineingedreht werden muß, um zum Grundriß g' zu gelangen, erwähnen wir in Hinkunft, weil selbstverständlich, nicht mehr ausdrücklich.) Der *Aufriß* g'' der Geraden g ist die Spur der zu π_2 normalen *zweitprojizierenden Ebene* durch g in der Aufrißebene π_2 .

Ist die Gerade g zur Grundrißebene π_1 nicht parallel, so hat sie einen (eigentlichen) Spurpunkt in ihr, der ihr *erster Spurpunkt* oder *Horizontalspurpunkt* H heißt. Der Grundriß H' von H fällt mit H zusammen, der Aufriß H'' liegt auf der Rißachse.

Ist die Gerade g zur Aufrißebene π_2 nicht parallel, so hat sie einen (eigentlichen) *zweiten Spurpunkt* oder *Vertikalspurpunkt* V , nämlich den Durch-

stoßpunkt von g mit π_2 . Er ist sein eigener Aufriß: $V'' = V$, während sein Grundriß V' auf der Rißachse liegt.

Ein beliebiger Punkt P der Geraden g hat dann seine Risse P' und P'' auf g' bzw. g'' ; sie liegen auf einem Ordner.

Sind die beiden zugeordneten Normalrisse g' und g'' einer Geraden g in der Zeichenebene gegeben (Fig. 40b), so findet man ihre Spurpunkte demnach folgendermaßen: Der Schnittpunkt von g'' mit x_{12} ist der Aufriß H'' des Horizontalspurpunktes H der Geraden. Sein Grundriß $H' = H$ liegt auf dem Ordner durch H'' auf g' . Andererseits schneidet g' die Rißachse im Grundriß V' des Vertikalspurpunktes V , und $V'' = V$ ist der Schnittpunkt des zugehörigen Ordners mit g'' . Liegt die Strecke zwischen H'' und V'' über der Rißachse x_{12} und die Strecke zwischen H' und V' unter dieser, dann geht die Gerade g durch den ersten Quadranten. Außerdem passiert sie die benachbarten (d. h. den zweiten und vierten) Quadranten, während sie den gegenüberliegenden dritten Quadranten meidet.

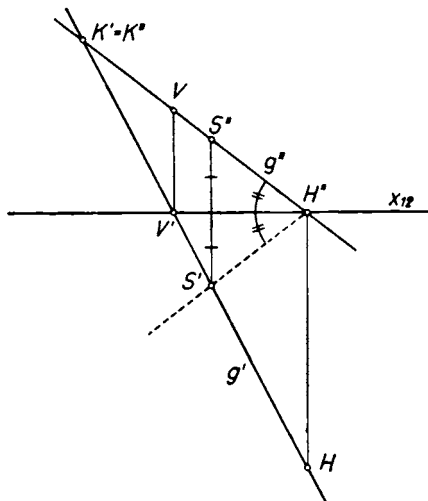


Fig. 41. Deckpunkt K und Symmetriepunkt S einer Raumgeraden g (Schnittpunkte von g mit der Deckebene π und Symmetrieebene σ)

Der (eigentliche oder uneigentliche, d. h. unendlich ferne) Schnittpunkt $K' = K''$ von g' und g'' (Fig. 41) ist der (zusammenfallende)

Grund- und Aufriß jenes Punktes K der Raumgeraden g , der in der Deckebene (Koinzidenzebene) π liegt, d. h. des Schnittpunktes K der Raumgeraden g mit der Deckebene π , den man als den *Deckpunkt* oder *Koinzidenzpunkt* von g bezeichnet. Sind g' und g'' zueinander parallel, so ist die Gerade g im Raum zur Deckebene π parallel, ihr Deckpunkt K ist der Fernpunkt von g .

Um die Risse S' , S'' jenes Punktes S auf g zu bestimmen, in dem g die Symmetrieebene σ durchstößt, hat man das Spiegelbild von g'' bezüglich der Rißachse x_{12} mit g' zu schneiden. Dieser Schnittpunkt ist S' , während S'' in gleichem Abstand von der Rißachse auf g'' liegt. Sind g' und g'' unter entgegengesetzten gleichen Winkeln gegen die Rißachse geneigt, also zu einem

Ordner symmetrisch, so ist die Gerade g im Raum zur Symmetrieebene σ parallel.

Wir betrachten nun die bisher ausgeschlossenen Sonderlagen einer Geraden bezüglich der beiden Bildebenen.

Eine horizontale, d. h. zur Grundrißebene π_1 parallele Gerade heißt eine *erste Hauptlinie* h_1 . Während ihr Grundriß h'_1 beliebig ist, verläuft ihr Aufriß h''_1 zur Rißachse x_{12} parallel (Fig. 42). Der Neigungswinkel α von

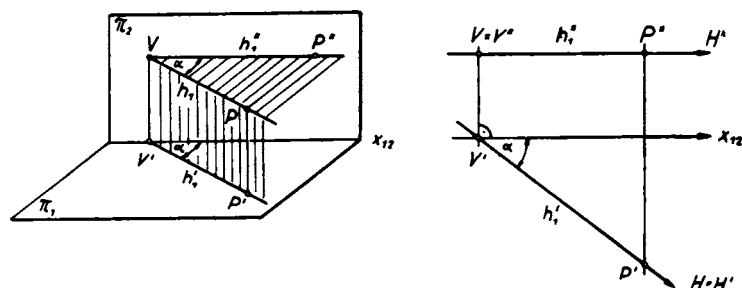


Fig. 42. Erste Hauptlinie h_1 (Parallele zur Grundrißebene π_1). Ihr Aufriß h''_1 ist parallel zur Rißachse x_{12} .

h_1 gegen die Aufrißebene π_2 tritt in wahrer Größe als Winkel α zwischen h'_1 und x_{12} auf. Ihr Horizontalspurpunkt $H = H'$ ist der Fernpunkt von h_1 , ihr Vertikalspurpunkt $V = V''$ liegt auf dem Ordner des Schnittpunktes V' von h'_1 mit der Rißachse x_{12} .

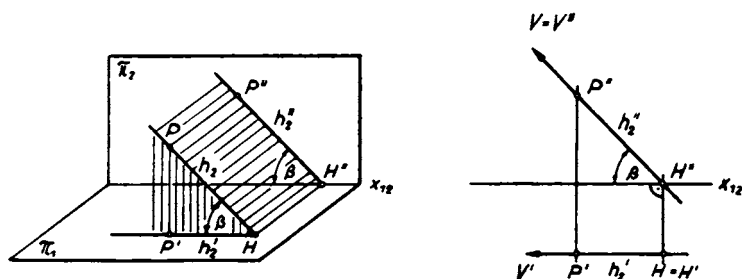


Fig. 43. Zweite Hauptlinie h_2 (Parallele zur Aufrißebene π_2). Ihr Grundriß h'_2 ist parallel zur Rißachse x_{12} .

Eine frontale, d. h. zur Aufrißebene π_2 parallele Gerade heißt eine *zweite Hauptlinie* h_2 . Ihr Aufriß h''_2 ist beliebig, ihr Grundriß h'_2 ist zur Rißachse x_{12} parallel (Fig. 43). Der Winkel β zwischen h''_2 und x_{12} ist gleich dem wahren Neigungswinkel β zwischen h_2 und der Grundrißebene π_1 . Der Vertikalspurpunkt $V = V''$ einer zweiten Hauptlinie ist der Fernpunkt von h_2 ; ihren Horizontalspurpunkt $H = H'$ findet man auf h'_2

durch einen Ordner unter (oder über) dem Schnittpunkt H'' von h''_2 mit der Rißachse x_{12} .

Ist eine Gerade g zu beiden Bildebenen, d. h. zur Rißachse x_{12} parallel, ist also die Gerade g zugleich erste und zweite Hauptlinie, dann ist sowohl ihr Grundriß g' als auch ihr Aufriß g'' zur Rißachse parallel (Fig. 44).

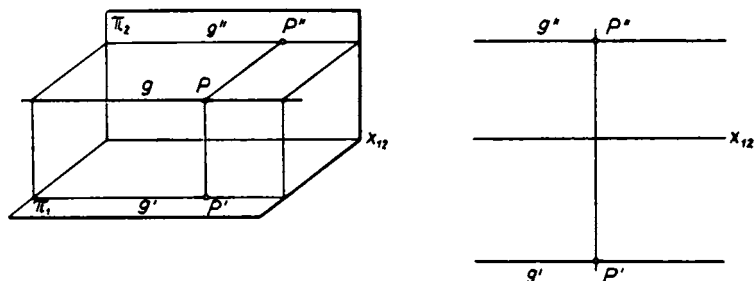


Fig. 44. Zur Rißachse x_{12} parallele Gerade g

Eine zur Grundrißebene π_1 senkrechte Gerade g heißt eine *erstprojizierende Gerade*. Ihr Grundriß g' ist ein Punkt, ihr Aufriß g'' eine zur Rißachse senkrechte Gerade durch g' (Fig. 45).

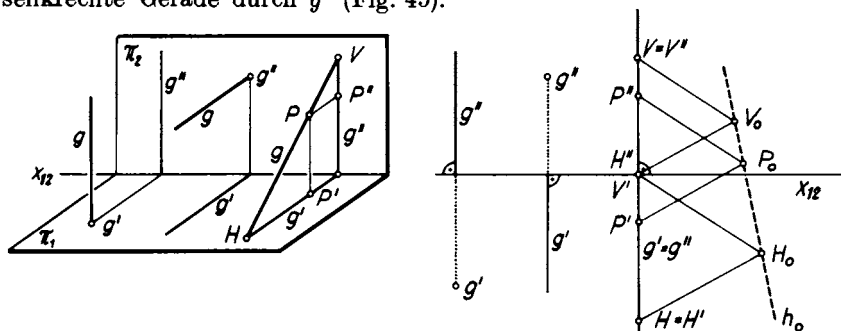


Fig. 45. Eine Gerade, die in einer zur Rißachse x_{12} normalen Ebene liegt, ist durch die Risse ihrer Spurpunkte H und V festgelegt. Projizierende Geraden

Eine *zweitprojizierende Gerade*, d. h. eine zur Aufrißebene π_2 senkrechte Gerade, hat als Aufriß g'' einen Punkt, als Grundriß g' eine zur Rißachse senkrechte Gerade durch g'' (Fig. 45).

Liegt schließlich eine Gerade in einer zur Rißachse x_{12} senkrechten Ebene in beliebiger Lage, so sind ihr Grundriß g' und ihr Aufriß g'' zur Rißachse senkrecht; sie überdecken sich (Fig. 45). Da es bei dieser Lage einer Geraden g nicht möglich ist, durch bloßes Ziehen eines Ordners zum Grundriß P' eines Punktes P der Geraden g seinen Aufriß P'' zu bestimmen, muß man auf g die Lage zweier Punkte der Geraden, etwa die des Horizontalspurpunktes H und des Vertikalspurpunktes V angeben.

Dann ist die Lage der Geraden g im Raume eindeutig festgelegt und man findet unter Benutzung der Invarianz des Teilverhältnisses

$$(1) \quad (HV \cdot P) = (HV' \cdot P') = (H''V \cdot P'')$$

zum Grundriß P' auf g' leicht den Aufriß P'' auf g'' , z. B. indem man, Parallelen durch H' und V' bzw. durch H'' und V'' ziehend, die Hilfsgerade $h_0 = [H_0 V_0]$ zeichnet. Die Parallelen durch P' und den gesuchten Punkt P'' müssen sich dann ebenfalls in einem Punkt P_0 der Geraden h_0 treffen, für den wegen (1) $(H'V' \cdot P') = (H_0V_0 \cdot P_0) = (H''V'' \cdot P'')$ gilt.

Zwei verschiedene Geraden im Raum schneiden sich entweder in einem eigentlichen Punkte P oder (wenn sie parallel sind) in einem Fernpunkte P_u , oder sie sind zueinander windschief.

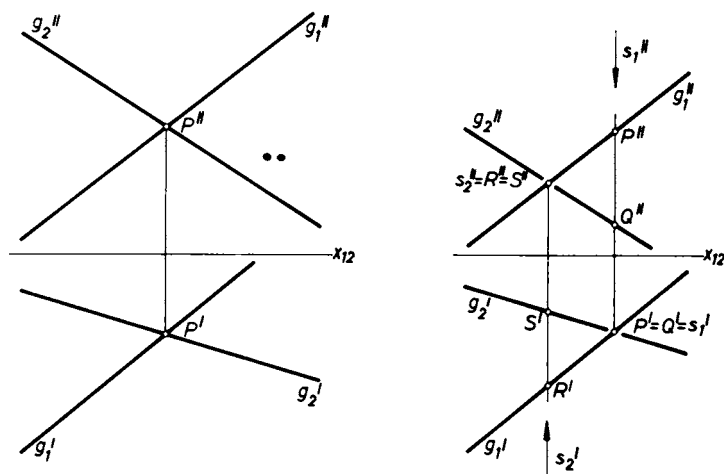


Fig. 46. Zwei (nicht parallele) Geraden können sich a) schneiden oder b) nicht schneiden, d. h. zueinander windschief sein

Zu parallelen Geraden g_1 und g_2 gehören wegen der Invarianz des Parallelismus gegenüber Parallelprojektion sowohl *parallele Grundrisse* $g_1' \parallel g_2'$ als auch *parallele Aufrisse* $g_1'' \parallel g_2''$.

Aus der Invarianz der Inzidenzverhältnisse von Punkten und Geraden bei Parallelprojektion folgt weiter: Haben die Geraden g_1 und g_2 einen *eigentlichen Schnittpunkt* P , so ist sein Grundriß P' der Schnittpunkt von g_1' mit g_2' , sein Aufriß P'' der Schnittpunkt von g_1'' mit g_2'' (Fig. 46a). Der Schnittpunkt P' der Grundrißbilder und der Schnittpunkt P'' der Aufrißbilder der beiden Geraden liegen dabei auf einem Ordner.

Sind die Geraden g_1 und g_2 zueinander *windschief*, dann haben sie keinen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt gemeinsam. Trotzdem schneiden

sich sowohl ihre Grundrisse g'_1, g'_2 wie auch ihre Aufrisse g''_1, g''_2 in je einem Punkt, und wenigstens einer von ihnen ist kein Fernpunkt. Es gibt nämlich einen auf π_1 senkrechten Sehstrahl s_1 , der nacheinander g_1 und g_2 in einem Punkte P und einem Punkte Q trifft. Die Grundrisse P' und Q' fallen in dem Kreuzungspunkt von g'_1 und g'_2 zusammen (der zugleich der Grundriß s'_1 des Sehstrahls s_1 ist), ihre auf dem Ordner s'_1 liegenden Aufrisse P'', Q'' sind dagegen verschieden (Fig. 46b). Entsprechend gibt es einen zu π_2 senkrechten Sehstrahl s_2 , der g_1 im Punkt R und g_2 im Punkt S schneidet. Die Aufrisse R'', S'' dieser beiden Punkte decken sich in dem Kreuzungspunkt von g''_1 und g''_2 (der zugleich der Aufriß s''_2 des Sehstrahls s_2 ist), während ihre Grundrisse R', S' verschiedene Punkte sind, die auf demselben Ordner s'_2 auf g'_1 bzw. g'_2 liegen. *Für die windschiefe Lage zweier Raumgeraden ist kennzeichnend, daß der Kreuzungspunkt ihrer Aufrisse und der Kreuzungspunkt ihrer Grundrisse nicht auf einem Ordner liegen.*

Man kann mit Hilfe der Sehstrahlen s_1 und s_2 auch leicht die *Sichtbarkeitsverhältnisse* zweier windschiefer Geraden an den Kreuzungsstellen ihrer Grund- und Aufrisse klären. Der Kreuzungspunkt $P' = Q'$ im Grundriß löst sich im Aufriß in die beiden verschiedenen Punkte P'', Q'' auf. Liegt dann z. B. (Fig. 46b) der Punkt P'' auf dem Sehstrahl s''_1 über dem Punkt Q'' , so liegt P über Q . Im Grundriß verdeckt daher der Punkt P' den Punkt Q' , und die Gerade g_1 , die den Punkt P trägt, liegt in der Umgebung der Kreuzungsstelle über der Geraden g_2 ; in der Zeichnung ist also g'_1 durchzuziehen, g'_2 zu unterbrechen. Eine analoge Überlegung unter Vertauschung der Rollen von Grund- und Aufriß zeigt, daß bei der in Fig. 46b vorliegenden Annahme im Kreuzungspunkt $R'' = S''$ zwischen g''_1 und g''_2 die Gerade g_1 vor der Geraden g_2 vorbeiläuft, so daß also der Kreuzungspunkt als Punkt R von g_1 sichtbar, als Punkt S von g_2 verdeckt ist.

15. Darstellung einer Ebene

Eine Ebene ε , die weder zur Grundrißebene π_1 noch zur Aufrißebene π_2 parallel ist, schneidet diese beiden Bildebenen in je einer Geraden, den beiden *Spurgeraden* oder kurz *Spuren* der Ebene ε . Die Schnittgerade von ε mit π_1 heißt *erste Spur* oder *Grundrißspur* e_1 , die Schnittgerade von ε mit π_2 *zweite Spur* oder *Aufrißspur* e_2 der Ebene ε (Fig. 47a). Von der Rißachse x_{12} wird die Ebene ε in einem Punkte E durchstoßen, der *Knotenpunkt* oder *Knoten* der Ebene ε heißt. Der Knotenpunkt E ist zugleich der Schnittpunkt der beiden Spuren e_1 und e_2 der Ebene ε .

Unter den in der Ebene ε liegenden Geraden spielen jene Geraden eine besondere Rolle, die zur Grundrißebene π_1 bzw. zur Aufrißebene π_2 parallel

sind. Die zu π_1 parallelen (also horizontalen) Geraden h_1 heißen *erste Spurparallelen* oder *erste Hauptlinien* der Ebene ε , die zu π_2 parallelen Geraden h_2 sind die *zweiten Spurparallelen* oder *zweiten Hauptlinien* der Ebene. Die ersten Hauptlinien h_1 sind zur ersten Spur e_1 , die zweiten Hauptlinien h_2 zur zweiten Spur e_2 parallel. Durch jeden Punkt P der Ebene ε verläuft eine erste und eine zweite Hauptlinie.

Zur *Darstellung einer Ebene ε* im Grund- und Aufrißverfahren können ihre beiden *Spuren* e_1 und e_2 dienen, die sich im Knoten E auf der Rißachse x_{12} schneiden, sonst aber beliebige Lage einnehmen können (Fig. 47b).

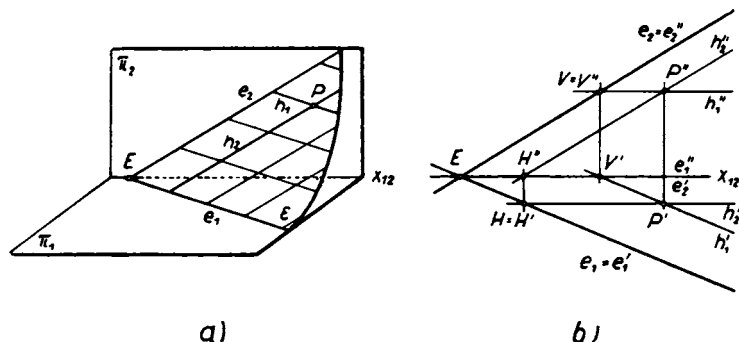


Fig. 47. Darstellung einer Ebene ε durch ihre Spuren e_1 (erste Spur, Grundrißspur) und e_2 (zweite Spur, Aufrißspur) und Spurparallelen (Hauptlinien) h_1 und h_2 .

Die erste Spur e_1 liegt in der Grundrißebene. Daher gilt für ihre Risse $e'_1 = e_1$ und $e''_1 = x_{12}$. Die zweite Spur e_2 gehört der Aufrißebene an, so daß $e'_2 = x_{12}$ und $e''_2 = e_2$ ist.

Eine erste Spurparallele h_1 ist zur ersten Spur e_1 der Ebene parallel. Daher ist

$$(1) \quad h'_1 \parallel e_1, \quad h''_1 \parallel x_{12}.$$

Satz 1: Der Aufriß einer ersten Spurparallelen ist zur Rißachse, ihr Grundriß zur Grundrißspur der Ebene parallel.

Für jede zweite Spurparallele h_2 gilt entsprechend:

$$(2) \quad h'_2 \parallel x_{12}, \quad h''_2 \parallel e_2.$$

Satz 2: Der Grundriß einer zweiten Spurparallelen ist zur Rißachse, ihr Aufriß zur Aufrißspur der Ebene parallel.

Ist (Fig. 47b) von einer ersten Spurparallelen h_1 der Ebene ε der Grundriß $h'_1 \parallel e_1$ gegeben, so findet man ihren Aufriß $h''_1 \parallel x_{12}$ leicht über ihren Vertikalspurpunkt V . Sein Grundriß V' ist der Schnittpunkt von h'_1 mit $e'_2 = x_{12}$. Sein Aufriß $V = V''$ liegt dann auf dem Ordner durch V' auf e_2 .

Durch V verläuft dann parallel zur Reißachse der Aufriß h_1'' der gegebenen ersten Hauptlinie.

Die Zuordnung zwischen dem Grundriß h_2' und dem Aufriß h_2'' einer zweiten Spurparallelen der Ebene ε erfolgt über ihren Horizontalspurpunkt H . Sein Grundriß $H' = H$ ist der Schnittpunkt von h_2' und e_1 , sein Aufriß H'' der Schnittpunkt von h_2'' und x_{12} . Beide Risse H' , H'' müssen auf einem Ordner liegen.

Da die Hauptlinien h_1 und h_2 der Ebene ε angehören, schneiden sie sich in einem Punkte P von ε . Der Schnittpunkt P' von h_1' und h_2' sowie der Schnittpunkt P'' von h_1'' und h_2'' liegen daher auf einem Ordner.

Unter Verwendung einer ersten oder einer zweiten Spurparallelen läßt sich nun leicht folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe: Von einem Punkt P der Ebene ε mit den Spuren e_1 und e_2 ist bei gegebenem Grundriß P' der Aufriß P'' zu konstruieren.

Lösung: Man legt dazu durch P z. B. die erste Spurparallele h_1 der Ebene ε . Ihr Grundriß h_1' verläuft durch P' parallel zu e_1 (Fig. 48) und trifft

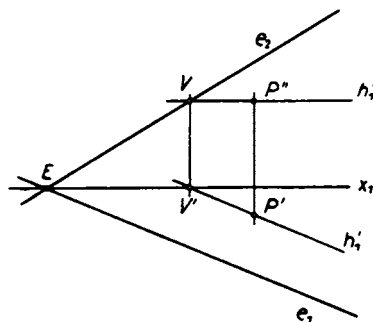


Fig. 48. Konstruktion des Aufrisses P'' eines Punktes P der Ebene ε bei gegebenem Grundriß P'

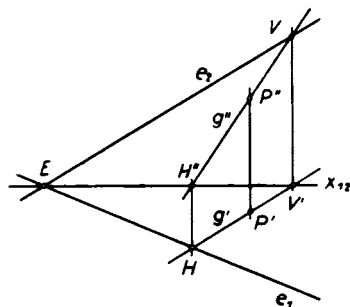


Fig. 49. Konstruktion des Aufrisses g'' einer Geraden g der Ebene ε bei gegebenem Grundriß g'

die Reißachse x_{12} im Punkt V' . Der Aufrißspurpunkt $V = V''$ liegt auf dem Ordner von V' auf e_2 . Durch ihn verläuft dann der Aufriß h_1'' von h_1 parallel zu x_{12} . Der gesuchte Aufriß P'' des Punktes P liegt dann 1. auf dem Ordner von P' und 2. auf dem Aufriß h_1'' der ersten Spurparallelen h_1 durch P .

Selbstverständlich kann P'' auch mit Hilfe der zweiten Spurparallelen h_2 durch P gefunden werden. Ist umgekehrt der Aufriß P'' gegeben, dann liefert eine analoge Konstruktion den Grundriß P' des in der Ebene ε gelegenen Punktes P .

Liegt eine beliebige Gerade g in der Ebene ε , die wir uns wieder durch ihre beiden Spuren e_1, e_2 festgelegt denken, so ist sie schon durch Vorgabe eines ihrer zugeordneten Normalrisse bestimmt. Ist z. B. der Grundriß g' gegeben, dann ist ihr Horizontalspurpunkt $H = H'$ der Schnittpunkt von g' mit e_1 und der Grundriß V' ihres Vertikalspurpunktes V der Schnittpunkt von g' mit x_{12} (Fig. 49). Der Aufriß H'' des Horizontalspurpunktes H liegt dann auf x_{12} , der Vertikalspurpunkt $V = V''$ auf e_2 . Die Verbindungsgerade $[H''V]$ ist dann der gesuchte Aufriß g'' der Geraden g der Ebene ε .

Ein beliebiger Punkt P der Ebene ε kann dann auch mit Hilfe einer beliebigen durch P gelegten Hilfsgeraden g der Ebene ε von einem in den anderen Riß übertragen werden (Fig. 49).

Weitere ausgezeichnete Geraden einer Ebene ε sind die *Spurnormalen* oder *Falllinien*. Alle Geraden der Ebene ε , die auf ihrer ersten Spur e_1 senkrecht stehen, heißen *erste Spurnormalen* oder *erste Falllinien* f_1 (ein Massenpunkt in der Ebene fällt unter dem Einfluß der Schwerkraft längs einer solchen Falllinie). *Zweite Spurnormalen* oder *zweite Falllinien* f_2 sind alle jene Geraden der Ebene ε , die auf ihrer zweiten Spur e_2 senkrecht stehen.

Da die erste Falllinie f_1 auf der ersten Spur e_1 der Ebene ε senkrecht steht, ist die erstprojizierende Ebene durch f_1 , die den Grundriß f'_1 enthält, zu e_1 normal. Daher steht auch f'_1 auf e_1 senkrecht (Fig. 50a). Also gilt:

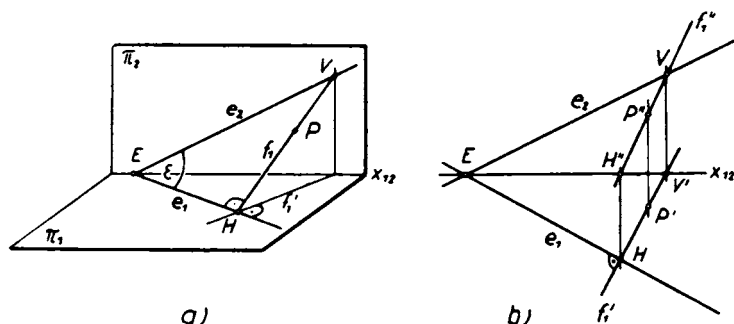


Fig. 50. Darstellung einer ersten Spurnormalen (ersten Falllinie) f_1 der Ebene ε

Satz 3: Der Grundriß f'_1 einer ersten Falllinie f_1 der Ebene ε ist senkrecht zur ersten Spur e_1 der Ebene.

Entsprechend gilt:

Satz 4: Der Aufriß f''_2 einer zweiten Falllinie f_2 der Ebene ε ist senkrecht zur zweiten Spur e_2 der Ebene.

Daraus ergibt sich die Konstruktion einer ersten Falllinie f_1 (Fig. 50b). Ihr Grundriß f'_1 ist zu e_1 senkrecht und schneidet e_1 in ihrem Horizontal-

Spurpunkt H , die Rißachse x_{12} im Grundriß V' des Vertikalspurpunktes V . Durch Übertragung von H und V in den Aufriß ist der Aufriß f_1'' der im Grundriß gewählten ersten Fallinie als Verbindungsgerade von H'' mit $V = V''$ bestimmt.

Entsprechend verläuft die Konstruktion einer zweiten Fallinie f_2 (Fig. 51).

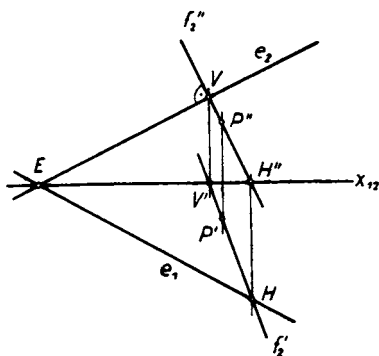


Fig. 51. Darstellung einer zweiten Spurnormalen (zweiten Fallinie) f_2 der Ebene ε

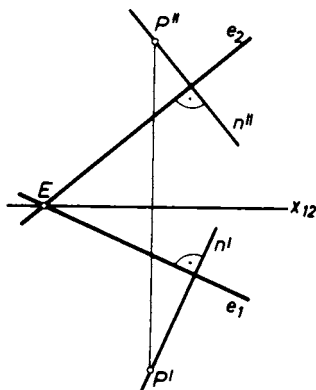


Fig. 52. Darstellung der Normalen n (des Lotes) aus dem Raumpunkte P auf die Ebene ε

Ihr Aufriß f_2'' steht auf der zweiten Spur e_2 senkrecht. Durch Übertragen der beiden Spurpunkte H und V aus dem Aufriß in den Grundriß erhält man den Grundriß f_2' als Verbindungsgerade $[HV']$.

Als weitere wichtige Geradenschar, die mit einer Ebene verbunden ist, besprechen wir nun die *Normalen der Ebene*, d. h. jene Raumgeraden n , die auf der Ebene ε senkrecht stehen.

Die durch einen beliebigen Raumpunkt P gelegte Normale n auf die Ebene ε steht auf allen Geraden der Ebene senkrecht, also auch auf e_1 und e_2 . Die erstprojizierende Ebene durch n steht deshalb auf e_1 , die zweitprojizierende Ebene durch n auf e_2 senkrecht. Daher gilt (Fig. 52):

Satz 5: Der Grundriß n' einer Normalen n zu einer Ebene ε steht senkrecht auf der Grundrißspur e_1 der Ebene und damit auch auf dem Grundriß h_1' jeder ersten Spurparallelen h_1 . Ihr Aufriß n'' steht senkrecht auf der Aufrißspur e_2 der Ebene ε und damit auch auf dem Aufriß h_2'' jeder zweiten Spurparallelen h_2 .

Soll in einem durch Grundriß P' und Aufriß P'' gegebenen Punkt P der Ebene ε das Lot n errichtet werden, so hat man im Grundriß von P' das Lot n' auf die Grundrißspur e_1 und im Aufriß P'' von P das Lot n'' auf die Aufrißspur e_2 zu fällen (Fig. 53).

Häufig nimmt die darzustellende Ebene zu den Rißtafeln eine *Sonderlage* ein.

Eine Ebene ε , die zur Rißachse x_{12} parallel ist, heißt *Pultebene* (Fig. 54). Ihr Knotenpunkt E ist der Fernpunkt der Rißachse und ihre Spuren e_1 und e_2 sind beide zur Rißachse x_{12} parallel.

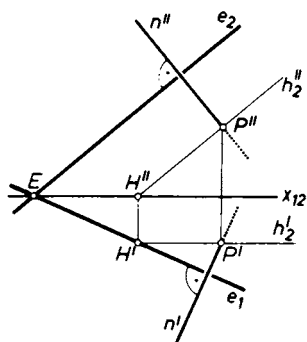


Fig. 53. In einem Punkte P der Ebene ε ist das Lot n auf ε zu errichten

Ist die Ebene ε parallel zur Aufrißebene π_2 , man spricht dann auch von einer *frontalen Ebene*, so ist ihre Aufrißspur e_2 die Ferngerade der Bildebene, während ihre Grundrißspur e_1 zur Rißachse x_{12} parallel verläuft (Fig. 55).

Für eine zur Grundrißebene π_1 parallele Ebene, d. h. für eine *horizontale Ebene* ε , verschwindet die Grundrißspur e_1 im Unendlichen, während die Aufrißspur e_2 eine Parallele zur Rißachse x_{12} ist (Fig. 56).

Besonders wichtig sind jene Ebenen, die auf einer Bildtafel senkrecht stehen.

Da die projizierenden Sehstrahlen in bezug auf die Bildebene, auf der die Ebene senkrecht steht, ganz der Ebene angehören, heißen solche Ebenen *projizierende Ebenen*.

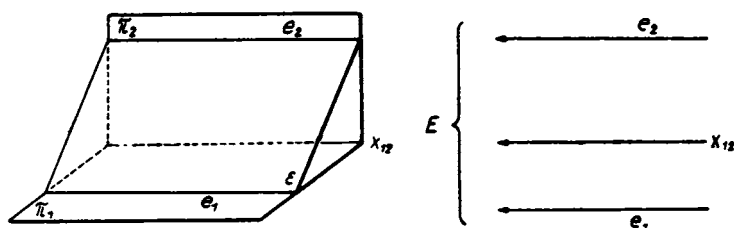


Fig. 54. Darstellung einer zur Rißachse x_{12} parallelen Ebene ε (Pultebene) durch ihre Spuren

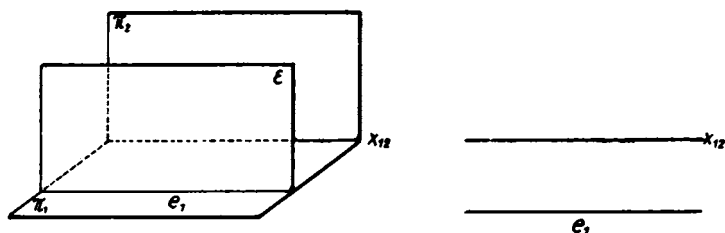


Fig. 55. Darstellung einer zur Aufrißebene π_2 parallelen Ebene ε

Eine Ebene ε , die zur Grundrißebene π_1 senkrecht steht, heißt eine *erstprojizierende Ebene*. Während ihre erste Spur e_1 beliebige Lage

aufweisen kann, steht ihre zweite Spur e_2 im Knotenpunkt E auf der Reißachse x_{12} senkrecht (Fig. 57). Jeder Punkt P , dessen Grundriß P' auf e_1 liegt, während sein Aufriß P'' irgendwo auf dem Ordner liegt, gehört der erstprojizierenden Ebene ε an.

Aus dem Aufriß P'' kann dann sofort der Grundriß P' eines solchen Punktes von ε gefunden werden. Ist dagegen der Grundriß P' eines

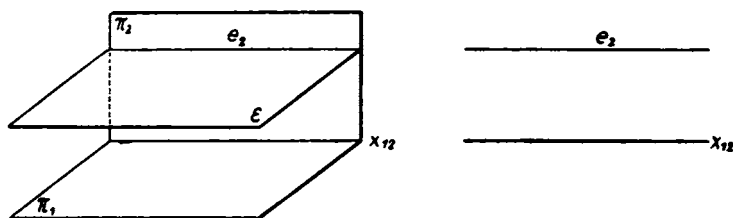


Fig. 56. Darstellung einer zur Grundrißebene π_1 parallelen Ebene ε

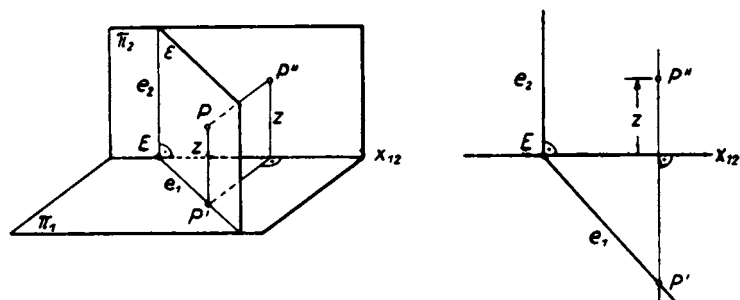


Fig. 57. Darstellung einer erstprojizierenden Ebene ε . Ihre zweite Spur e_2 ist normal zur Reißachse x_{12}

Punktes von ε auf e_1 gegeben, dann verlangt die Konstruktion seines Aufrißes P'' die Kenntnis seiner Höhenkote z .

Eine *zweitprojizierende Ebene* ε steht auf der Aufrißebene π_2 senkrecht. Ihre erste Spur e_1 steht auf der Reißachse x_{12} senkrecht, während ihre zweite Spur e_2 beliebig durch den Knoten E verläuft (Fig. 58). Ein beliebiger Punkt P der zweitprojizierenden Ebene ε hat seinen Aufriß P'' auf e_2 , während sein Grundriß P' von der Reißachse den Abstand x hat.

Ist eine Ebene ε zugleich erst- und zweitprojizierend, d. h. steht sie sowohl auf der ersten Bildebene π_1 wie auf der zweiten Bildebene π_2 senkrecht, dann heißt sie *doppeltprojizierend*. Ihre Spuren e_1, e_2 fallen in einem Lot zur Reißachse zusammen (Fig. 59). Nimmt man auf ihm die Punkte P' und P'' beliebig an, so sind sie stets Grund- und Aufriß eines Punktes P dieser doppeltprojizierenden Ebene ε .

Solche doppeltprojizierende Ebenen spielen eine Rolle als *Kreuzrißebenen*; der Normalriß eines räumlichen Objekts auf sie heißt nämlich ein *Kreuzriß* des Objekts.

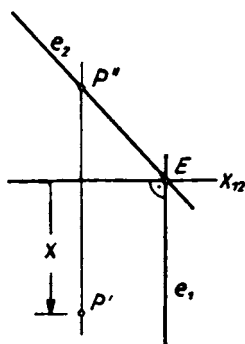
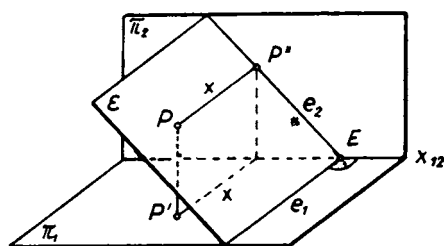


Fig. 58. Darstellung einer zweitprojizierenden Ebene ε . Ihre erste Spur e_1 ist normal zur Rißachse x_{12} .

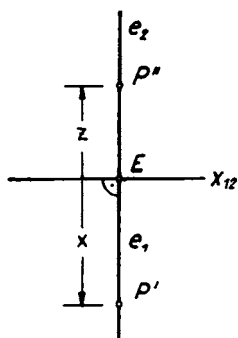
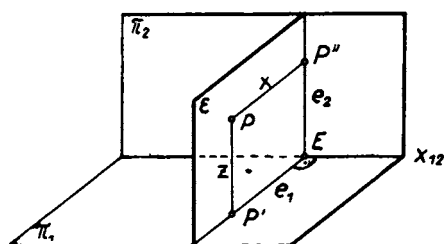


Fig. 59. Darstellung einer doppeltprojizierenden Ebene ε . Ihre beiden Spuren e_1 und e_2 sind normal zur Rißachse x_{12} .

16. Die Koinzidenzgerade oder Deckgerade einer Ebene

Die Schnittgerade einer beliebigen Ebene ε mit der Koinzidenzebene κ heißt die *Koinzidenzgerade* oder *Deckgerade* k dieser Ebene ε . Da der Knotenpunkt E der Ebene auf der Rißachse x_{12} liegt, durch die auch die Koinzidenzebene κ geht, verläuft die Koinzidenzgerade k stets durch den Knoten E der Ebene. Eine beliebige Gerade g der Ebene ε durchstößt die Koinzidenzebene κ in einem Punkte K , der ebenfalls der Koinzidenzgeraden k von ε angehört. Durch die Punkte E und K ist aber die Koinzidenzgerade k von ε schon eindeutig festgelegt. Weil sie in der Deckebene κ liegt, fallen Grund- und Aufriß der Deckgeraden k von ε miteinander zusammen: $k' = k''$.

Die Ebene ε sei durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben, die sich im Knoten E auf der Rißachse x_{12} schneiden (Fig. 60). Von der in ε gelegenen Geraden g kann man den Grundriß g' beliebig wählen: ihr Aufriß g'' ist über den Horizontalspurpunkt H und den Vertikalspurpunkt V zu konstruieren. Der Schnittpunkt von g' und g'' ist dann das zusammenfallende Bildpaar $K' = K''$

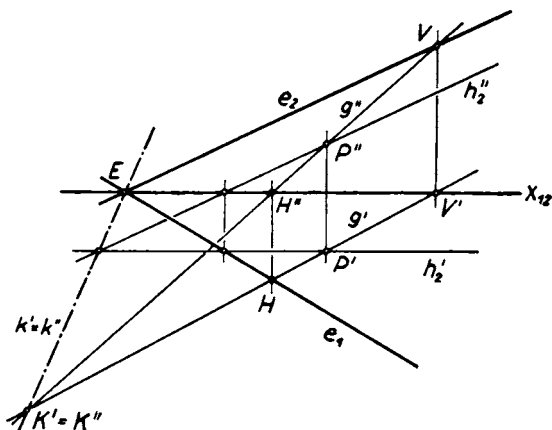


Fig. 60. Grund- und Aufriß einer (nichtprojizierenden) Ebene ε sind zueinander perspektiv affin mit dem zusammenfallenden Bildpaar $k' = k''$ der Deckgeraden k der Ebene als Affinitätsachse und den Ordnern als Affinitätsstrahlen

des Deckpunktes K der Geraden g . Grund- und Aufriß der Deckgeraden k der Ebene ε sind jetzt als zusammenfallende Verbindungsgeraden $k' = k''$ des Knotens E mit $K' = K''$ bestimmt.

Ist P ein beliebiger Punkt der Geraden g , dann liegt sein Grundriß P' auf g' , sein Aufriß P'' auf g'' . Nach Wahl des Grundrisses P' kann der Aufriß P'' des Punktes unabhängig von g in der bekannten Weise auch mit Hilfe etwa der zweiten Hauptlinie h_2 durch P konstruiert werden. Dabei müssen sich auch h_2' und h_2'' auf dem zusammenfallenden Bilde $k' = k''$ der Deckgeraden k schneiden, da h_2 der Ebene ε angehört.

Zwischen Grund- und Aufriß der Punkte P und Geraden g einer (nichtprojizierenden) Ebene ε gelten somit die folgenden Beziehungen:

1. Grund- und Aufriß eines beliebigen Punktes P der Ebene ε liegen auf einer festen Richtung, der Richtung der Ordnungslinien.
2. Grund- und Aufriß einer beliebigen Geraden g der Ebene treffen sich auf einer festen Geraden $k' = k''$, dem zusammenfallenden Bildpaar der Deckgeraden k der Ebene.

Dies sind aber die kennzeichnenden Eigenschaften einer perspektiven Affinität, d. h. es gilt der grundlegende

die Grundrißebene π_1 als horizontale Gerade, die Aufrißebene π_2 als vertikale Gerade und die Rißachse x_{12} als Punkt erscheinen. Durch normale Projektion des Punktes P auf die Aufrißebene π_2 entsteht der Aufriß P'' , durch normale Projektion von P auf die Grundrißebene π_1 der Grundriß (P') des Punktes P . Durch eine *Drehung* von 90° um die Rißachse x_{12} (oder durch eine gleichwertige schiefe Parallelprojektion unter 45° in Richtung der *Drehsehn* der Drehungskreise) entsteht daraus der *gedrehte Grundriß* P' des Punktes P (Fig. 62a).

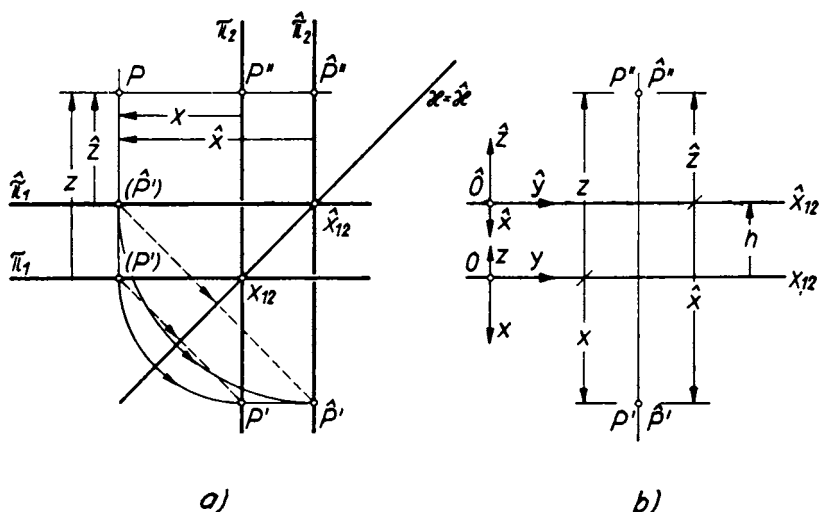


Fig. 62. Eine Parallelverschiebung der Rißachse x_{12} nach \hat{x}_{12} bedeutet eine bloße Parallelverschiebung der Grundrißebene und der Aufrißebene bei fester Deckebene π und ungeändertem Raumobjekt

Fig. 62b zeigt die Lage der Rißachse x_{12} und die der Punkte P' und P'' in der Zeichenebene $\pi = \pi_2$. Der Punkt P habe in einem mit π_1 und π_2 in der üblichen Weise verbundenen rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $P(x, y, z)$. Die Koordinate x erscheint dann in der Zeichenebene als Abstand des Punktes P' von der Rißachse x_{12} (positiv nach unten gezählt), die Koordinate z als Abstand des Punktes P'' von x_{12} (positiv nach oben gezählt).

Nun werde die Rißachse x_{12} in Fig. 62b um h nach oben parallel zu sich in die neue Lage \hat{x}_{12} gehoben, während die Lage von P' und P'' ungeändert bleibe. Die Grundrißebene π_1 wird dadurch in Fig. 62a gleichfalls um h in die Lage $\hat{\pi}_1$ gehoben. In welche neue Lage $\hat{\pi}_2$ ist nun die Auf-

rißebene π_2 zu verschieben, damit $\hat{P}' = P'$ und $\hat{P}'' = P''$ Grundriß und Aufriß des alten Raumpunktes P in bezug auf die neuen Rißtafeln $\hat{\pi}_1$ und $\hat{\pi}_2$ sind?

Denken wir uns das Koordinatensystem $O(x, y, z)$ in das neue mit $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ verankerte System $\hat{O}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ verschoben (Fig. 62b), und hat der Punkt P in diesem System die Koordinaten $P(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, so bestehen die Beziehungen

$$(1) \quad \hat{x} = x + h, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z - h.$$

Aus diesen Transformationsgleichungen folgt

$$(2) \quad \hat{x} + \hat{z} = x + z,$$

d. h.: Unabhängig von der Verschiebungsgröße h ist die Deckebene κ der Rißtafeln π_1, π_2 mit der Gleichung $x + z = 0$ identisch mit der Deckebene $\hat{\kappa}$ der neuen Rißtafeln $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2$ mit der Gleichung $\hat{x} + \hat{z} = 0$. Die neue Rißachse \hat{x}_{12} liegt also in der Deckebene κ der Rißtafeln π_1, π_2 ; die neue Aufrißtafel $\hat{\pi}_2$ liegt somit um dieselbe Entfernung h hinter π_2 wie die neue Grundrißtafel $\hat{\pi}_1$ über π_1 . Daraus folgt der

Satz 1: *Wird bei ungeänderter Lage des Grund- und Aufrißes eines Objektes die Rißachse x_{12} um eine Strecke h nach oben (oder unten) verschoben, dann bedeutet dies, daß*

1. *die Grundrißebene π_1 um h gehoben (bzw. gesenkt) wird,*
2. *die Aufrißebene π_2 um h nach hinten (bzw. vorn) verschoben wird, während*
3. *die Lagen der Deckebene κ und des Objektes im Raum ungeändert bleiben.*

Sind Grund- und Aufriß eines Objektes gegeben, so kann die Rißachse, ohne daß dadurch das Objekt im Raum beeinflußt wird, beliebig parallel verschoben werden. Bei vielen Konstruktionen (siehe z. B. Fig. 61) wird die Rißachse x_{12} überhaupt nicht benötigt, so daß man auf das Einzeichnen der Rißachse verzichten kann. Wird die Rißachse x_{12} jedoch benötigt, so kann man sie ohne Änderung des Raumobjektes in beliebiger Lage senkrecht zu der Ordnerichtung wählen. Man hat dadurch oft die Möglichkeit, durch geschickte Wahl der Rißachse die Konstruktion zu vereinfachen.

IV

Konstruktionsaufgaben im Grund- und Aufrißverfahren

18. Lagen- und Maßaufgaben. Dualitätsprinzip des Raumes

Die Darstellende Geometrie hat, wie einleitend beschrieben, nicht nur die (bisher allein erörterte) Aufgabe, vorhandene oder erdachte (dreidimensionale) Raumfiguren in einer (oder mehreren) Bildebenen darzustellen; sie hat darüber hinaus auch noch die Methoden zu entwickeln, die es gestatten, Fragen über diese Raumgebilde (z. B. über deren gegenseitige Lage, ihre Abmessungen, ihre Durchdringung usw.) durch exakte geometrische Konstruktion in den (zweidimensionalen) Bildern zu beantworten. *Neben die bloß abbildende Tätigkeit tritt so die konstruierende Tätigkeit der Darstellenden Geometrie*¹⁾. Erst beide zusammen gestatten dem Ingenieur und Geometer, den dreidimensionalen Raum wirklich auf dem zweidimensionalen Zeichenbrett vollkommen zu beherrschen.

Die Konstruktionsprobleme im Raum, deren Lösung im Grund- und Aufrißverfahren im folgenden in einer den Bedürfnissen des Ingenieurs angepaßten Auswahl besprochen wird, gliedern sich in zwei große Klassen, in Lagenaufgaben und in Maßaufgaben.

Für die Lagenaufgaben ist kennzeichnend, daß nach der gegenseitigen Lage zwischen den Grundelementen der räumlichen Geometrie, d. h. zwischen Punkten, Geraden und Ebenen gefragt wird. Bei Maßaufgaben dagegen werden metrische Eigenschaften gesucht, wie die Länge einer

¹⁾ ERWIN KRUPPA (geb. 1885 zu Biala), Schüler und Nachfolger von EMIL MÜLLER an der Technischen Hochschule in Wien, hat daher vorgeschlagen, den zu engen Namen *Darstellende Geometrie* durch den umfassenderen Namen *Konstruktive Geometrie* zu ersetzen. Das hat den Vorteil, viele aus der Darstellenden Geometrie erwachsene Zweige der Mathematik und ihrer Anwendungen (z. B. die graphische Statik, die Nomographie, die Photogrammetrie, die konstruktive Behandlung mehrdimensionaler Räume usw.) wieder unter einem einfachen Namen zu vereinigen. Man kann der Konstruktiven Geometrie überhaupt alle anschaulich-konstruktiven Methoden der reinen und angewandten Mathematik eingliedern. Ich habe jedoch (nicht zuletzt auch aus historischen Gründen) für diese Vorlesungen den hergebrachten Namen *Darstellende Geometrie* beibehalten, auch wenn er, wörtlich genommen, nur einen Teil des behandelten Gegenstandes deckt.

Strecke, die Größe eines Winkels oder der Flächeninhalt eines ebenen Flächenstückes.

Die *Lagenaufgaben* handeln nur von den Begriffen *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* und von gewissen zwischen diesen auszuführenden Operationen, nämlich den Operationen *Verbinden* und *Schneiden* sowie der Eigenschaft des *Inzidierens*. Geometrische Sätze, in denen nur die Begriffe *Punkt*, *Gerade*, *Ebene*, *Verbinden*, *Schneiden* und *Inzidieren* (d. h. *Ineinanderliegen* oder *Einanderangehören*) vorkommen, nennt man *Lagensätze*.

Diese Elemente und Operationen stehen sich in der *räumlichen Geometrie der Lage* nach dem folgenden Schema *dual* gegenüber

Punkt		Ebene
Ebene		Punkt
Gerade		
verbinden		schneiden
schneiden		verbinden
inzidieren.		

Punkt und *Ebene* sind demnach räumlich duale Elemente, ebenso die Operationen des *Verbindens* und *Schneidens*. Die *Gerade* und ebenso das *Inzidieren* entsprechen sich räumlich selbst dual. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck in dem folgenden

Dualitätsprinzip des Raumes: *Vertauscht man in einem richtigen Lagensatz der räumlichen Geometrie die Begriffe Punkt und Ebene sowie Verbinden und Schneiden, behält aber die Begriffe Gerade sowie Inzidieren bei, so ergibt sich wieder ein richtiger Satz der räumlichen Lagengeometrie. Dieser neue Satz heißt der zu dem ersten duale Satz.*

Ist ein Lagensatz bewiesen, dann folgt die Gültigkeit des dualen Satzes aus dem Dualitätsprinzip; er bedarf keines besonderen Beweises.

Einige Beispiele sollen dieses räumliche Dualitätsprinzip erläutern:

Satz

1. Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade, ihre Verbindungsgerade.
2. Drei Punkte, die keiner Geraden angehören, bestimmen eine Ebene, ihre Verbindungsebene.

Dualer Satz

- 1'. Zwei verschiedene Ebenen bestimmen eine Gerade, ihre Schnittgerade.
- 2'. Drei Ebenen, die keine Gerade gemeinsam haben, bestimmen einen Punkt, ihren Schnittpunkt.

3. Eine Gerade und eine Ebene haben einen Punkt gemeinsam, den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.
4. Zwei windschiefe Geraden a, b und ein Punkt P , der keiner dieser Geraden angehört, seien gegeben. Dann gibt es durch P genau eine Gerade t , die a und b trifft (*Treffgerade* t von P nach a und b). Denn a und P sowie b und P spannen zwei verschiedene Ebenen α und β auf, die sich in einer P enthaltenden Geraden t schneiden (Fig. 63a).
- 3'. Eine Gerade und ein Punkt haben eine Ebene gemeinsam, die Verbindungsebene der Geraden mit dem Punkt.
- 4'. Zwei windschiefe Geraden a, b und eine Ebene π , die keine dieser Geraden enthält, seien gegeben. Dann gibt es in π genau eine Gerade t , die a und b trifft (*Treffgerade* t in π von a und b). Denn a und π sowie b und π schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten A und B , die sich durch eine in π liegende Gerade t verbinden lassen (Fig. 63b).

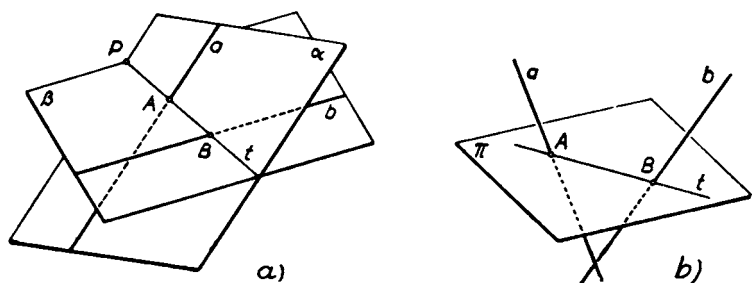


Fig. 63. Konstruktion der Treffgeraden t der beiden windschiefen Geraden a und b , welche
a) durch den Punkt P geht und dual b) in der Ebene π liegt

Bemerkung 1: Voraussetzung für die Gültigkeit des räumlichen Dualitätsprinzips ist, daß die Mannigfaltigkeit der ∞^3 eigentlichen (endlichen) Punkte des Raumes noch durch ∞^2 *uneigentliche Punkte* (*unendlichferne Punkte oder Fernpunkte*) abgeschlossen wird. Dabei soll gelten:

1. Parallele Geraden schneiden sich in demselben *Fernpunkt*.
2. Parallele Ebenen schneiden sich in derselben *Ferngeraden* (uneigentlichen Geraden), dem Träger der ∞^1 Fernpunkte aller Geraden dieser Ebenen.

3. Alle ∞^2 Fernpunkte des Raumes bilden eine Ebene, seine *Fernebene*, welche auch die ∞^2 Ferngeraden aller ∞^3 Ebenen des Raumes enthält.

In diesem (aus dem Raum der eigentlichen Punkte durch Hinzufügen der Fernpunkte entstehenden) projektiven Raum gilt dann jeder Lagensatz

in gleicher Weise für eigentliche wie für Fernpunkte. Z. B. bestimmen sowohl zwei (verschiedene) eigentliche, wie ein eigentlicher und ein Fernpunkt oder zwei (verschiedene) Fernpunkte stets eindeutig eine Verbindungsgerade des projektiven Raumes (im letzten Falle eine Ferngerade). Ebenso bestimmen sowohl zwei (verschiedene) eigentliche (nicht parallele oder parallele) Ebenen als auch eine eigentliche Ebene und die Fernebene eindeutig eine Schnittgerade (in den beiden letzten Fällen eine Ferngerade).

Bemerkung 2: In der *projektiven Ebene* (die neben den ∞^2 eigentlichen Punkten noch ∞^1 Fernpunkte trägt, die ihre Ferngerade bilden) enthält ein *Lagensatz* nur die Begriffe *Punkt*, *Gerade*, *Verbinden*, *Schneiden* und *Inzidentsein*. Durch Projektion auf eine andere (projektive) Ebene wird der Inhalt und Wortlaut eines Lagensatzes nicht geändert. *Lagensätze drücken also Sachverhalte aus, die bei Projektion unverändert bleiben, d. h. projektiv invariant sind.*

Man nennt daher Lagensätze auch *projektive Sätze* und bezeichnet nach JEAN VICTOR PONCELET (1822) den *Inbegriff aller projektiven Sätze* der Ebene als die *projektive Geometrie der Ebene*.

In der projektiven Ebene gilt dann das folgende, von J. V. PONCELET¹⁾ entdeckte:

Dualitätsprinzip der Ebene: *Aus jedem richtigen Lagensatz der Ebene erhält man wieder einen richtigen Lagensatz, wenn man in ihm die dualen Begriffe Punkt und Gerade sowie Verbinden und Schneiden vertauscht, den selbstdualen Begriff des Inzidierens aber ungeändert läßt.*

19. Erste Lagenaufgabe: Verbindungsebene von drei Punkten

Drei beliebige *Raumpunkte* A, B, C , die nicht auf einer Geraden liegen, also ein Dreieck bilden, spannen eine *Ebene* π auf. Die Punkte seien durch ihre Grundrisse A', B', C' und ihre Aufrisse A'', B'', C'' gegeben (Fig. 64). Die Rißachse denken wir uns in beliebiger Lage senkrecht zur Ordnerriß-

¹⁾ JEAN VICTOR PONCELET (geb. 1788 in Metz, gest. 1867 in Paris), einer der hervorragendsten Schüler von MONGE, hat, 1813 beim Rückzuge der Großen Armee in russische Gefangenschaft geraten, die Grundgedanken seiner „projektiven Geometrie“ in Saratow an der Wolga gefunden und später in seinem berühmten „*Traité des propriétés projectives des figures*“ (Paris 1822) dargestellt. PONCELET hat in diesem Werke das ebene Dualitätsprinzip auf dem Umweg über das Polarsystem der Kegelschnitte gefunden. Eine einfachere Herleitung aus den Grundsätzen der projektiven Geometrie fand dann 1824 JOSEPH DIAZ GERGONNE (geb. 1771 in Nancy, gest. 1859 in Montpellier). Zwischen den beiden Geometern herrschte wegen ihrer Entdeckung heftiger Prioritätsstreit.

tung, ohne sie einzuzichnen, da wir sie für die folgende Konstruktion nicht benötigen. Es entsteht die

Aufgabe 1: Von einem vierten Punkt P der Dreiecksebene π sei der eine Normalriß gegeben. Gesucht wird sein zugeordneter Normalriß.

1. Lösung: Man verbindet P mit einem Eckpunkt des Dreiecks durch eine Hilfsgerade h . Diese trifft die dem Eckpunkt gegenüberliegende Dreiecksseite in einem Punkte, dessen Risse auf einem Ordner liegen. Ist z. B. der Aufriß P'' von P gegeben, so verbindet man P'' mit B'' durch h'' und erhält als Schnitt mit $[A''C'']$ den Punkt $1''$. Durch seinen Grundriß $1'$ auf $[A'C']$ und den Punkt B' ist der Grundriß h' von h bestimmt. Auf h' und auf dem Ordner von P'' liegt dann der gesuchte Grundriß P' von P .

2. Lösung: Die gleiche Aufgabe läßt sich auch mit Hilfe der Deckgeraden k der Dreiecksebene π lösen. Grund- und Aufriß des Dreiecks (ABC) sind nach (16. Satz 1) zueinander perspektivaffin. Affinitätsrichtung ist dabei die Ordnerichtung, Affinitätsachse das Deckgeradenbild $k' = k''$

der Dreiecksebene. Schneidet man die Grundrisse und Aufrisse entsprechender Dreiecksseiten in den Punkten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , so liegen diese Punkte nach dem parallelprojektiven Satz von Desargues auf einer Geraden. Diese Desarguessche Achse ist das Bild $k' = k''$ der Deckgeraden k der Dreiecksebene π . Die drei Punkte \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} sind nämlich die zusammenfallenden Bilder der Deckpunkte der Dreiecksseiten und liegen daher auf dem Bilde $k' = k''$ der Deckgeraden k von π . Legt man, nachdem man die Deckgerade von π konstruiert hat, durch P eine beliebige Hilfsgerade h in der Dreiecksebene, so schneiden sich ihre Risse h' und h'' ebenfalls auf dem Bilde $k' = k''$ der Deckgeraden k . Ist z. B. der Aufriß P'' von P beliebig gegeben, so schneidet man die Hilfsgerade $h'' = [P''B'']$ mit dem Deckgeradenbilde im Punkt \S . Der Grundriß h' ist dann die Verbindungsgerade von \S mit B' . Auf ihm und auf dem Ordner von P'' liegt der gesuchte Grundriß P' des Punktes P .

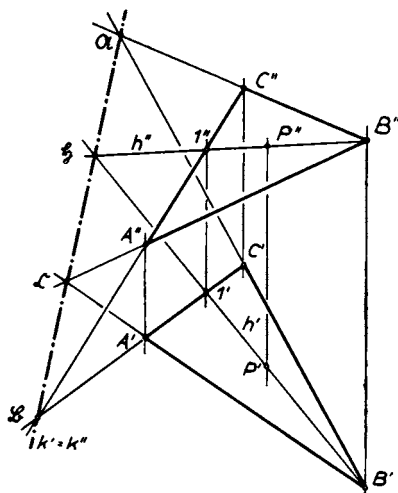


Fig. 64. Verbindungsebene ε der drei Punkte A, B, C . Vervollständigung der Risse der Ebene $\varepsilon = [A, B, C]$ mittels ihrer Deckgeraden

20. Zweite Lagenaufgabe: Schnittgerade zweier Ebenen

Aufgabe 2: Zwei Ebenen ε und φ seien durch ihre Spuren gegeben. Gesucht sind Grund- und Aufriß ihrer Schnittgeraden s .

Sind e_1, e_2 die Spuren der ersten Ebene ε , die sich im Knoten E auf der Rißachse x_{12} schneiden, f_1, f_2 die Spuren der zweiten Ebene φ mit dem Knoten F auf x_{12} , dann liegt der Schnittpunkt H von e_1 und f_1 in beiden Ebenen und zugleich in der Grundrißebene, d. h. H ist der Horizontal-spurpunkt der gesuchten Schnittgeraden s (Fig. 65). Entsprechend er-

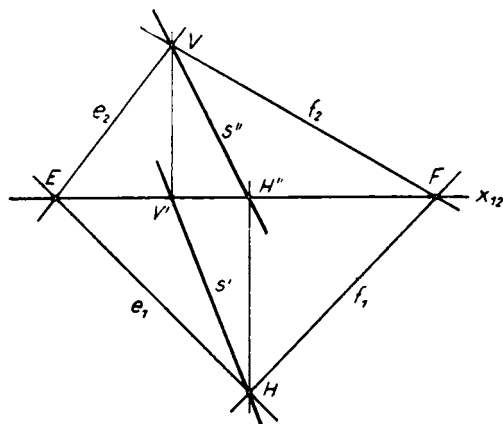


Fig. 65. Schnittgerade s zweier Ebenen ε und φ

scheint der Vertikalspurpunkt V von s als Schnittpunkt von e_2 und f_2 . Damit kennt man von s zwei Punkte. H'' liegt auf dem Ordner durch H und V' auf dem Ordner durch V auf der Rißachse x_{12} . Der Grundriß s' von s ist daher die Gerade $[HV']$, ihr Aufriß s'' die Gerade $[H''V]$.

Von besonderer Bedeutung ist der Sonderfall, daß eine der Ebenen auf einer Rißtafel senkrecht steht.

Ist die Ebene φ zweitprojizierend, also zur zweiten Rißtafel π_2 senkrecht, dann steht ihre erste Spur f_1 auf der Rißachse x_{12} senkrecht, während ihre zweite Spur f_2 zugleich der Aufriß φ'' der Ebene ist (Fig. 66). Der Aufriß

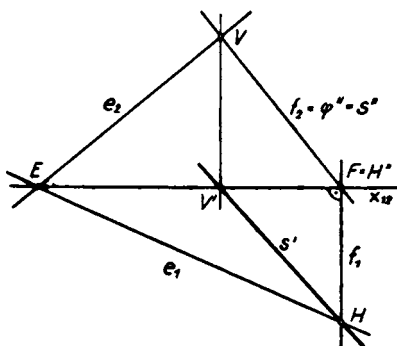


Fig. 66. Schnittgerade s der Ebene ε mit der zweitprojizierenden Ebene φ

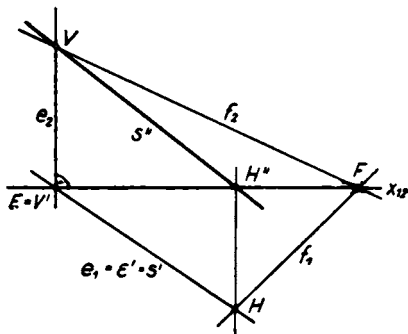


Fig. 67. Schnittgerade s der Ebene φ mit der erstprojizierenden Ebene ε

jeder in φ liegenden Geraden, also auch der Aufriß s'' der gesuchten Schnittgeraden s von ε und φ , deckt sich mit f_2 . Der Vertikalspurpunkt V von s ist der Schnittpunkt von e_2 und f_2 ; der Aufriß H'' des Horizontalspurpunktes H ist der Schnittpunkt von $s'' = f_2$ mit der Rißachse. Damit kennt man die Grundrisse V' auf x_{12} und $H' = H$ auf e_1 und damit auch den Grundriß $s' = [HV']$ der gesuchten Schnittgeraden s .

Ist die Ebene ε *erstprojizierend*, d. h. steht sie auf der ersten Rißtafel π_1 senkrecht, dann findet man Grund- und Aufriß ihrer Schnittgeraden s mit der beliebigen zweiten Ebene φ durch eine entsprechende Konstruktion (Fig. 67). Der Grundriß s' der Schnittgeraden s deckt sich mit der ersten Spur e_1 der Ebene ε , die mit dem Grundriß ε' von ε zusammenfällt ($e_1 = \varepsilon' = s'$).

21. Dritte Lagenaufgabe: Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Aufgabe 3: Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene ε . Gesucht ist der Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene ε (Durchstoßpunkt von g durch ε , Spurpunkt von g auf ε).

Lösung: Zur Lösung dieser Aufgabe führt der folgende Grundgedanke: Durch die Gerade g , deren Schnittpunkt S mit der Ebene ε gesucht wird, legt man eine beliebige Hilfsebene φ . Diese Hilfsebene schneidet ε in einer Geraden s . Der Schnittpunkt von g mit s ist dann der gesuchte Durchstoßpunkt S der Geraden g durch die Ebene ε (Fig. 68a). Das Problem wird demnach zurückgeführt auf die zuvor behandelte Aufgabe, die Schnittgerade zweier Ebenen zu bestimmen.

Die Ebene ε sei durch ihre beiden Spuren e_1 und e_2 gegeben, die Gerade g durch ihren Grundriß g' und Aufriß g'' (Fig. 68b). Als Hilfsebene φ durch g

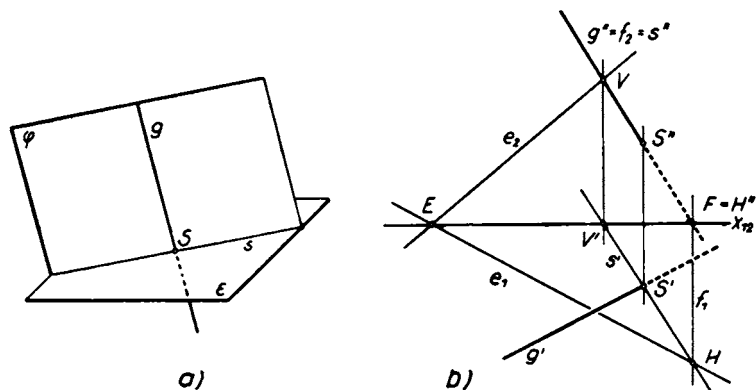


Fig. 68. Schnittpunkt (Spurpunkt, Durchstoßpunkt) S einer Geraden g mit einer Ebene ε , die durch ihre Spuren (e_1, e_2) gegeben ist

wählt man zweckmäßigerweise eine projizierende Ebene, z. B. die zweitprojizierende Ebene durch g . Ihre Aufrißspur f_2 fällt mit g'' zusammen, ihre Grundrißspur f_1 steht im Knoten F auf der Rißachse x_{12} senkrecht. Der Schnittpunkt von e_1 und f_1 ist der Horizontalspurpunkt H der Schnittgeraden s von ε und φ , der Schnittpunkt von e_2 und $f_2 = g''$ der Vertikalspurpunkt V von s . H'' und V' sind durch die Ordner festgelegt. Die Gerade $[H''V] = g''$ ist daher der Aufriß s'' von s (er fällt mit g'' zusammen, da s und g Geraden der zweitprojizierenden Ebene φ sind), während $[HV']$ ihren Grundriß s' darstellt. Der Grundriß S' des gesuchten Durchstoßpunktes S von g durch ε ist jetzt der Schnittpunkt von s' mit g' , sein Aufriß S'' liegt auf dem zugehörigen Ordner auf $s'' = g''$.

Statt der zweitprojizierenden Ebene durch g hätte man sich ebensogut der erstprojizierenden Ebene φ durch g bedienen können. Die Konstruktion verläuft entsprechend; man hat lediglich die Rollen von Grundriß und Aufriß zu vertauschen. Unter den beiden Konstruktionsmöglichkeiten wird man sich jeweils für jene entscheiden, die mit besseren Schnitten arbeitet und daher genauer ist.

Ist die Ebene ε durch zwei beliebige in ihr liegende Geraden u und v gegeben, so läßt sich der Spurpunkt S der Geraden g auf der Ebene ε unmittelbar konstruieren, ohne zuvor die Spuren der Ebene zu ermitteln. Die Rißachse x_{12} muß daher nicht verwendet werden. Man legt dazu durch g wieder eine beliebige Hilfsebene φ (Fig. 69a); diese schneidet die Gerade u in einem Punkte 1, die Gerade v in einem Punkte 2. Die Gerade $[12]$ ist

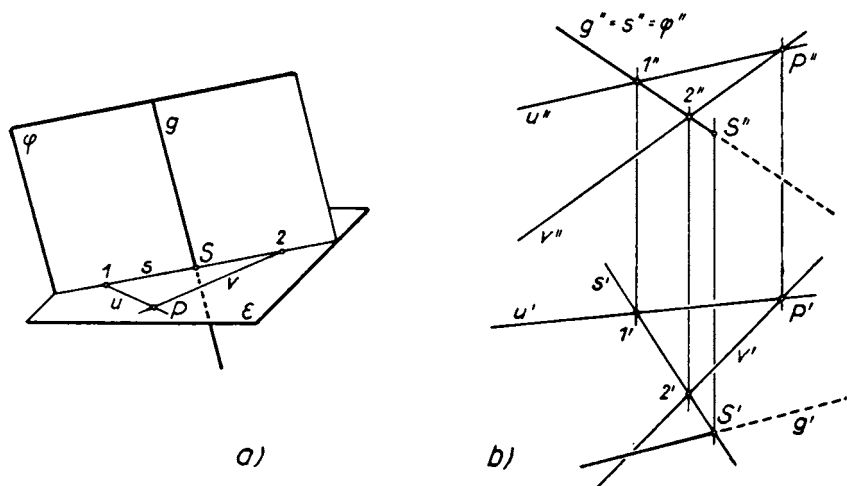


Fig. 69. Schnittpunkt S einer Geraden g mit einer Ebene ε , die durch zwei schneidende Geraden (u, v) aufgespannt ist

dann die Schnittgerade s von ε und φ , und der gesuchte Durchstoßpunkt S ist der Schnittpunkt von s und g .

Wählt man als Hilfsebene φ wieder die zweitprojizierende Ebene durch g , dann deckt sich ihr Aufriß φ'' und ebenfalls der Aufriß s'' der Schnittgeraden s von ε und φ mit g'' (Fig. 69b). Die Schnittpunkte 1 und 2 von s mit u bzw. v erscheinen daher im Aufriß als Schnitte $1''$ und $2''$ von $s'' = g''$ mit u'' bzw. v'' , während ihre Grundrisse $1'$, $2'$ auf u' bzw. v' durch Ordner gefunden werden. Der Grundriß $s' = [1'2']$ trifft dann g' im Grundriß S' des gesuchten Durchstoßpunktes S ; sein Aufriß S'' liegt auf dem Ordner von S' auf g'' .

Durch mehrmaliges Anwenden der soeben besprochenen Lagenaufgabe löst man auch die

Aufgabe 4: Die Durchdringung zweier Dreiecke zu konstruieren.

Sind die beiden Dreiecke (ABC) und (DEF) durch Grund- und Aufriß gegeben (auf die Rißachse kann wieder verzichtet werden), so schneiden sich die beiden Dreiecksebenen in einer Geraden s . Das Stück von s , das im Innern beider Dreiecke liegt, ist die Kante, in der sich die Dreiecke durchdringen.

Die Gerade s ist bestimmt, sobald zwei Punkte auf ihr bekannt sind. Solche Punkte sind z. B. die Durchstoßpunkte S und T der Dreiecksseiten $[DE]$ bzw. $[DF]$ durch die Ebene $[ABC]$ des ersten Dreiecks (ABC) . Diese Punkte S und T lassen sich aber nach der dritten Lagenaufgabe konstruieren. In Fig. 70 wurde dazu als *Hilfsebene* jeweils die *erstprojizierende Ebene* durch $[DE]$ bzw. $[DF]$ gelegt und mit der Ebene $[ABC]$ des Dreiecks (ABC) geschnitten. Der Durchstoßpunkt T der Seite $[DF]$ liegt im Innern beider Dreiecksflächen, ist also bereits ein Endpunkt der Verschneidungsstrecke. Der Durchstoßpunkt S der Seite $[DE]$ dagegen liegt außerhalb der Dreiecksfläche (ABC) . Die Verschneidungsstrecke endet daher

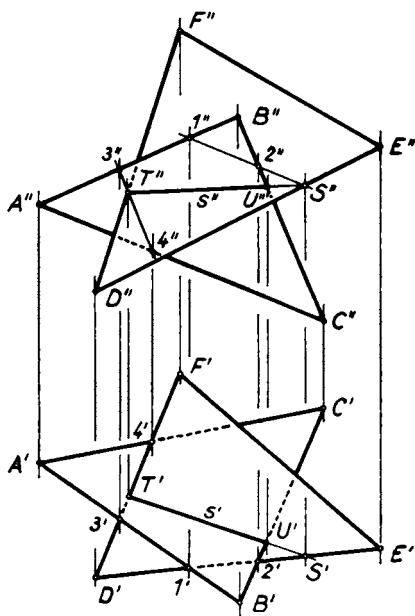


Fig. 70. Durchdringung zweier Dreiecke (A, B, C) und (D, E, F) . Entscheidung der Sichtbarkeitsverhältnisse

bereits in dem Punkt U , in dem s die Dreiecksseite $[BC]$ trifft. Grund- und Aufriß von U müssen dabei auf einem Ordner liegen. Durch Auflösen der Kreuzungspunkte zwischen den Seiten der beiden Dreiecke im anderen Riß wird die *Sichtbarkeit* der Figur im Grund- und Aufriß geklärt. Sichtbare Strecken werden voll, unsichtbare Strecken werden gestrichelt ausgezogen.

Die beiden Dreiecke $(A'B'C')$ und $(A''B''C'')$ haben in Fig. 70 *verschiedene Umlaufsinne*; daher sind im Grund- und Aufriß *verschiedene Seiten der Dreiecksebene $[ABC]$ sichtbar*.

Die beiden Dreiecke $(D'E'F')$ und $(D''E''F'')$ haben dagegen *gleiche Umlaufsinne*; daher ist im Grund- und Aufriß *dieselbe Seite der Dreiecksebene $[DEF]$ sichtbar*.

22. Einführung einer neuen Rißtafel. Seitenriß und Kreuzriß

Oft befindet sich das darzustellende Objekt zur Grundrißebene π_1 und zur Aufrißebene π_2 in einer für die Konstruktion ungünstigen Lage. Andererseits sind die Risse des Objektes bei spezieller Lage zu den Rißtafeln häufig wenig anschaulich. In beiden Fällen kann man sich durch Einführen einer oder mehrerer *neuer Rißtafeln* helfen, *deren Lage den jeweiligen Erfordernissen angepaßt ist*. Wird die neue Rißtafel in günstiger Lage zum Objekt gewählt, so vereinfachen sich durch diese *Umprojektion* die auszuführenden Konstruktionen. Wird sie in allgemeiner Lage angenommen, so erhält man einen anschaulich wirkenden Normalriß des Objektes. Grundsätzlich hat man dabei aber darauf zu achten, daß die beiden als *neue Rißtafeln* gewählten Bildebenen *aufeinander senkrecht* stehen, um ein *neues Paar zugeordneter Normalrisse* zu erhalten.

Behält man die Grundrißebene π_1 bei und ersetzt die Aufrißebene π_2 durch eine neue Bildebene π_3 , dann muß π_3 zusammen mit π_1 ein neues System orthogonaler Rißtafeln bilden. Die neue Bildebene π_3 muß daher senkrecht zur Grundrißebene π_1 gewählt werden, während sie gegen die Aufrißebene unter beliebigem Winkel geneigt sein kann. Die Aufrißebene wird dann nicht mehr benötigt und kann weggelassen werden. Selbstverständlich kann man auch die Grundrißebene π_1 wegfällen lassen und die neue Bildebene orthogonal an die Aufrißebene π_2 anhängen. Die Überlegungen sind dann *mutatis mutandis* die gleichen. Jede derartige sich an die Grundrißebene oder an die Aufrißebene anschließende *neue Bildebene π_3* heißt *Seitenrißebene* und die Normalprojektion (Umprojektion) des Objektes auf sie ein *Seitenriß* des Objektes.

An die Seitenrißebene π_3 läßt sich, wenn nötig, eine zweite *Seitenrißebene* π_4 anhängen, wobei π_4 auf π_3 senkrecht stehen muß. Dadurch gelangt man zu einem völlig neuen, von der Grundrißebene und Aufrißebene unabhängigen orthogonalen Tafelsystem π_3, π_4 . Der zweite Seitenriß in π_4 ist dabei die Normalprojektion des Objektes auf die zweite Seitenrißebene π_4 . Ist die Lage von π_4 vorgeschrieben, so ist die erste Seitenrißebene π_3 so zu wählen, daß π_3 sowohl auf π_1 (bzw. π_2) als auch auf π_4 senkrecht steht.

Wir erläutern das beim *Einführen einer neuen Rißtafel (Umprojizieren)* anzuwendende Verfahren in dem Falle, daß an die Grundrißebene π_1 eine *Seitenrißebene* π_3 angeschlossen wird, während die *Aufrißebene* π_2 weggfallen soll. Die neue Rißtafel π_3 muß dabei eine beliebige erstprojizierende Ebene sein. Ihre beliebig wählbare Grundrißspur ist dann die *neue Rißachse* x_{13} für das von π_1 und π_3 gebildete neue orthogonale Tafelsystem.

Ist in π_1 die neue Rißachse x_{13} und damit die zu π_1 normale Seitenrißebene π_3 gewählt (Fig. 71a), dann ist der *Seitenriß* (P''') eines beliebigen

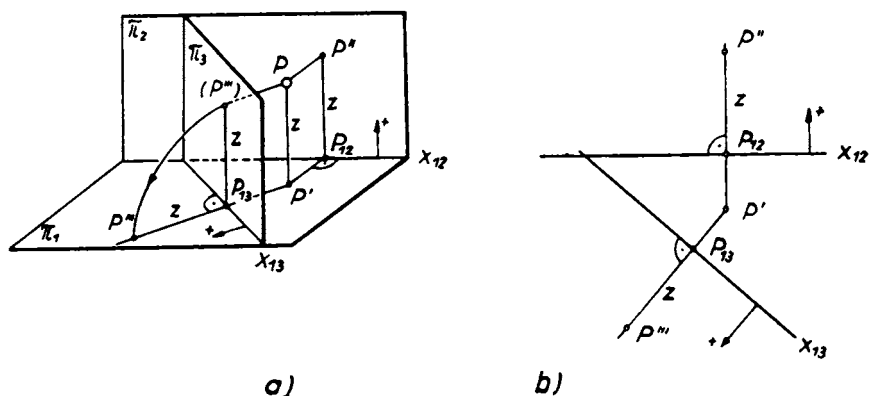


Fig. 71. Einführung eines Seitenrisses (dritten Risses) auf die erstprojizierende Seitenrißebene π_3 . Die neuen Koten $z = P_{13}, P'''$ sind gleich den wegfallenden Koten $z = P_{12}, P''$

Raumpunktes P der Fußpunkt des Lotes von P auf π_3 . Dreht man die Seitenrißebene π_3 um die neue Rißachse x_{13} nach der einen oder nach der anderen Seite in die (als Zeichenebene anzusehende) Grundrißebene π_1 hinein, so gelangt der Punkt (P''') in den *gedrehten Seitenriß* P''' , den wir weiterhin ebenfalls kurz als *Seitenriß* P''' des Punktes P bezeichnen. Da die Ebene des Bahnkreises, den der Punkt (P''') bei dieser Drehung beschreibt, auf x_{13} senkrecht steht, liegt der Seitenriß P''' mit dem Grundriß P' von P auf einem Lot zur neuen Rißachse x_{13} . Die Höhenkote z des Punktes P wiederholt sich als Abstand des Punktes (P''') und

damit auch des Punktes P''' von der Rißachse x_{13} , da

$$(1) \quad z = PP' = P''P_{12} = (P''')P_{13} = P'''P_{13}$$

ist. Der Seitenriß P''' hat also von der neuen Rißachse x_{13} den gleichen Abstand wie der Aufriß P'' von der alten (wegfallenden) Rißachse x_{12} .

Damit ist folgende einfache *Regel für die Konstruktion des Seitenrisses (das Umprojizieren) eines Punktes P* , dessen Grund- und Aufriß gegeben sind, bewiesen (Fig. 71 b).

Regel: Wird durch Wahl der neuen Rißachse x_{13} an die Grundrißebene π_1 eine Seitenrißebene π_3 angehängt, so gilt:

1. Grundriß P' und Seitenriß P''' eines Raumpunktes P liegen auf einem Lot zur neuen Rißachse x_{13} (nämlich auf der Ordnerrichtung zwischen Grundriß und Seitenriß).
2. Der Abstand des neuen Risses von der neuen Rißachse ist gleich dem Abstand des wegfallenden Risses von der wegfallenden Rißachse.

Die Seitenrißebene π_3 kann nach der einen oder anderen Seite um die neue Rißachse x_{13} in die Grundrißebene π_1 hineingedreht werden. Für das räumliche Objekt ergibt sich dabei je nach der Wahl der Drehrichtung eine Ansicht von der einen oder der anderen Seite. Um die Drehrichtung festzulegen, bringt man an der alten Rißachse x_{12} und an der neuen Rißachse x_{13} je einen *Pfeil* an, der jeweils *nach der Seite positiver z -Koten* weist. Ein Punkt, dessen Aufriß auf dem positiven (negativen) Ufer der alten Rißachse x_{12} liegt, hat dann seinen Seitenriß auf dem positiven (negativen) Ufer der neuen Rißachse x_{13} .

Wir greifen als Anwendung nochmals die *Lagenaufgabe: Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene ε* auf, die wir jetzt mit Hilfe einer Seitenrißebene lösen wollen. Die Ebene ε sei durch ihre Spuren e_1, e_2 , die Gerade g durch ihren Grundriß g' und ihren Aufriß g'' gegeben (Fig. 72). Als Seitenrißebene π_3 wählen wir eine solche Ebene, die zugleich auf der Grundrißebene π_1 und auf der Ebene ε senkrecht steht. Die *neue Rißachse x_{13}* muß dann *senkrecht zur Horizontalspur e_1 der Ebene ε* angenommen werden. Die *Seitenrißspur oder dritte Spur e_3 von ε* ergibt sich durch Übertragen des Knotens E und eines beliebigen Punktes W von e_2 in den Seitenriß (E''' liegt auf x_{13} und W''' in der Höhe z über x_{13}); e_3 ist zugleich der Seitenriß ε''' der Ebene ε , da ε eine *drittprojizierende Ebene* ist. Der Seitenriß g''' der Geraden g ist wieder eine Gerade; g''' ergibt sich dadurch, daß man zwei Punkte von g , etwa ihren Horizontalspurpunkt H und einen beliebigen Punkt P in den Seitenriß überträgt (H''' liegt auf x_{13} und P''' in derselben Höhe über x_{13} wie P'' über x_{12}). Im Seitenriß

erscheint nun der gesuchte Durchstoßpunkt S unmittelbar als Schnitt von g''' mit $e_3 = \varepsilon'''$. Seinen Grundriß S' und seinen Aufriß S'' findet man, wenn man in Ordnerichtung auf g' bzw. g'' zurückgeht. Außerdem muß S'' von x_{12} denselben Abstand haben wie S''' von x_{13} (Kontrolle!).

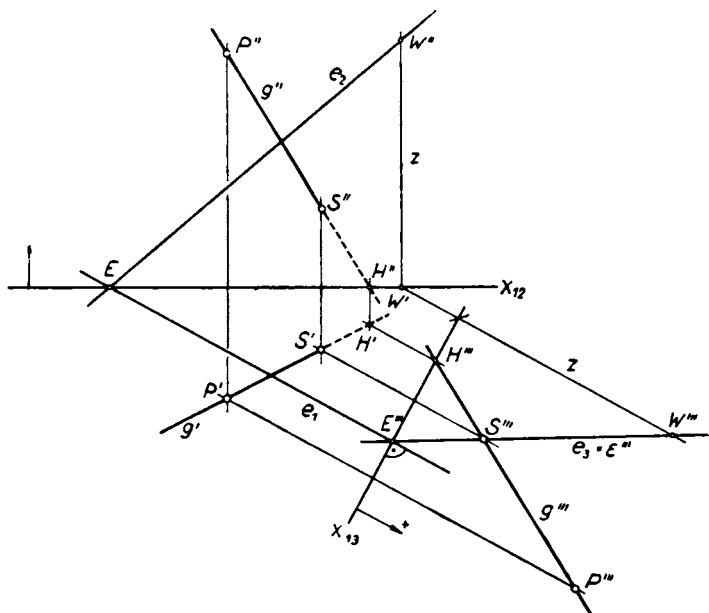


Fig. 72. Konstruktion des Schnittpunktes S einer Geraden g mit einer Ebene ε mit Hilfe einer erstprojizierenden zu ε normalen Seitenrißebene π_3 . Die neue Rißachse x_{13} ist normal zur ersten Spur e_1 der Ebene ε .

Diese Lösung der Aufgabe ist offensichtlich umständlicher als die in 21. besprochene, die ohne Seitenriß arbeitet. Sie ist jedoch dann empfehlenswert, wenn man mehrere Geraden mit derselben Ebene ε zu schneiden hat.

Von besonderer Bedeutung ist der *spezielle Seitenriß*, der durch *Normalprojektion auf eine doppeltprojizierende Ebene* π_3 entsteht. Dazu hat man die Seitenrißebene π_3 so z. B. an die Aufrißebene π_2 anzuschließen, daß die neue Rißachse x_{23} auf der alten Rißachse x_{12} senkrecht steht (Fig. 73). Dieser spezielle Seitenriß, dessen Projektionsrichtung zu x_{12} parallel ist, heißt *Kreuzriß* des Objektes.

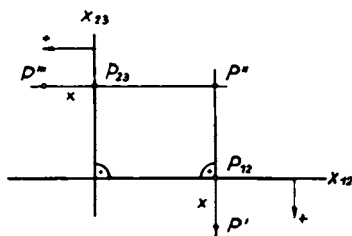


Fig. 73. Einführung eines Kreuzrisses (Seitenriß, dessen Ebene π_3 normal zur Rißachse x_{12} ist, und der entweder an π_1 oder an π_2 angeschlossen wird)

23. Erste Maßaufgabe: Wahre Länge einer Strecke

Zwei beliebige Raumpunkte A, B seien in Grund- und Aufriß gegeben. Gesucht wird der Abstand der Punkte A und B , d. h. die *wahre Länge* l der Strecke AB .

Die Strecke $l = AB$ ist (Fig. 74a) Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck (ABC), dessen eine Kathete BC gleich dem Grundriß l' der Strecke l ist, während die zweite Kathete CA gleich der Differenz Δz der Höhenkoten der Punkte A und B ist.

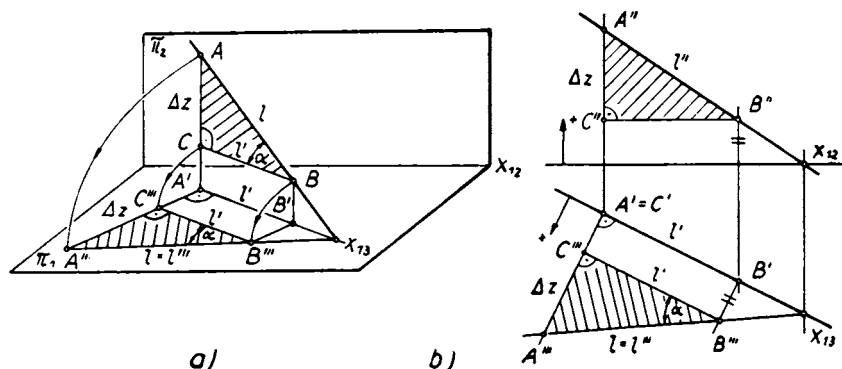


Fig. 74. Konstruktion der wahren Länge l einer Strecke AB mittels Seitenriß des Stützdreiecks (ABC)

Dieses *Stützdreieck* (ABC) liegt in der durch die Strecke AB bestimmten erstprojizierenden Ebene, die man als eine an die Grundrißebene π_1 angehängte Seitenrißebene π_3 betrachten kann. Klappt man π_3 um die neue Rißachse x_{13} , die sich mit dem Grundriß $[A'B']$ der Raumgeraden $[AB]$ deckt, in die Grundrißebene π_1 um, dann erscheint das *Stützdreieck* (ABC) in diesem Seitenriß *in wahrer Größe* (Fig. 74 b). Der Seitenriß $A'''B''' = l'''$ gibt daher die *wahre Länge* l der Strecke AB . Zugleich erhält man in dem Winkel α zwischen $[A'''B''']$ und der Rißachse x_{13} den *Neigungswinkel* α der Geraden $[AB]$ gegen die Grundrißebene π_1 .

Durch geschickte Wahl der Rißachse x_{12} läßt sich die Konstruktion noch vereinfachen. Legt man nämlich die Rißachse x_{12} durch B'' , so erhält man die in Fig. 75 dargestellte einfachere Konstruktion für die wahre Länge l der Strecke AB und ihres Neigungswinkels α gegen die Grundrißebene π_1 .

Ein zweites noch bequemerer Verfahren zur Bestimmung der *wahren Länge einer Strecke* ist die *Drehkonstruktion von Monge*. Das Stütz-

dreieck (ABC), dessen Seite AB die gesuchte wahre Länge l der Strecke AB angibt, wird um die lotrechte Achse $[AA']$ gedreht, bis es zur Aufrißebene parallel ist (Fig. 76a). Während der Punkt A als Punkt der Drehachse dabei festbleibt, wandert der Endpunkt B auf einem Kreisbogen in einer horizontalen Ebene in die Lage B_0 . Der Drehungskreis erscheint im Grundriß als Kreis um A' mit dem Radius $l' = A'B'$, im Aufriß als eine zur Rißachse parallele Strecke durch B'' (Fig. 76b). Die Endlage der Drehung ist dadurch bestimmt, daß die gedrehte Strecke AB_0 zur Aufrißebene π_2 , ihr Grundriß $A'B'_0$ also zur Rißachse x_{12} parallel ist. Der Aufriß B''_0 des gedrehten Punktes B_0 liegt auf dem Ordner durch B'_0 . Die parallelgedrehte Strecke $A''B''_0 = l''_0 = l_0$ ist dann die wahre Länge $l = l_0$ der Strecke AB . Außerdem stellt der Winkel α zwischen den Seiten $[A''B''_0]$ und $[C''B''_0]$ den Neigungswinkel α der Geraden $[AB]$ gegen die Grundrißebene π_1 dar. Die Paralleldrehung ($A''B''_0C''$) gibt die wahre Gestalt des Stützdreiecks (ABC) wieder.

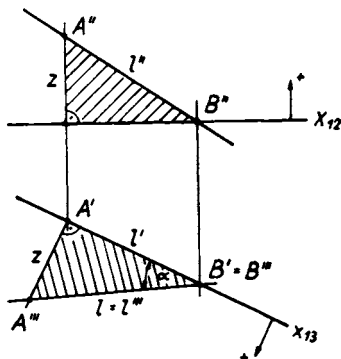


Fig. 75. Konstruktion der wahren Länge l einer Strecke AB mittels Seitenriß des Stützdreiecks bei geschickter Wahl der Rißachse x_{12}

Natürlich kann man die Strecke AB auch um eine zur Aufrißebene senkrechte Achse in eine zur Grundrißebene parallele Lage drehen. Die wahre Länge der Strecke AB ist dann aus dem Grundriß der gedrehten Strecke zu entnehmen, aus dem auch der Neigungswinkel β der Geraden $[AB]$ gegen die Aufrißebene hervorgeht.

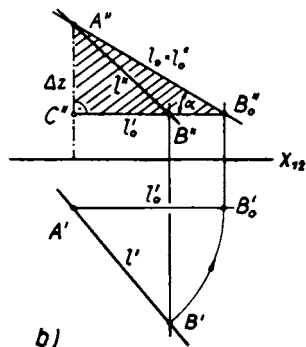
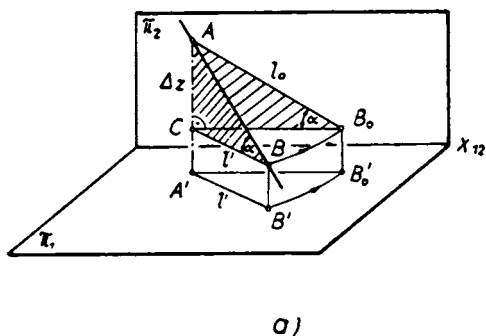


Fig. 76. Konstruktion der wahren Länge l einer Strecke AB nach MONGE durch Paralleldrehen des Stützdreiecks (ABC) zur Aufrißebene

24. Zweite Maßaufgabe: Abstand eines Punktes von einer Ebene

Der Abstand l eines Punktes P von einer Ebene ε ist als senkrechter Abstand (Lotabstand l) von P und ε erklärt und auf der durch den Punkt P gelegten Normalen n auf die Ebene ε zu messen. Demnach gliedert sich die Lösung der Aufgabe in drei Schritte:

1. die Normale n von P auf die Ebene ε zu fällen,
2. den Fußpunkt F dieser Normalen n in ε zu ermitteln und
3. die wahre Länge des Lotes $l = PF$ zu bestimmen.

Die Normale n zu ε durch P steht auf ε senkrecht; ihr Grundriß n' ist deshalb zur Grundrißspur e_1 , ihr Aufriß n'' zur Aufrißspur e_2 der Ebene ε senkrecht.

Die beiden folgenden Konstruktionsschritte 2. und 3. können nun entweder unmittelbar im Grund- und Aufriß oder auch durch Einführung einer Seitenrißebene durchgeführt werden.

Besprechen wir zunächst das erste Konstruktionsverfahren. Grundriß F' und Aufriß F'' des Fußpunktes (Spurpunktes) F , in dem die Normale

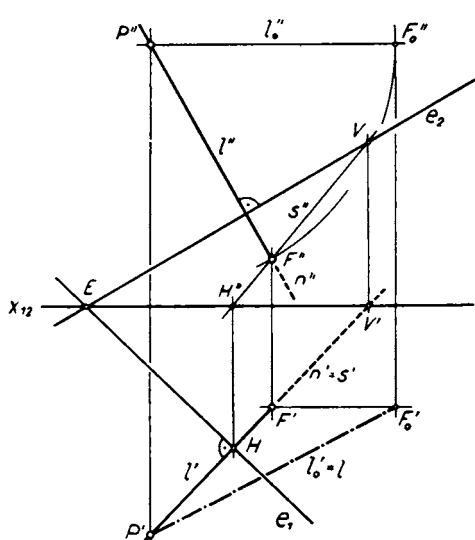


Fig. 77. Konstruktion des Lotabstandes l eines Punktes P von der Ebene ε

n die Ebene ε durchstößt, sind nach der dritten Lagenaufgabe (Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene) wie in 21. zu konstruieren. In Fig. 77 ist dazu die erstprojizierende Ebene durch n gelegt, welche die Ebene ε in einer Geraden s schneidet, deren Horizontalspurpunkt H und Vertikalspurpunkt V im Grundriß unmittelbar zu ersehen sind. Aus ihnen gewinnt man den Aufriß H'' bzw. $V'' = V$ und mit $[H''V] = s''$ den Aufriß der Schnittgeraden s . Der Schnittpunkt von s'' und n'' ist der Aufriß F'' des gesuchten Lotfußpunktes F ,

während sein Grundriß F' auf dem Ordner von F'' auf n' liegt.

Die wahre Länge l des Lotes PF kann schließlich nach MONGE durch Paralleldrehen der Strecke PF ermittelt werden. In Fig. 77 ist die Strecke $l = PF$ um die zur Aufrißebene π_2 normale Achse durch P'' so lange ge-

dreht worden, bis sie zur Grundrißebene π_1 parallel (horizontal) wird. Der Lotfußpunkt F wandert dabei auf einem Kreise, dessen Ebene zu π_2 parallel ist. Sein Aufriß F'' beschreibt also einen Kreis mit der Mitte P'' , und sein Grundriß F' eine zur Rißachse x_{12} parallele Gerade. In der gedrehten Lage l_0 hat das Lot den horizontalen Aufriß $l'_0 = P''F'_0$, und sein Grundriß $l'_0 = P'F'_0$ gibt die gesuchte *wahre Länge des Lotabstandes* $l = PF$ von P und ε .

Will man dieselbe Aufgabe durch Umprojizieren mit Hilfe eines *Seitenrisses* lösen, so führt man die erstprojizierende Ebene durch n , in der das gesuchte Lot l liegt, als Seitenrißebene π_3 ein.

Die neue Rißachse x_{13} deckt sich mit dem Grundriß n' der Normalen n (Fig. 78). Da die Ebene ε dann auf der Seitenrißebene π_3 senkrecht steht,

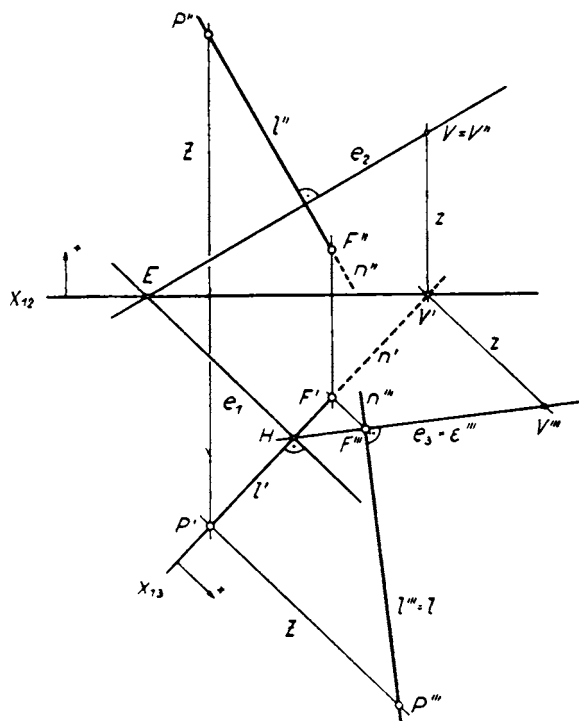


Fig. 78. Konstruktion des Lotabstandes l eines Punktes P von der Ebene ε durch Umprojizieren mit Hilfe eines Seitenrisses

also drittprojizierend ist, ist ihre dritte Spur e_3 zugleich der Seitenriß ε''' von ε . Diese Seitenrißspur e_3 verläuft durch den neuen Knoten H

(Schnittpunkt von e_1 und x_{13}). Um sie festzulegen, genügt es, einen weiteren beliebigen Punkt der Ebene ε , etwa den in der Aufrißebene gelegenen Punkt $V = V''$, dessen Grundriß V' der Rißachse x_{12} angehört, in die Seitenrißebene zu übertragen. Der Seitenriß V''' liegt mit V' auf einem Ordner senkrecht zu x_{13} und hat von x_{13} den gleichen Abstand z wie der Aufriß V'' von x_{12} . Verschafft man sich nach dem gleichen Konstruktionsverfahren den Seitenriß P''' des Punktes P , dann ist der Seitenriß n''' der Normalen n das Lot von P''' auf $e_3 = \varepsilon'''$. Sein Schnittpunkt mit e_3 ist der Seitenriß F''' des Lotfußpunktes F , und die Strecke $P'''F'''$ ist der gesuchte Abstand l des Punktes P von der Ebene ε . Seinen Grundriß $l' = P'F'$ und seinen Aufriß $l'' = P''F''$ findet man jetzt sehr einfach durch Rückübertragen des Punktes F aus dem Seitenriß in den Grundriß und Aufriß von n mit Hilfe von Ordnern.

25. Dritte Maßaufgabe: Abstand eines Punktes von einer Geraden

Der Abstand l eines Punktes P von einer Geraden g ist auf der zu g normalen Geraden durch P zu messen. Diese Gerade (Lot l von P auf g) liegt in jener Normalebene ν zu g , welche den Punkt P enthält (Fig. 79a).

Die räumliche Lösung der

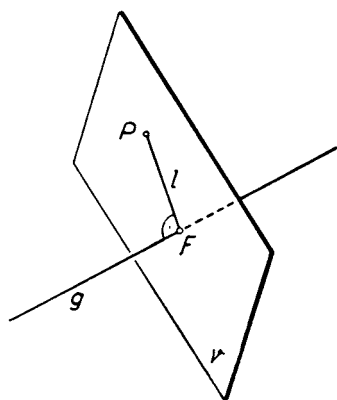


Fig. 79a. Konstruktion des Lotabstandes l eines Punktes P von einer Raumgeraden g (Erläuterung)

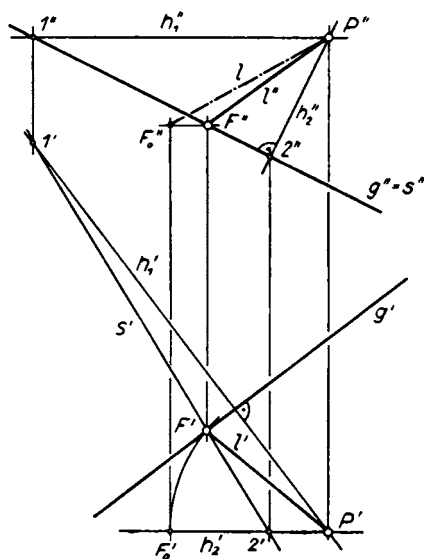


Fig. 79b. Konstruktion des Lotabstandes l eines Punktes P von einer Raumgeraden g (Durchführung)

Aufgabe geschieht daher in den folgenden drei Schritten:

1. Konstruktion der Normalebene ν zu g durch P ,

2. Konstruktion des Fußpunktes F des Lotes von P auf g als Durchstoßpunkt von g durch v ,
3. Konstruktion der wahren Länge des Lotes $l = PF$ von P auf g .

Die Normalebene v steht auf der Geraden g senkrecht und enthält den Punkt P . Die Grundrißspur und damit auch der Grundriß h'_1 jeder ersten Spurparallelen h_1 der Normalebene v steht daher auf dem Grundriß g' der Geraden g senkrecht, und ebenso ist die Aufrißspur und der Aufriß h''_2 jeder zweiten Spurparallelen h_2 von v zum Aufriß g'' der Geraden g senkrecht. Daher kann man Grund- und Aufriß der beiden durch P verlaufenden Hauptlinien h_1, h_2 sofort angeben: h'_1 verläuft durch P' senkrecht zu g' , h''_1 durch P'' parallel zur (weggelassenen) horizontalen Rißachse x_{12} ; h''_2 verläuft durch P'' senkrecht zu g'' , h'_2 durch P' parallel zu x_{12} .

Der Fußpunkt F des Lotes von P auf g kann nun entweder unmittelbar in Grund- und Aufriß oder mit Hilfe einer Seitenrißebene gefunden werden. Im ersten Fall hat man den Schnittpunkt F der Geraden g mit der durch h_1 und h_2 festgelegten Ebene v zu konstruieren (zweite Lagenaufgabe). In Fig. 79b ist dazu durch g die zweitprojizierende Hilfsebene φ gelegt. Die Punkte 1 und 2, deren Aufrisse $1''$ und $2''$ die Schnittpunkte von g'' mit h''_1 bzw. h''_2 sind, sind zwei Punkte der Schnittgeraden s der Ebenen v und φ . Ihre Grundrisse $1'$ und $2'$ liegen auf h'_1 bzw. h'_2 und bestimmen den Grundriß s' der Schnittgeraden s von v und φ . Der Schnittpunkt von g' und s' ist der Grundriß F' des gesuchten Lotfußpunktes, während sein Aufriß F'' auf dem Ordner und auf g'' liegt. Mit $P'F' = l'$ und $P''F'' = l''$ hat man Grund- und Aufriß des Lotes l von P auf g . Seine wahre Länge findet man wieder durch Paralleldrehen der Strecke PF nach MONGE. In Fig. 79b wurde das Lot PF zur Aufrißebene π_2 parallel gedreht; seine wahre Länge ist $l = P''F''_0$.

Die gleiche Aufgabe läßt sich auch ohne vorherige Konstruktion der Normalebene v lösen. Wäre nämlich die Gerade g zu einer Rißebene (z. B. zu π_1) senkrecht (projizierend), so daß die Normalebene v zu dieser Rißebene parallel liegt,

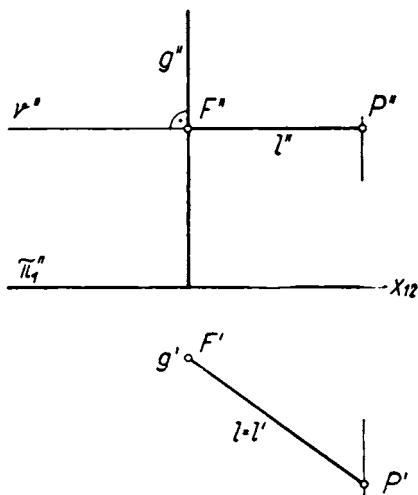


Fig. 80a. Konstruktion des Lotaabstandes l eines Punktes P von einer Raumgeraden g .
Sonderfall: g projizierend (normal zu π_1)

dann wäre in diesem Riß (Grundriß) der wahre Abstand l des Punktes P von der Geraden g direkt als die Strecke $l = P'g'$ zu entnehmen (Fig. 80a). Dieser Fall läßt sich auch bei allgemeiner Lage von g durch zweimaliges Umprojizieren erreichen.

Führt man nämlich als erste Seitenrißebene π_3 eine zu g parallele erstprojizierende Ebene ein (die Rißachse x_{13} muß dazu parallel zu g' angenommen werden) und als zweite Seitenrißebene π_4 eine zu g senkrechte Ebene (die Rißachse x_{34} muß dazu auf g''' senkrecht stehen), dann ist g viertprojizierend und erscheint in π_4 als ein Punkt. Das Lot l^{IV} von P^{IV} auf g^{IV} ist dann zu π_4 parallel und gleich dem wahren Abstand l des Punktes P von g .

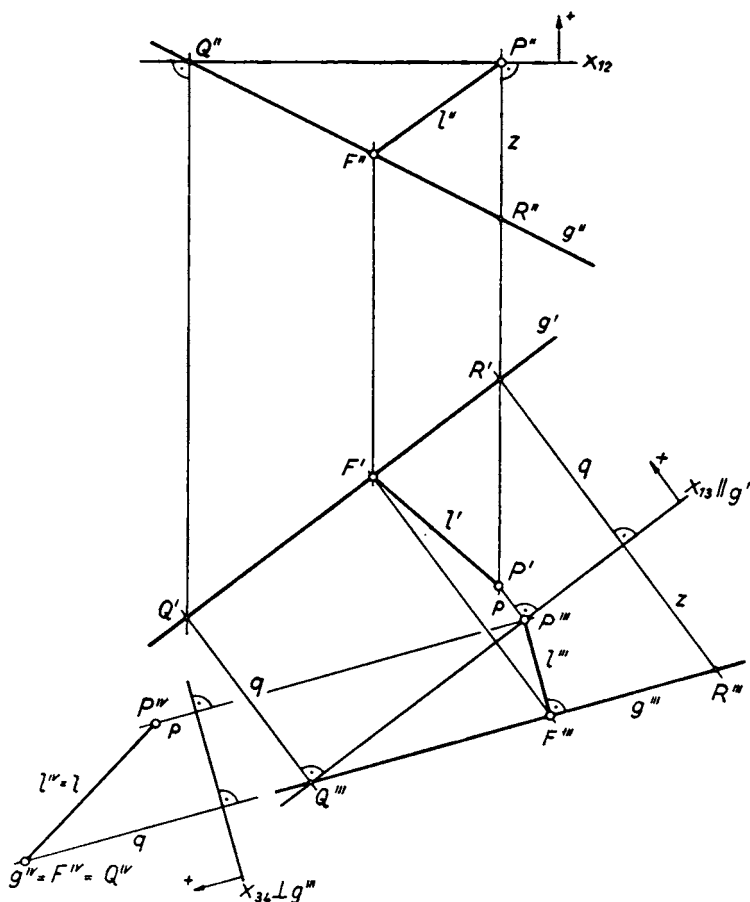


Fig. 80 b. Konstruktion des Lotabstandes l eines Punktes P von einer Raumgeraden g allgemeiner Lage. Lösung durch Umprojizieren mittels zweier Seitenrisse (π_3 parallel g und π_4 normal g). Im vierten Riß wird g projizierend

Fig. 80b zeigt die Ausführung der Konstruktion. Nach beliebiger Wahl der Rißachse x_{12} (senkrecht zur Ordnerichtung für den Grund- und Aufriß), z. B. durch P'' , überträgt man den Punkt P in den ersten Seitenriß P''' und in den zweiten Seitenriß P^{IV} und ebenso die Gerade g mit Hilfe zweier ihr angehörender Punkte, z. B. der Punkte Q und R nach g''' und g^{IV} . Beim Rückübertragen des Lotfußpunktes F aus dem zweiten Seitenriß F^{IV} in den ersten Seitenriß F''' hat man zu beachten, daß g viertprojizierend ist und folglich $l''' = P'''F'''$ auf g''' senkrecht steht. $l^{IV} = l$ stellt dann die wahre Länge des Lotes von P auf g , d. h. den gesuchten Abstand $l = Pg$ dar.

Man kann übrigens bei der Lösung dieser Aufgabe den vierten Riß einsparen. Der dritte Riß l''' des Lotes l ist nämlich als Lot $P'''F'''$ auf g''' bekannt. Aus dem Seitenriß F''' des Lotfußpunktes F findet man durch Ordner F' und F'' und daraus wieder durch Paralleldrehen des Lotes zu einer Rißebeane den wahren Lotabstand $l = Pg$. Die Konstruktion wird am einfachsten, wenn man die Rißachse $x_{13} = g'$ wählt.

Bemerkung 1: Auch das Gemeinlot und der Abstand zweier windschiefer Geraden a, b kann leicht mit Hilfe zweier Seitenrisse gefunden werden. Wählt man die erste Seitenrißebeane π_3 parallel zu a und normal zu π_1 (also $x_{13} \parallel a'$) und die zweite Seitenrißebeane π_4 normal zu a und normal zu π_3 (also $x_{34} \perp a''$), so erscheint a im vierten Riß als Punkt a^{IV} und b als Gerade b^{IV} , und das Gemeinlot n von a und b erscheint als Lot n^{IV} vom Punkte $A^{IV} = a^{IV}$ auf die Gerade b^{IV} . Ist B^{IV} der Fußpunkt dieses Lotes auf b^{IV} , so ist $n^{IV} = A^{IV}B^{IV}$ der vierte Riß des gesuchten Gemeinlotes n von a und b . Im dritten Riß wird B''' durch einen zu x_{34} senkrechten Ordner auf b''' gefunden; A''' ist der Lotfußpunkt aus B''' auf a''' . Daraus folgt schließlich der Grundriß $n' = A'B'$ und der Aufriß $n'' = A''B''$ des gesuchten Gemeinlotes AB , und daraus der Lotabstand $n = AB$ der Geraden a und b .

Eine direkte Konstruktion des Gemeinlotes n der windschiefen Geraden a und b zeigt Fig. 81. Das Gemeinlot n ist normal auf a und b , also auch auf jeder zu a und b parallelen Ebene. Wird der Schnittpunkt $P'_1 = P'_2$ der Grundrisse a' und b' von a und b im Aufriß in die Punkte P''_1 auf a'' und P''_2 auf b'' aufgelöst, und z. B. durch den Raumpunkt P_2 die Parallelebene ε zu a und b gelegt, d. h. a'' parallel durch P''_2 nach \bar{a}'' verschoben, so ist ε durch die Geraden \bar{a} (mit den Rissen $\bar{a}' = a'$ und $\bar{a}'' \parallel a''$) und b (mit den Rissen b' und b'') festgelegt. Sind \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{C} die zusammenfallenden Risse der Deckpunkte der Geraden $a, \bar{a} \parallel a$ und b , so kann man, um die Richtung der Hauptlinien h_1 und h_2 der Ebene $\varepsilon = [\bar{a}b]$ zu finden, z. B. durch den Deckpunktriß \mathfrak{B} die (\bar{a} in 1 treffende) erste Hauptlinie h_1 und durch den Deckpunktriß \mathfrak{A} die (b in 2 treffende) Hauptlinie h_2 legen.

Das Gemeinlot n von a und b ist dann normal zur Ebene $\varepsilon = [\bar{a}b]$, d. h. der Grundriß n' des Gemeinlotes n von a und b ist normal zu $h'_1 = [1' \mathfrak{B}]$ und der Aufriß n'' normal zu $h''_2 = [\mathfrak{A} 2'']$. Damit ist die Richtung des Gemeinlotes n bestimmt.

Um noch die Lage des Gemeinlotes n von a und b zu finden, projizieren wir a und b in der nunmehr bekannten Richtung von n auf die Deckebene. Ist \mathfrak{P}_1 die in beiden Rissen identische Projektion des Punktes P_1 von a (Projektionsstrahl n_1) und \mathfrak{P}_2 die des Punktes P_2 von b (Projektionsstrahl n_2), so ist $\alpha = [\mathfrak{P}_1]$ die sich in beiden Rissen deckende Projektion von a auf die Deckebene, und $\beta = [\mathfrak{P}_2]$ die von b . Der Schnittpunkt $\mathfrak{R} = [\alpha\beta]$ ist dann der in beiden Rissen identische Deckpunkt \mathfrak{R} des gesuchten

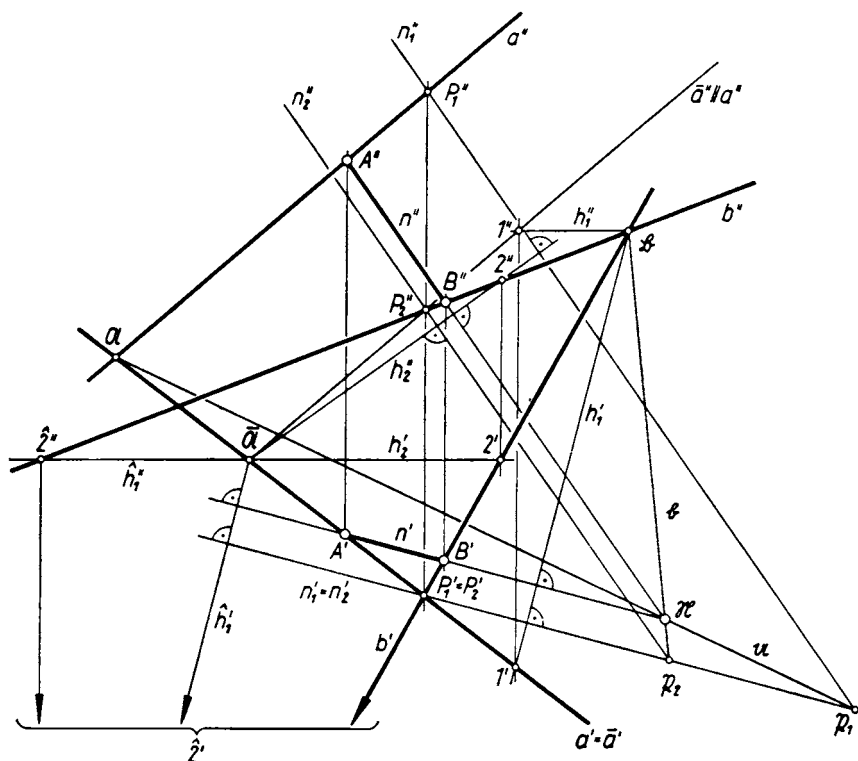


Fig. 81. Konstruktion des Gemeinlotes n und des Lotabstandes zweier windschiefer Raumgeraden a und b

Gemeinlotes n , dessen Grundriß $n' \perp \hat{h}_1'$ und dessen Aufriß $n'' \perp \hat{h}_2''$ ist. Zur Probe müssen die Schnittpunkte $A' = [n' a']$ und $A'' = [n'' a'']$ bzw. $B' = [n' b']$ und $B'' = [n'' b'']$ auf Ordern liegen. Die wahre Länge der Strecke AB gibt dann den Lotabstand der beiden windschiefen Geraden a und b .

Die Konstruktion kann noch dadurch etwas vereinfacht werden, daß man auch die erste Hauptlinie \hat{h}_1 der Ebene $\epsilon = [\alpha\beta]$ durch den Deckpunkt \mathfrak{A} legt. Trifft diese Hauptlinie \hat{h}_1 dann \hat{b} in $\hat{2}$, so ist $\hat{h}_1' = [\mathfrak{A}\hat{2}']$. Der Grundriß n' des Gemeinlotes n ist wieder normal zu \hat{h}_1' .

Bemerkung 2: Man kann als Maß für die Einfachheit einer geometrischen Konstruktion den Aufwand an Elementarkonstruktionen nehmen. Die zuletzt beschriebene

Konstruktion des Gemeinlotes n der Geraden a und b erfordert (auf dem Reißbrett mit Reißschiene und zwei Zeichendreiecken ausgeführt): 3 Ordner, 1 Horizontale, 4 Verbindungsgeraden, 1 Parallele und 5 Lote.

Allerdings ist bei solchen, auf einen Grundgedanken von ÉMILE LEMOINE (1888) zurückgehenden, „*geometrographischen*“ Beurteilungen einer Konstruktion der gedankliche Aufwand der Lösungsmethode nicht berücksichtigt. Oft ist er bei einer zeichnerisch kürzeren Lösung eines Problems erheblich größer als bei einer zeichnerisch längeren Lösung.

26. Vierte Maßaufgabe: Wahre Größe eines Winkels

Zur Bestimmung der wahren Größe ebener Figuren verwendet man eine Drehung (Umlegung oder Umklappung) der Ebene ε , in der die Figur liegt, in die Zeichenebene, z. B. in die Grundrißebene π_1 , in der dann alle Abmessungen in wahrer Größe erscheinen; Drehachse ist dabei die Spur e_1 der Ebene ε in der Grundrißebene π_1 . Die Punkte E der Drehachse bleiben bei der Drehung fest ($E = E_0$). Jeder andere Punkt P von ε beschreibt dabei einen Kreisbogen, dessen Ebene zur Drehachse e_1 normal ist, dessen Mittelpunkt M der Schnittpunkt dieser Normalebene durch P mit der Drehachse, und dessen Radius r gleich dem Abstand des Punktes P von der Drehachse ist (Fig. 82).

Diese Drehung des Punktes P in ε nach dem Punkt P_0 in π_1 kann ersetzt werden durch eine Projektion in Richtung der Sehne $[PP_0]$ des Drehungskreises, der sogenannten Drehsehne. Aus Ähnlichkeitsgründen gehören zu verschiedenen Punkten P und Q aus ε parallele Drehsehnern, d. h. es gilt der wichtige

Satz 1: Die Drehung einer Ebene in eine zweite Ebene ist äquivalent einer Parallelprojektion in Richtung der Drehsehnern. Zwischen den beiden Ebenen besteht daher eine räumliche perspektive Affinität, wobei als Affinitätsachse die Schnittgerade der beiden Ebenen (Drehachse), als Affinitätsrichtung die Richtung der Drehsehnern wirkt.

Diese Drehkonstruktion soll nun zur Lösung der Aufgabe, die wahre Größe eines Winkels zu bestimmen, verwendet werden. Der Winkel φ

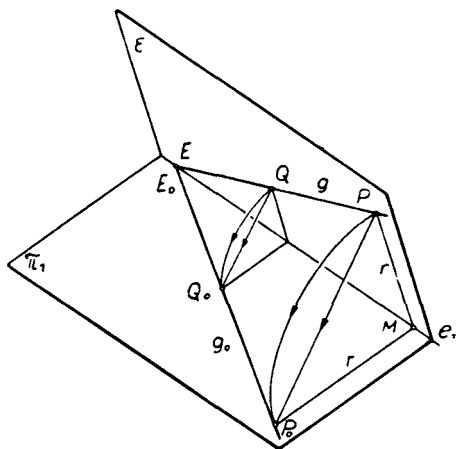


Fig. 82. Die Drehung einer Ebene ε in die Ebene π_1 um die Spur e_1 von ε auf π_1 ist äquivalent einer Parallelprojektion von ε auf π_1 in Richtung der Drehsehnern $[PP_0]$

werde von den beiden Geraden a und b gebildet, die sich im Punkt P schneiden. Diese Geraden spannen die Winkalebene ε auf, auf deren Horizontalspur e_1 die Spurpunkte A und B dieser Geraden in der Grundrißebene π_1 liegen (Fig. 83).

Wird nun die Ebene ε um die Spur e_1 (in der einen oder anderen Richtung)

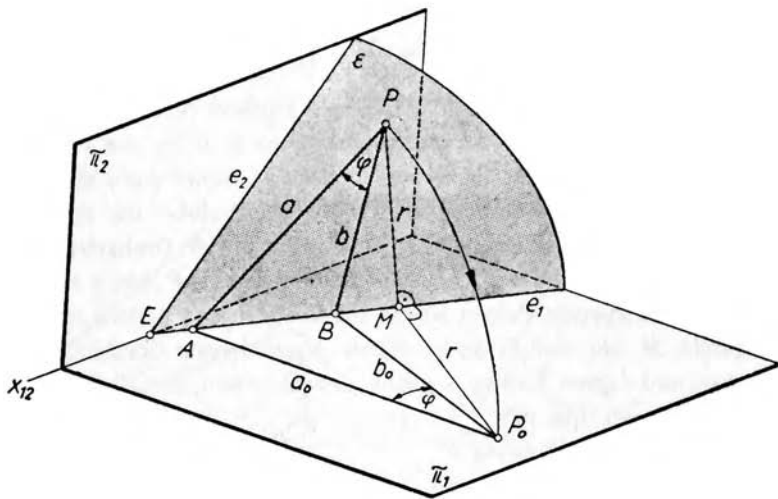


Fig. 83. Konstruktion der wahren Größe eines Winkels $\varphi = \sphericalangle(a, b)$ durch Drehen der Winkalebene ε in die Grundrißebene π_1

in die Grundrißebene π_1 hineingedreht, dann gelangt P nach P_0 , während die Punkte A und B als Punkte der Drehachse festbleiben. Die gedrehten Geraden $a_0 = [P_0 A]$ und $b_0 = [P_0 B]$ schließen nach wie vor den Winkel φ ein, der jetzt in der Zeichenebene π_1 liegt und folglich im Grundriß in wahrer Größe erscheint.

Sind Grund- und Aufriß der Geraden a und b und ihres Schnittpunktes P sowie die Rißachse x_{12} gegeben, so konstruiert man sich mit Hilfe der Horizontalspurpunkte A und B zunächst die Horizontalspur e_1 der von a und b aufgespannten Winkalebene ε (Fig. 84). Der Drehungskreis, der den Punkt P in den Punkt P_0 der Grundrißebene π_1 überführt, liegt in jener Normalebene zur Drehachse e_1 , die den Punkt P enthält. Da diese Ebene erstprojizierend ist, erscheint sie und damit auch der in ihr liegende Drehungskreis im Grundriß als das Lot von P' auf e_1 . Kreismittelpunkt M ist der Lotfußpunkt, Drehradius r das Lot PM . Um den Drehradius zu erhalten, führt man die Kreisebene als Seitenrißebene π_3 ein, wobei die neue Rißachse x_{13} mit der Geraden $[P'M]$ zusammenfällt. Der Seitenriß P'''

In Fig. 85 ist nach diesem Verfahren als Beispiel die *wahre Größe eines Dreiecks* (PQR) konstruiert, dessen Grundriß ($P'Q'R'$) und Aufriß ($P''Q''R''$) gegeben sind. Dabei ist von der Freiheit in der Wahl der Rißachse x_{12} Gebrauch gemacht, indem diese zur Vereinfachung der Konstruktion

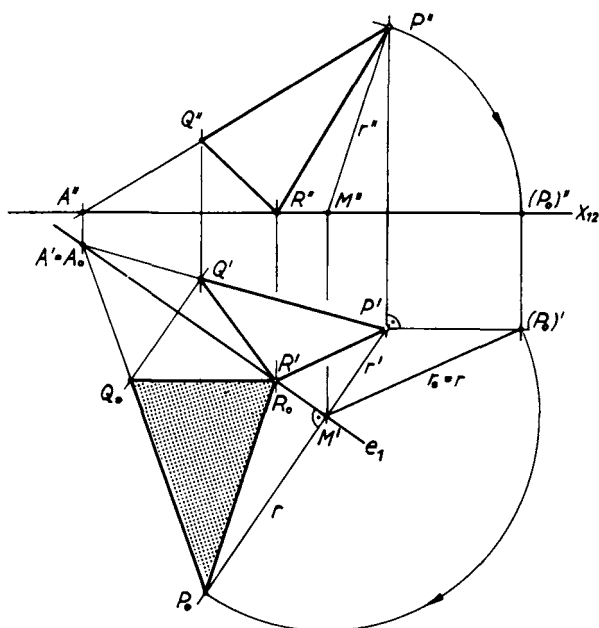


Fig. 85. Bestimmung der wahren Größe einer ebenen Figur [Dreieck (PQR)] durch Drehung der Dreiecksebene ε in die Grundrißebene π_1

durch den Punkt R'' gelegt wurde. Außerdem wurde die wahre Größe des Drehradius $r = PM$ für den Punkt P nicht aus dem Seitenriß sondern durch Paralleldrehen der Strecke PM gewonnen. Hat man die Umlegung P_0 eines einzigen Punktes P der ebenen Figur ermittelt, dann findet man die Umlegung aller anderen Punkte (in Fig. 85 die des Punktes Q) am einfachsten unter Benutzung des Satzes:

Satz 1: *Zwischen dem Riß einer ebenen Figur und ihrer Umlegung in die Rißebeine besteht eine ebene orthogonale perspektive Affinität. Affinitätsachse ist dabei die Achse, um welche die Umlegung erfolgt.*

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus der Tatsache, daß entsprechende Punktepaare $P'P_0, Q'Q_0, \dots$ jeweils auf einem Lot zur Drehachse e_1 liegen, und daß sich entsprechende Geraden, z. B. $[P'Q']$ und $[P_0Q_0]$, auf e_1 schneiden.

Als weiteres Beispiel zur Umlegung einer Ebene diene die folgende **Aufgabe**: Von einer Ebene ε sind gegeben:

1. Grund- und Aufriß eines Punktes A ,
2. Grund- und Aufriß einer zur Grundrißebene parallelen Geraden h_1 (ersten Hauptlinie), die A nicht enthält.

Gesucht wird Grund- und Aufriß sowie die wahre Gestalt desjenigen Quadrates in ε mit der Ecke A , dessen nicht durch A gehende Diagonale auf h_1 liegt.

Nach beliebiger Wahl der Rißachse x_{12} senkrecht zur Ordnerrichtung drehen wir die durch A und h_1 bestimmte Quadratebene ε in die Grundrißebene π_1 hinein (Fig. 86). Um die *Drehachse* e_1 ($=$ Horizontalspur der Quadratebene ε) zu finden, konstruieren wir den Horizontalspurpunkt F' der

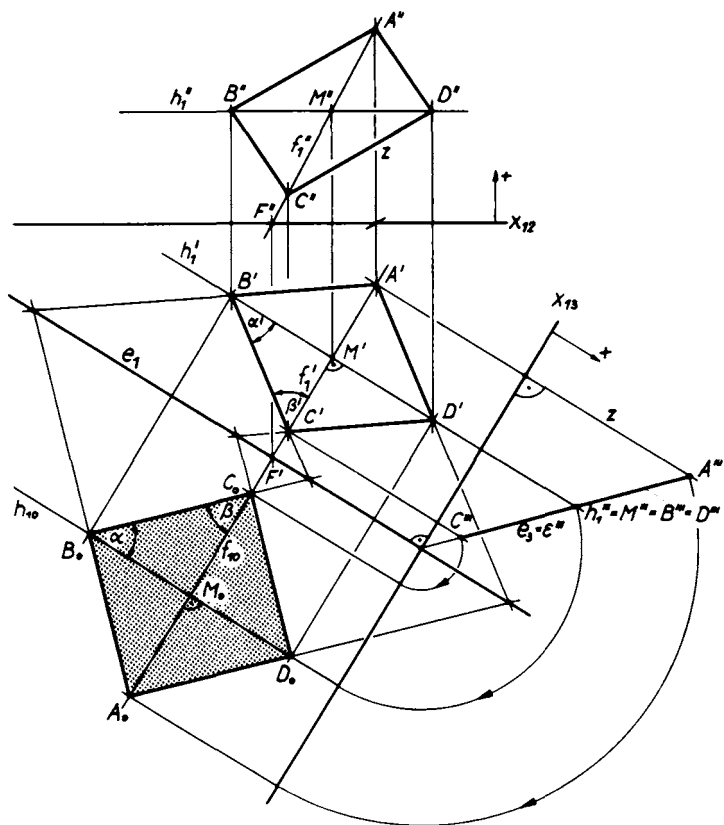


Fig. 86. Darstellung eines Quadrates, von dem eine Ecke A und eine (zu π_1 parallele) Diagonalgerade h_1 durch Grund- und Aufriß gegeben sind

durch A gehenden Diagonalen des Quadrates. Diese ist, da die andere Diagonale auf h_1 eine erste Spurparallele ist, eine erste Fallinie f_1 der Quadratebene ε . Ihr Grundriß f'_1 steht somit auf h'_1 senkrecht. Nachdem man über den Mittelpunkt M des Quadrates (Schnittpunkt von h_1 und f_1) den Aufriß $f''_1 = [A''M'']$ dieser Fallinie f_1 gefunden hat, erhält man zunächst den Aufriß F'' des Spurpunktes F der Fallinie f_1 als Schnitt von f''_1 mit x_{12} und damit durch einen Ordner auch den Grundriß F' auf f'_1 . Jetzt kann die Umlegungsachse $e_1 \parallel h'_1$ durch F' gezeichnet werden. Nach beliebiger Wahl der neuen Rißachse x_{13} senkrecht zu e_1 kann die Seitenrißspur e_3 der Quadratebene ε durch Übertragen des Punktes A in den Seitenriß nach A''' konstruiert werden. Da die Ebene ε drittprojizierend ist, also $\varepsilon''' = e_3$ ist, fallen alle Eckpunkte des Quadrates im Seitenriß auf e_3 . Die Gerade h_1 erscheint als Punkt, und es ist $h'''_1 = M''' = B''' = D'''$; außerdem ist $A'''M'''$ die halbe Quadratdiagonale. Macht man $A'''M''' = M'''C'''$, so erhält man durch Ordner den Grundriß C' und Aufriß C'' der zu A diametralen Ecke C , für die auch $A'M' = M'C'$ und $A''M'' = M''C''$ gilt. Trägt man die halbe Quadratdiagonale $A'''M''' = M'''C'''$ von M' auf h'_1 nach beiden Seiten auf, so erhält man die Grundrisse B' bzw. D' und durch Ordner auf h'_1 die Aufrisse B'' bzw. D'' der restlichen Ecken B bzw. D des Quadrates. Damit ist das gesuchte Quadrat ($ABCD$) allein mit Hilfe des Seitenrisses ε''' seiner Ebene ε gefunden.

Bei der Drehung der Ebene ε um ihre erste Spur e_1 in die Grundrißebene π_1 wandern die Punkte M, A, B, C, D je auf einem Kreisbogen, der sich im Grundriß als ein Lot zur Drehachse e_1 projiziert, im Seitenriß dagegen in wahrer Gestalt erscheint (Fig. 86). Damit sind zunächst die Punkte M_0, A_0, C_0 in der Umlegung bestimmt. Die beiden anderen Eckpunkte B_0 und D_0 liegen auf h_{10} (= Parallele zu e_1 durch M_0) und haben von M_0 den gleichen Abstand wie A_0 und C_0 . Damit ist die Umklappung ($A_0B_0C_0D_0$) des Quadrates ($ABCD$) und seine wahre Gestalt gefunden. Zwischen der Umlegung und dem Grundriß des Quadrates besteht eine orthogonale Affinität: Entsprechende Quadratseiten, z. B. $[A_0B_0]$ und $[A'B']$, schneiden sich in je einem Punkte der Affinitätsachse e_1 . Schließlich findet man wieder aus dem Grundriß den Aufriß der Quadratecken auf den Ordnern. C'' liegt außerdem auf f'' , B'' und D'' liegen auf h''_1 . Der Grundriß des Quadrates ist ein Rhombus, sein Aufriß ein allgemeines Parallelogramm.

Die Grundrißebene $\pi_1 = \varepsilon'$ und die Umlegung ε_0 der Quadratebene ε sind perspektivaffin aufeinander bezogen. Dabei ist e_1 die Affinitätsachse, und

die Affinitätsstrahlen sind zu e_1 normal. In jedem Punkte des einen Feldes gibt es daher genau einen rechten Winkel, dem ein rechter Winkel im entsprechenden Punkte des anderen Feldes zugeordnet ist. Dieses *Paar einander entsprechender rechter Winkel* wird von der *ersten Hauptlinie* und der *ersten Fallinie* des betreffenden Punktes gebildet. So entspricht z. B. dem rechten Winkel zwischen h_1 und f_1 der rechte Winkel zwischen h_{10} und f_{10} .

Eine Strecke auf einer ersten Hauptlinie h_1 erscheint, da sie zur Affinitätsachse e_1 parallel ist, in beiden Feldern ε' und ε_0 gleichgroß. Eine Strecke auf einer ersten Fallinie f_1 dagegen ist im Grundrißfeld stets kleiner als in der Umlegung. Daher gilt:

Satz 2: *Ein spitzer Winkel α , von dem ein Schenkel eine erste Hauptlinie ist, wird im Grundriß verkleinert ($\alpha' < \alpha$).*

Satz 3: *Ein spitzer Winkel β , von dem ein Schenkel eine erste Fallinie ist, wird im Grundriß vergrößert ($\beta' > \beta$).*

Satz 4: *Ein rechter Winkel γ , von dem ein Schenkel eine erste Hauptlinie (oder erste Fallinie) ist, bleibt im Grundriß ein rechter Winkel ($\gamma' = \gamma$). Jeder andere rechte Winkel δ wird im Grundriß geändert ($\delta' > \delta$ oder $\delta' < \delta$).*

Fig. 86 illustriert diese Tatsachen am Beispiel der Winkel zwischen einer Quadratseite und den Diagonalen. Es ist

$$\alpha' < \alpha = 45^\circ \quad \text{und} \quad \beta' > \beta = 45^\circ.$$

28. Sechste Maßaufgabe: Wahre Größe des Winkels zweier Ebenen

Als *Winkel zweier Ebenen* α und β definiert man den Winkel φ , unter dem sich zwei zur Schnittgeraden s der Ebenen normale Geraden a und b der Ebenen α bzw. β schneiden. Demnach kann die Aufgabe in folgenden vier Konstruktionsschritten gelöst werden:

Man bestimmt

1. die Schnittgerade s der gegebenen Ebenen α und β ,
2. die Normalebene ν zu s in einem beliebigen Punkt S auf s ,
3. die Schnittgeraden a und b der Ebenen ν und α bzw. ν und β ,
4. die wahre Größe des Winkels φ zwischen a und b .

Diese Methode zur Lösung der Aufgabe verlangt einen nicht geringen Konstruktionsaufwand. Wesentlich einfacher wird die Konstruktion, wenn man beachtet, daß der *Winkel zwischen den Ebenen α und β gleich dem Winkel zwischen irgend zwei Normalen n_α und n_β der Ebenen* ist. Man erspart sich dabei sowohl die Konstruktion der Schnittgeraden s als auch die der Normalebene ν .

Die Ebenen α und β seien durch ihre Spuren a_1, a_2 bzw. b_1, b_2 gegeben. Das Lot n_α von einem beliebig gewählten Punkt P auf die Ebene α steht im Grundriß auf a_1 , im Aufriß auf a_2 senkrecht. Für das Lot n_β von P auf die Ebene β gilt entsprechend $n'_\beta \perp b_1$, $n''_\beta \perp b_2$ (Fig. 87). Damit

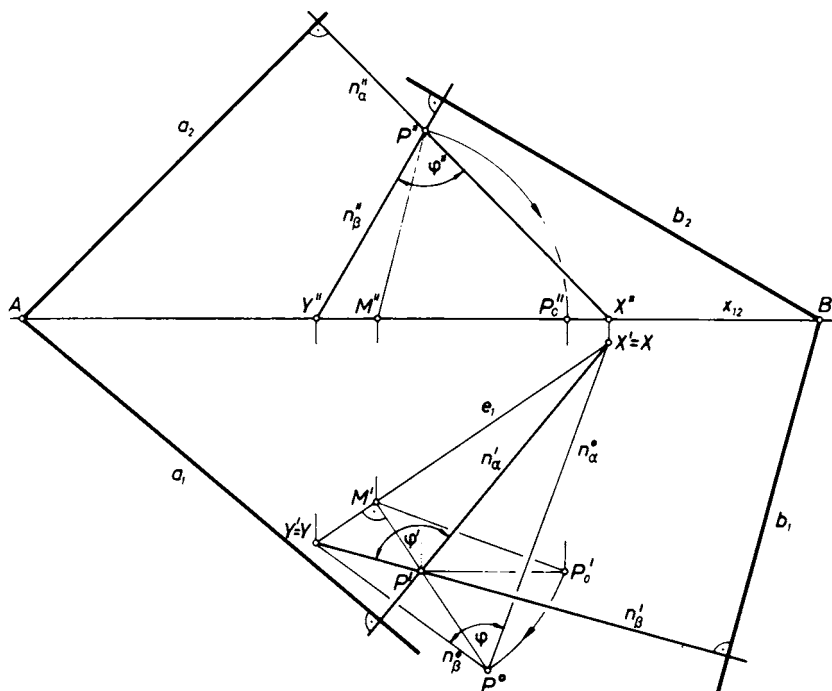


Fig. 87. Konstruktion des Winkels φ zweier (nicht paralleler) Ebenen α und β

hat man schon Grund- und Aufriß des Winkels φ zwischen n_α und n_β . Der erste Spurpunkt von n_α ist dann X , der von n_β ist Y , und $e_1 = [XY]$ ist die erste Spur der Ebene $\varepsilon = [n_\alpha, n_\beta]$. Die wahre Größe des Winkels φ zwischen n_α und n_β kann nun mit Hilfe eines Seitenrisses oder einfacher durch Paralleldrehen der Strecke PM ($=$ Abstand des Punktes P von der Drehachse $[XY] = e_1$) nach MONGE bestimmt werden. (Die Strecke MP wurde in Fig. 87 um die Achse $[MM']$ in die Grundrißebene π_1 nach MP'_0 gedreht; dabei beschreiben P'' in π_2 einen Kreisbogen um M'' und P' in π_1 eine horizontale Gerade.) Der um die Spur e_1 in die Grundrißebene hineingedrehte Punkt P^0 ist dann der Scheitel, die Geraden $n_\alpha^0 = [P^0X]$ und $n_\beta^0 = [P^0Y]$ sind die Schenkel des gesuchten Winkels φ .

29. Schnitt eines dreiseitigen Prismas nach einem Dreieck vorgegebener Gestalt

Eine berühmte und theoretisch sehr wichtige Aufgabe der Darstellenden Geometrie ist die folgende, zuerst (1811) von SIMON LHUILIER (1750 — 1840) gelöste,

Prismenschnittaufgabe: *Ein gegebenes dreiseitiges Prisma ist so mit einer Ebene zu schneiden, daß das entstehende Schnittdreieck vorgegebene Gestalt hat, d. h. zu einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.*

Stellt man das Prisma mit seinen Kanten senkrecht zur Grundrißebene, so deckt sich der Grundriß seines Basisdreiecks (= Normalschnitt des Prismas) mit dem Grundriß des Schnittdreiecks, dessen Gestalt vorgegeben ist. Äquivalent der Prismenschnittaufgabe ist daher die folgende

Aufgabe: *Zu einem Dreieck vorgegebener Gestalt ist bei gegebenem Grundriß der Aufriß zu konstruieren.*

Da parallele ebene Schnitte eines dreiseitigen Prismas zueinander kongruente Schnittdreiecke ergeben, da ferner Schnittebenen, die zu einer Normalebene des Prismas spiegelbildlich liegen, ebenfalls zu dazu kongruenten Schnittdreiecken führen, können wir feststellen:

Falls die Prismenschnittaufgabe überhaupt lösbar ist, gibt es zwei bezüglich der Normalebene der Kantenrichtung symmetrische Ebenenstellungen, d. h. zwei Scharen von parallelen Ebenen, die das dreiseitige Prisma nach einem Dreieck der vorgegebenen Gestalt schneiden.

Zur Analyse der Aufgabe denken wir uns die Aufgabe gelöst: Das Dreieck (ABC) im Raum, dessen Gestalt und dessen Grundriß $(A'B'C')$ gegeben sind, liege in einer Ebene ε , deren Horizontalspur e_1 sei. Drehen wir die Ebene ε um e_1 in die Grundrißebene π_1 hinein, so stellt $(A_0B_0C_0)$ die wahre Größe des Dreiecks (ABC) dar. Zwischen dem Grundriß $(A'B'C')$ und der Umlegung $(A_0B_0C_0)$ des Dreiecks besteht dabei eine orthogonale perspektive Affinität mit der Spur e_1 als Affinitätsachse. Das Rechtwinkelpaar dieser Affinität wird jeweils von einer ersten Hauptlinie $h_1 \parallel e_1$ und einer ersten Falllinie $f_1 \perp e_1$ gebildet. Wird das Feld $(A_0B_0C_0)$ beliebig ähnlich verändert und z. B. in das (gestaltgleiche) Feld $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ oder (siehe unten) in das Feld (A_0B_0C') verwandelt, dann sind diese untereinander ähnlichen Felder und das Grundrißfeld $(A'B'C')$ immer noch affin verwandt, und von ihren entsprechenden rechten Winkeln gehört der eine Schenkel zur Hauptlinie, der andere zur Falllinie des Grundrißfeldes.

Diese Tatsache verwerten wir nun durch Umkehren der Schlußfolgerungen, um zunächst aus dem Grundriß $(A'B'C')$ und der Gestalt $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$

des Dreiecks (ABC) seine wahre Größe $(A_0B_0C_0)$ zu finden und daraus die Lage der gesuchten Ebene ε zu bestimmen, welche aus dem Prisma ein Dreieck der Gestalt $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ und der Größe $(A_0B_0C_0)$ ausschneidet.

Gegeben sei der Grundriß $(A'B'C')$ und die Gestalt $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ des im Raum über $(A'B'C')$ gelegenen Dreiecks (ABC) , dessen genaue räumliche Lage, d. h. dessen Aufriß gesucht wird (Fig. 88). An die Seite $B'C'$ legen wir ein

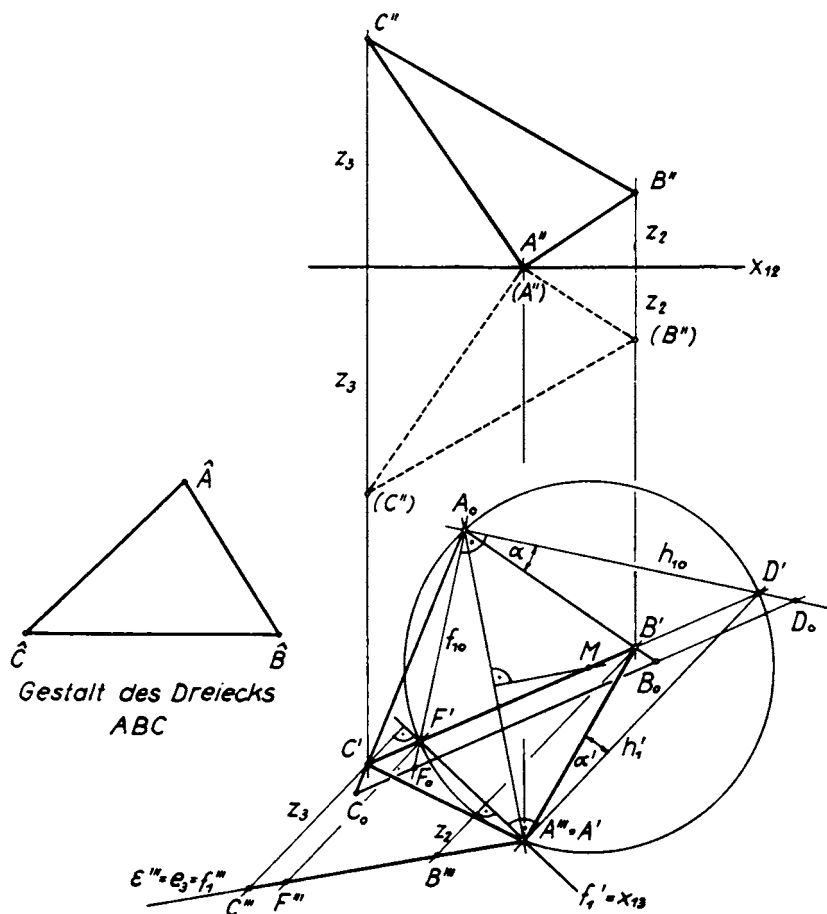


Fig. 88. Prismenschnittaufgabe: Ein dreiseitiges Prisma [Normalschnitt $(A'B'C')$] durch eine Ebene ε nach einem Dreieck (ABC) zu schneiden, das einem gegebenen Dreieck $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})$ ähnlich ist

Dreieck $(A_0B_0C_0)$ an, das zu dem Dreieck (ABC) ähnlich ist (dieselbe Gestalt aufweist), so daß

$$(A_0B_0C_0) \sim (\hat{A}\hat{B}\hat{C}) \sim (ABC)$$

ist. Die Dreiecke $(A'B'C')$ und $(A_0B'C')$ sind dann zueinander perspektiv-affin mit $[B'C']$ als Affinitätsachse und $[A'A_0]$ als Affinitätsrichtung. Die einander entsprechenden Rechtwinkelpaare dieser Affinität im Punkte A' bzw. A_0 werden nach 8. (mittels des THALESkreises durch A' und A_0 mit der Mitte M auf $[C'B']$) konstruiert und führen auf die Punkte D' und F' auf der Affinitätsachse $[C'B']$, die sowohl von A' wie von A_0 aus unter einem rechten Winkel erscheinen. Der eine durch A' gehende Schenkel des rechten Winkels muß dann nach (27. Satz 4) der Grundriß der ersten Hauptlinie h_1 der Schnittebene ε , der andere Schenkel der Grundriß der ersten Fallinie f_1 des Punktes A sein. Die Entscheidung darüber, welcher Schenkel der Hauptlinie, welcher der Fallinie von ε entspricht, ist nun nach (27. Satz 2 und 3) leicht zu fällen. In Fig. 88 ist der Winkel α' zwischen $[A'B']$ und $[A'D']$ kleiner als der wahre Winkel α zwischen $[A_0B']$ und $[A_0D']$. Folglich ist $[A'D'] = h'_1$ der Grundriß der ersten Hauptlinie und $[A'F'] = f'_1$ der Grundriß der ersten Fallinie der Schnittebene ε im Punkte A .

Die Strecke $A'D'$, die auf der Hauptlinie h_1 liegt, ist nun gleich ihrer wahren Länge und kann auf der zu h'_1 affinen Geraden $h_{10} = [A_0D']$ von A_0 aus angetragen werden, so daß

$$A_0D_0 = A'D'$$

ist. Vergrößert man nun das Dreieck $(A_0B'C')$ zentrisch ähnlich aus A_0 so, daß der Punkt D' in den Punkt D_0 übergeht, d. h. zieht man durch D_0 die Parallele zu $[B'C']$, welche auf $[A_0B']$ den Punkt B_0 , auf $[A_0C']$ den Punkt C_0 und auf der zu f'_1 affinen Geraden $f_{10} = [A_0F']$ den Punkt F_0 ausschneidet, so erhält man mit dem Dreieck

$$(A_0B_0C_0) \sim (A_0B'C')$$

die wahre Größe des Dreiecks (ABC) .

Um nun den *Aufriß* $(A''B''C'')$ des Dreiecks (ABC) zu konstruieren, d. h. um die Lage der Dreiecksebene ε im Raum festzulegen, führen wir die erstprojizierende Ebene durch die Fallinie f_1 als Seitenrißebene π_3 ein. Die neue Rißachse x_{13} deckt sich dabei mit f'_1 ; wenn man A'' auf der Rißachse x_{13} , d. h. A in π_1 wählt, so deckt sich A''' mit A' . Der Seitenriß F''' des Punktes F der Fallinie f_1 liegt mit F' auf einem Ordner senkrecht zu x_{13} und hat von A''' den wahren Abstand

$$F'''A''' = F_0A_0.$$

Mit F''' kennt man aber die dritte Spur e_3 der Dreiecksebene ε , die zugleich deren Seitenriß ε''' darstellt. Auf ε''' liegen auch die Seitenrisse B''' und C''' der beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks, und zwar auf den Ordnern durch B' bzw. C' .

Aus dem Seitenriß ($A''B''C''$) des Dreiecks (ABC) kann man nun sofort die Erhebungen z_2 und z_3 der Eckpunkte B und C über der Grundrißebene entnehmen und von der durch A'' laufenden Rißachse x_{12} aus in den Aufriß übertragen. Dadurch erhält man den Aufriß des Dreiecks (ABC). Je nachdem man die z -Koten der Eckpunkte von der Rißachse x_{12} nach oben oder nach unten anträgt, erhält man den Aufriß ($A''B''C''$) oder den dazu bezüglich der Grundrißebene π_1 spiegelbildlich gelegenen Aufriß ($(A'')(B'')(C'')$).

Damit ist die Lösbarkeit der Prismenschnittaufgabe nachgewiesen und zugleich ein Weg angegeben, auf dem die Lösung gefunden werden kann. Da die Wahl von A'' und der (zur Ordnerichtung senkrechten) Rißachse x_{12} beliebig war, ergeben sich, wie schon eingangs festgestellt, zwei (zu π_1 symmetrische) Scharen von Schnittebenen, die das über dem Dreieck ($A'B'C'$) errichtete Prisma nach einem Dreieck (ABC) schneiden, das zu dem vor-

gegebenen Dreieck ($\hat{A}\hat{B}\hat{C}$) ähnlich ist.

30. Darstellung eines Kreises

Ist zunächst die Ebene des Kreises zweitprojizierend, so erhält man für ihn im Grund- und Aufriß die in Fig. 89 wiedergegebene einfache Darstellung. Von der Kreisebene ε seien die Grundrißspur e_1 senkrecht zur Rißachse x_{12} und die Aufrißspur e_2 durch den Knoten E gegeben, vom Kreis selbst Grund- und Aufriß des Mittelpunktes M und der Radius r . Der Aufriß M'' des Kreismittelpunktes M liegt dabei auf $e_2 = \varepsilon''$, während der Aufriß des Kreises als Strecke $B''D'' = 2r$ auf e_2 erscheint. Der Grundriß des Kreises ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M' , deren

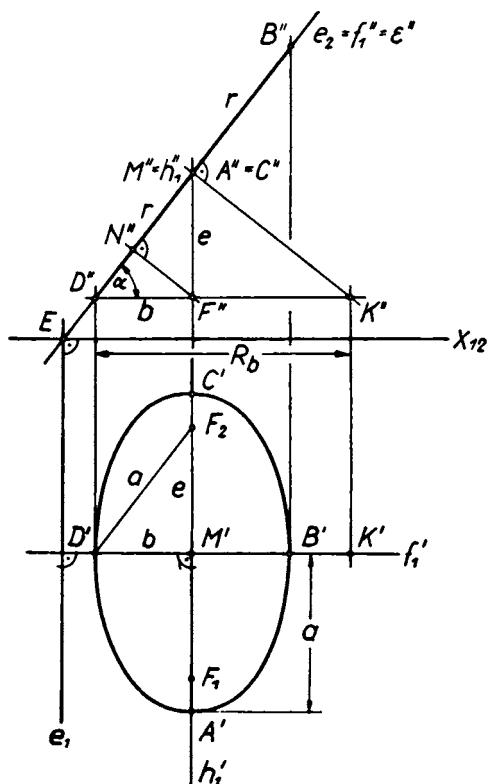


Fig. 89. Darstellung eines Kreises, der in einer zweitprojizierenden Ebene ε liegt

senkrechte konjugierte Durchmesser, d. h. deren Hauptachsen sofort angegeben werden können. Der Kreisdurchmesser AC , der auf der ersten Hauptlinie $h_1 \parallel e_1$ durch M liegt, gibt im Grundriß mit $A'C' = 2r = 2a$ die in wahrer Größe erscheinende große Ellipsenachse; der dazu senkrechte Kreisdurchmesser BD , der auf der ersten Fallinie $f_1 \perp e_1$ liegt, führt im Grundriß mit $B'D' = 2b$ zur kleinen Ellipsenachse. Damit ist das Grundrißbild des Kreises, die Ellipse mit den Scheiteln $(A'B'C'D')$, bestimmt.

Wir knüpfen an Fig. 89 einige Bemerkungen an:

Der Neigungswinkel α der Kreisebene ε gegen die Grundrißebene π_1 erscheint im Aufriß als Winkel von $e_2 = \varepsilon''$ gegen die Rißachse x_{12} in wahrer Größe. Für die *Halbachsen* a, b der Grundrißellipse entnimmt man dem Bild die Beziehungen

$$(1) \quad a = r, \quad b = r \cos \alpha = a \cos \alpha$$

während die lineare *Exzentrizität* e der Ellipse (d. h. der Abstand ihrer Brennpunkte F_1 und F_2 vom Mittelpunkt M')

$$(2) \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \alpha} = r \sin \alpha$$

im Aufriß als Strecke $M''F''$ auftritt. Mit ihr kann die Grundrißellipse auch einfach über die *Brennpunkte* F_1 und F_2 konstruiert werden.

Das Lot in M auf die Kreisebene (die Achse des Kreises) ist parallel zur Aufrißebene. Schneidet man seinen Aufriß mit der Parallelen zur Rißachse durch den Punkt D'' im Punkt K'' , so erhält man mit

$$(3) \quad D''K'' = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a^2}{a \cos \alpha} = \frac{a^2}{b} = R_b$$

den *Schmiegekreisradius* für den *Ellipsenscheitel* D' und folglich mit dem Punkt K' auf $[B'D']$ den *Schmiegekreismittelpunkt* für D' .

Fällt man von F'' das Lot auf e_2 (Lotfußpunkt N''), dann ist die Strecke

$$(4) \quad D''N'' = b \cos \alpha = \frac{b a \cos \alpha}{a} = \frac{b^2}{a} = R_a$$

gleich dem *Schmiegekreisradius* für den *Ellipsenscheitel* A' .

Hat die *Ebene* ε des Kreises k beliebige Lage, dann sind sein *Grundriß*- und sein *Aufrißbild* je eine *Ellipse*. Führt man eine auf π_1 normale Seitenrißebene π_3 so ein, daß die Kreisebene ε in ihr projizierend erscheint, so hat der Kreis k im Grundriß und Seitenriß wieder die zuvor besprochene einfachere Lage.

Die Kreisebene ε sei durch ihre Spuren e_1, e_2 , und vom Kreis k seien der Mittelpunkt M in Grund- und Aufriß sowie der Radius r gegeben. Damit M der Ebene ε angehört, müssen M' und M'' auf den Bildern einer ersten

oder zweiten Hauptlinie h_1 oder h_2 der Ebene ε liegen (Fig. 90). Auf h_1' erscheinen alle Strecken in wahrer Länge, so daß $M'A' = M'C'$ dem Kreisradius r gleich ist. Entsprechend tritt auf h_2'' der Kreisradius r in wahrer Größe auf. Da alle anderen Kreisradien verkürzt werden, liegen auf den Hauptlinien die großen Achsen der Grundriß- bzw. der Aufrißellipse. Die Länge dieser Halbachsen ist gleich dem Kreisradius r .

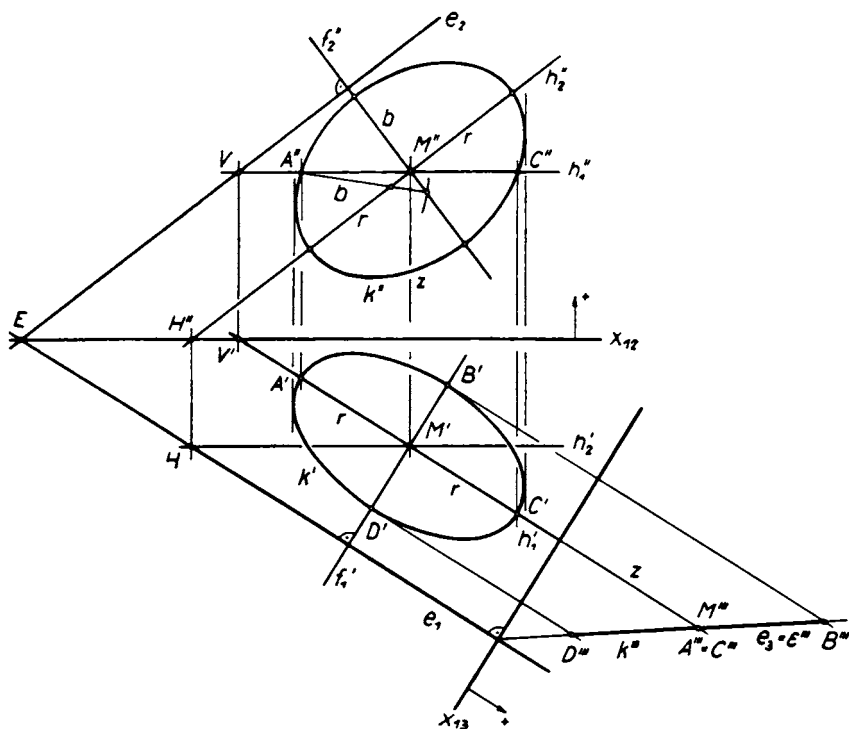


Fig. 90. Darstellung eines Kreises, der in einer beliebigen Ebene ε liegt

Die kleine Achse der Ellipse k' bzw. k'' liegt daher auf dem Grundriß f_1' der ersten Fallinie bzw. dem Aufriß f_2'' der zweiten Fallinie durch M . Führt man eine Seitenrißebene π_3 so ein, daß die Kreisebene ε drittprojizierend ist — die neue Rißachse x_{13} muß dann senkrecht zu e_1 angenommen werden, die dritte Spur $e_3 = \varepsilon'''$ wird durch Übertragen des Kreismittelpunktes M in den Seitenriß gewonnen —, so erscheint auf e_3 der Falliniendurchmesser BD des Kreises im Seitenriß in wahrer Größe: $M'''B''' = M'''D''' = r$. Führt man die Punkte B''' und D''' in den Grundriß zurück, so erhält man mit $B'D'$ die kleine Achse der Grundrißellipse k' .

Für die Aufrißellipse k'' steht außer der auf h_2'' liegenden großen Achse der Länge $2r$ mit A'' auf h_1'' ein weiterer Ellipsenpunkt zur Verfügung. Die Länge b der kleinen Ellipsenhalbachse ergibt sich somit nach der Papierstreifenkonstruktion. Schlägt man mit dem Zirkel den Kreisradius r von A'' aus auf der kleinen Ellipsenachse ab, so gibt sein von A'' bis zur großen Halbachse reichendes Stück die Länge b der kleinen Halbachse.

Sind die Grundriß- und die Aufrißellipse gezeichnet, so bietet sich noch die folgende Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung an: Entsprechende Punkte der beiden Ellipsen k' und k'' liegen jeweils auf einem Ordner. Da dies auch für die äußersten rechten und linken Punkte gilt, müssen die beiden Ellipsen k' und k'' gemeinsame Tangenten in Ordnerichtung haben.

31. Konstruktionen mit unzugänglichen Punkten

In der Zeichenpraxis kommt es immer wieder vor (vgl. Fig. 81), daß man mit Punkten, die außerhalb des Zeichenblattes liegen, mit sogenannten *unzugänglichen Punkten*, Konstruktionen auszuführen hat.

Ist zunächst ein Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt S zweier Geraden a und b zu verbinden (Fig. 91), so betrachtet man den (außerhalb des Zeichenblattes liegenden) Punkt S als Zentrum einer zentrischen Ähnlichkeit. Zwischen den Geraden a und b spannt man ein beliebiges

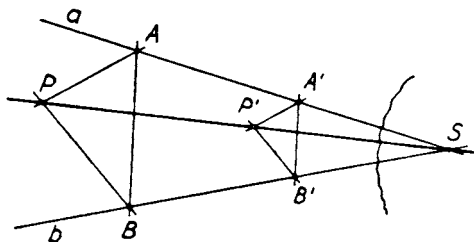


Fig. 91. Konstruktion der Verbindungsgeraden des Punktes P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt S der Geraden a und b

Dreieck (PAB) auf, das eine Ecke in P hat, während die beiden anderen Ecken A und B auf a bzw. b liegen. Nun verschiebt man dieses Dreieck in ein dazu ähnliches und in bezug auf S ähnlich gelegenes Dreieck $(P'A'B')$, d. h. man zeichnet die beliebige Gerade $[A'B'] \parallel [AB]$ und legt durch A' (auf a) die Parallele zu $[AP]$ und durch B' (auf b) die Parallele zu $[BP]$. Dann liegt der Schnittpunkt P' dieser beiden Parallelen auf dem Ähnlichkeitsstrahl des Punktes P , d. h. P' ist ein weiterer (zugänglicher) Punkt der gesuchten Verbindungsgeraden $[PS]$.

Sind sodann zwei unzugängliche Punkte P und Q durch eine Gerade s zu verbinden, so wendet man zur Lösung gleichfalls eine zentrische Ähnlichkeit an. Ist der Punkt P als Schnittpunkt der Geraden a und p , der Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden b und q gegeben, wobei beide Punkte außerhalb

des Zeichenblattes liegen sollen, so übt man auf die gesamte Figur ebenfalls eine *zentrische Ähnlichkeit* aus, d. h. man verkleinert nach Wahl eines beliebigen Ähnlichkeitszentrums O alle Entfernungen von O aus in irgendeinem festen Verhältnis $\lambda \neq 0$. In Fig. 92 ist der Schnittpunkt von p mit q als Ähnlichkeitszentrum O und der Ähnlichkeitsmodul $\lambda = 1/2$ gewählt. Dadurch werden die Geraden a und b auf die halbe Entfernung in die Lage $a' \parallel a$ bzw. $b' \parallel b$ herangeholt, während p und q in sich übergehen. Die (zugänglichen) Schnittpunkte P' von a' und p bzw. Q' von b' und q entsprechen dann zentrisch ähnlich den Punkten P und Q und ihre Verbindungsgerade s' der gesuchten Geraden s . Diese erhält man demnach dadurch, daß man s' parallel mit sich in die doppelte Entfernung von O hinausschiebt, indem man $OX = 2 \cdot OX'$ und $s \parallel s'$ macht.

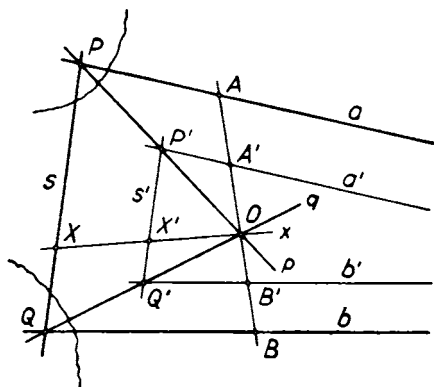


Fig. 92. Konstruktion der Verbindungsgeraden s zweier unzugänglicher Punkte P und Q , die als (unzugängliche) Schnittpunkte zweier Geradenpaare $P = [a, p]$ und $Q = [b, q]$, gegeben sind

V

Darstellung ebenflächig begrenzter Körper im Grund- und Aufrißverfahren

32. Die regulären Polyeder

Die einfachsten räumlichen Körper sind solche, die von Ebenen begrenzt werden. Sie heißen *Vielfläche* oder *Polyeder*. Je zwei benachbarte *Seitenflächen* eines solchen Polyeders schneiden sich in einer *Kante*, je drei zusammenstoßende Seitenflächen in einer *Ecke* des Polyeders.

Für ein *konvexes Polyeder*, d. h. ein solches, bei dem die Verbindungsstrecke von irgend zwei Ecken stets ganz im Innern oder auf der Begrenzung des Polyeders liegt, gilt der

Eulersche Polyedersatz: *Zwischen der Anzahl e der Ecken, der Anzahl k der Kanten und der Anzahl f der Seitenflächen eines konvexen Polyeders besteht die nach Leonhard Euler (1707–1783) benannte, aber nach dem Zeugnis von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) schon René Descartes (1596–1680) bekannte Beziehung:*

$$(1) \quad e - k + f = 2.$$

Konvexe Polyeder, deren sämtliche Seitenflächen reguläre Vielecke gleicher Art sind, heißen *reguläre Polyeder* oder *Platonische Körper*. Es gibt nach EUKLID (300 v. Chr.) insgesamt fünf solche reguläre Polyeder, nämlich:

Reguläre Polyeder	e	k	f	die Seitenflächen sind
Tetraeder	4	6	4	Dreiecke
Hexaeder (Würfel)	8	12	6	Quadrate
Oktaeder	6	12	8	Dreiecke
Dodekaeder	20	30	12	Fünfecke
Ikosaeder	12	30	20	Dreiecke

Wie dieser Zusammenstellung zu entnehmen ist, stehen sich der Würfel (Hexaeder) und das Oktaeder sowie das Dodekaeder und das Ikosaeder im Sinne des räumlichen Dualitätsprinzips *dual* gegenüber, während das

Tetraeder *selbstdual* ist. Vertauscht man in einem Satze z. B. des Würfels die Begriffe Ecken und Seitenflächen und die des Verbindens und Schneidens, so erhält man als dualen Satz einen für das Oktaeder gültigen Satz. Diese *Dualität der Platonischen Körper* war schon (1532) dem Italiener FRANCESCO MAUROLICO (1494–1575) bekannt.

Das reguläre Tetraeder, das von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, kann man auf folgende Weise erzeugen:

Zeichnet man in einem Würfel gemäß Fig. 93 die Diagonalen der 6 Seitenflächen, so bilden je drei von ihnen ein gleichseitiges Dreieck. Da insgesamt 4 solche Dreiecke entstehen, sind die 6 Diagonalen die Kanten eines Tetraeders.

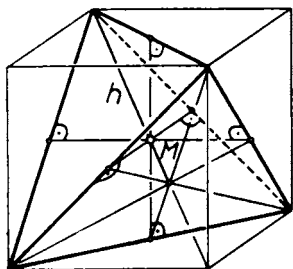


Fig. 93. Reguläres Tetraeder und umbeschriebener Würfel (Hexaeder)

Aus der Symmetrie des Würfels gehen leicht einige Eigenschaften des Tetraeders hervor.

Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Gegenflächen des Würfels steht auf diesen Flächen senkrecht und ihre Länge ist gleich dem Abstand dieser Würfelflächen. Für das Tetraeder folgt daraus:

Satz 1: *Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Gegenkanten eines Tetraeders ist deren Gemeinlot; auf ihm liegt der kürzeste Abstand zwischen diesen Gegenkanten.*

Da diese Gemeinlote zu den Würfelfkanten parallel sind und durch den Würfelmittelpunkt gehen, folgt weiter:

Satz 2: *Die drei Gemeinlote der Gegenkanten eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt M des Tetraeders, und stehen paarweise aufeinander senkrecht.*

Auf den vier Raumdiagonalen des Würfels liegen die Höhen des Tetraeders. Daher gilt für das Tetraeder der

Satz 3 (Höhensatz): *Die vier Höhen eines Tetraeders (Lote von den Ecken auf die Gegenflächen) schneiden sich im Tetraedermittelpunkt.*

Das Oktaeder besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken, in jeder Ecke stoßen 4 Kanten und 4 Seitenflächen zusammen.

Benachbarte Mittelpunkte der 6 Seitenflächen des zum Oktaeder dualen Würfels spannen zu je dreien gleichseitige Dreiecke auf und bilden die 6 Eckpunkte eines Oktaeders (Fig. 94). Die 8 Mittelpunkte der Seitenflächen eines Oktaeders bilden ihrerseits wieder die Ecken eines Würfels.

Das Dodekaeder ist aus 12 regulären Fünfecken aufgebaut; in jeder Ecke stoßen 3 Kanten und 3 Seitenflächen zusammen. Fig. 95 zeigt ein mit einer Seitenfläche auf der Grundrißebene stehendes Dodekaeder.

Das Ikosaeder besitzt als Seitenflächen 20 gleichseitige Dreiecke. In jeder Ecke stoßen 5 Kanten und 5 Seitenflächen zusammen. Es kann gemäß Fig. 96 aus dem dualen Dodekaeder dadurch erzeugt werden, daß man die Mittelpunkte benachbarter Dodekaederflächen miteinander verbindet. Umgekehrt bilden die Flächenmitten des Ikosaeders ein Dodekaeder.

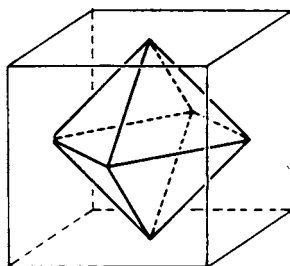


Fig. 94. Würfel (Hexaeder) und Oktaeder, dessen Ecken in den Mitten der Würfel­flächen liegen

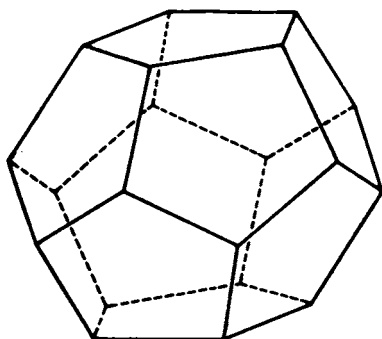


Fig. 95. Dodekaeder

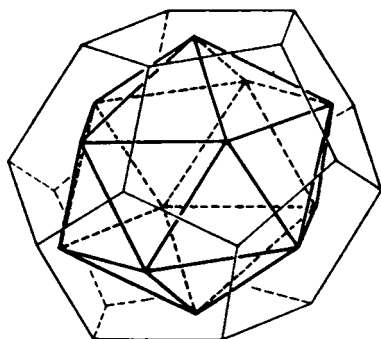


Fig. 96. Ikosaeder, dessen Ecken in den Mitten der Dodekaeder­flächen liegen

33. Der allgemeine Satz von Desargues. Perspektive Kollineation

Eine dreiseitige Pyramide mit dem in der Ebene σ gelegenen Basisdreieck (ABC) und der Spitze S , die ein allgemeines Tetraeder (mit beliebigen Dreiecken als Seitenflächen) darstellt, werde mit einer zweiten Ebene σ' geschnitten, die zu σ nicht parallel sei (Fig. 97). Die Ebene σ' sei festgelegt durch die (eigentliche) Schnittgerade s von σ und σ' und den Schnittpunkt C' von σ' mit der Seitenkante $[SC]$ der Pyramide. Um die Schnittpunkte B' und A' der weiteren Pyramidenkanten $[SB]$ und $[SA]$ mit der Ebene σ' zu finden, schneiden wir die Pyramidenfläche $[SCB]$ mit der Ebene σ' . Die gesuchte Schnittgerade a' geht durch C' und durch den Punkt \mathfrak{A} , in dem die Seite $a = [BC]$ des Basisdreiecks die Gerade s trifft. Der Punkt B' ist nun als Schnitt von a' und der Kante $[SB]$ bestimmt. Der dritte Eckpunkt A' des Schnittdreiecks $(A'B'C')$ kann nun nach demselben

Verfahren über den Punkt \mathcal{C} , in dem die Seite $c = [BA]$ die Gerade s trifft, konstruiert werden. Dann muß die dritte Seite $b' = [A'C']$ des Schnittdreiecks sich mit der Seite $b = [AC]$ in einem Punkt \mathcal{B} treffen, der gleichfalls der Geraden s angehört. Diese Tatsache ist der Inhalt des berühmten Satzes von DESARGUES in seiner folgenden allgemeinen Fassung.

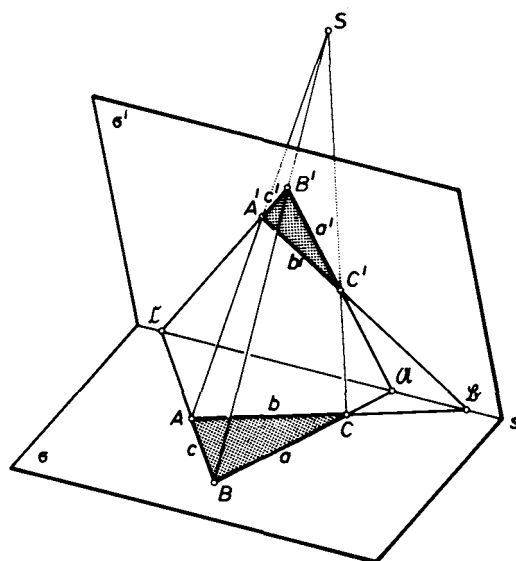


Fig. 97. Allgemeiner Satz von DESARGUES. Perspektivische Kollineation zwischen zwei Ebenen σ und σ' (Kollineationszentrum S , Kollineationsachse s ; Kollineationsstrahlen $[A A']$ laufen durch S , kollineare Geraden a, a' schneiden sich auf s)

Satz von Desargues (1648) über zentralperspektivische Dreiecke: Sind zwei Dreiecke zueinander zentralperspektiv gelegen, d. h. gehen die drei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden Dreiecke durch einen festen Punkt S , so schneiden sich entsprechende Seiten der beiden Dreiecke in drei Punkten einer festen Geraden s . Diese Gerade heißt die Perspektivitätsachse oder Desarguessche Achse der beiden zentralperspektiv aufeinander bezogenen Dreiecke.

Der in 5. bewiesene DESARGUESSCHE Satz für

zwei zueinander parallelperspektiv gelegene Dreiecke ist ein Grenzfall des allgemeinen DESARGUESSCHEN Satzes, der aus diesem dadurch hervorgeht, daß man das Zentrum S der Zentralperspektive in einen Fernpunkt rücken läßt.

Durch die Zentralprojektion der Ebene σ aus dem Projektionszentrum S auf die Ebene σ' wird zwischen diesen Ebenen eine wichtige geometrische Verwandtschaft hergestellt. Sie heißt nach LUDWIG IMMANUEL MAGNUS (1833) eine perspektivische Kollineation. Der Punkt S heißt Zentrum, die Gerade s Achse der perspektivischen Kollineation (Fig. 97). Punkte wie A und A' , die auf einer Geraden durch S , auf einem Kollineationsstrahl liegen, bilden ein Paar kollinear entsprechender Punkte. Aus dem DESARGUESSCHEN Satz entnimmt man die folgenden schon GIRARD DESARGUES bekannten Grundeigenschaften einer perspektivischen Kollineation zwischen den Ebenen σ und σ' :

1. Entsprechende Punkte liegen auf einem Kollineationsstrahl durch das Zentrum S .
2. Die Punkte der Kollineationsachse entsprechen sich selbst.
3. Jeder Geraden entspricht eine Gerade (daraus erklärt sich die Bezeichnung „Kollineation“).
4. Entsprechende Geraden treffen sich auf der Kollineationsachse.

Die in 6. besprochene perspektivische Affinität zwischen zwei Ebenen ist ein Grenzfall der perspektivischen Kollineation; sie entsteht aus dieser, wenn das Kollineationszentrum S ins Unendliche rückt.

Um die Eigenschaften einer perspektivischen Kollineation in der oben gewählten Weise ohne Einschränkung allgemein formulieren zu können, muß man die Fernpunkte der beiden Ebenen als gleichberechtigt zu den eigentlichen Punkten hinzunehmen. Im Gegensatz zur perspektivischen Affinität, bei der Fernpunkte stets wieder in Fernpunkte übergehen, gibt es bei der perspektivischen Kollineation eigentliche Punkte V der einen Ebene σ , deren kollineare Punkte V' in der anderen Ebene σ' im Unendlichen liegen (im Unendlichen „verschwinden“), nämlich alle jene Punkte V in σ , deren Kollineationsstrahlen $[SV]$ zu σ' parallel sind. Diese Punkte V in σ heißen daher die *Verschwindungspunkte* der Kollineation. Umgekehrt haben die Fernpunkte U der Ebene σ eigentliche Punkte U' in σ' als kollinear zugeordnete Punkte; denn ein zur Ebene σ paralleler Kollineationsstrahl $[SU]$ trifft die Ebene σ' in einem eigentlichen Punkt U' , einem sogenannten *Fluchtpunkt* der Kollineation.

Die Gesamtheit der Verschwindungspunkte V in σ bildet dabei eine Gerade v , die Schnittgerade von σ mit der durch das Zentrum S laufenden Parallelebene zu σ' , welche die Ebene σ' in ihrer Ferngeraden v' schneidet. Auch diese Verschwindungsgerade v von σ und die Ferngerade v' von σ' entsprechen sich in der perspektivischen Kollineation.

Die Gesamtheit der Fluchtpunkte U' in σ' bildet ebenfalls eine Gerade u' , die Schnittgerade von σ' mit der durch das Zentrum S laufenden Parallelebene zu σ , welche die Ebene σ in ihrer Ferngeraden u schneidet. Auch diese Fluchtgerade u' von σ' ist der Ferngeraden u von σ in der perspektivischen Kollineation zugeordnet.

Zusammenfassend gilt der von dem Holländer WILHELM JAKOB S'GRAVE-SANDE (1711) und dem Engländer BROOK TAYLOR (1719) stammende

Satz 1: *In einer perspektivischen Kollineation zwischen zwei Ebenen σ und σ' entspricht*

1. der Verschwindungsgeraden v von σ die Ferngerade v' von σ' und
2. der Ferngeraden u von σ die Fluchtgerade u' von σ' .

Aus der Tatsache, daß *gegenüber Zentralprojektionen eigentliche Geraden* (wie v und u') und *Ferngeraden* (wie v' und u) *gleichberechtigt* sind, weil eigentliche Geraden durch Zentralprojektion in Ferngeraden verwandelt werden können (und umgekehrt), folgt jetzt auch die Rechtfertigung der seinerzeitigen Festsetzung, daß die *Fernpunkte einer (projektiven) Ebene insgesamt eine Ferngerade bilden* sollen.

Projiziert man die in Fig. 97 dargestellte räumliche Konfiguration durch *parallele Sehstrahlen* in eine Ebene (man denke sich in Fig. 97 die Umrahmungen der Ebenen σ und σ' weggelöscht), dann erhält man eine ebene Figur, für die gleichfalls der **DESARGUESSE** Satz gilt. Die durch Zentralprojektion aus S hergestellte Verwandtschaft zwischen den beiden (jetzt ineinanderliegenden) ebenen Feldern σ und σ' , die man sich als zwei einander überdeckende Ebenen, als kollokale Ebenen vorzustellen hat, ist eine ebene perspektive Kollineation. Sie besitzt genau dieselben Eigenschaften, wie sie oben für die räumliche perspektive Kollineation zwischen den Ebenen σ und σ' angeführt wurden. Insbesondere gilt

Satz 2: *Eine ebene perspektive Kollineation ist eindeutig durch das Zentrum S , die Achse s und ein Paar entsprechender Punkte P, P' bestimmt.*

Aus Fig. 98 ist leicht zu ersehen, wie man die so bestimmte ebene perspektive Kollineation *vervollständigen* kann, d. h. wie man zu einem beliebigen Punkte X , der nicht auf dem Kollineationsstrahl $[PP']$ liegt, ferner zu einem Punkte Y auf diesem Strahl und schließlich zu einer beliebigen Geraden g die perspektiv-kollinearen Bilder X' , bzw. Y' und g' findet.

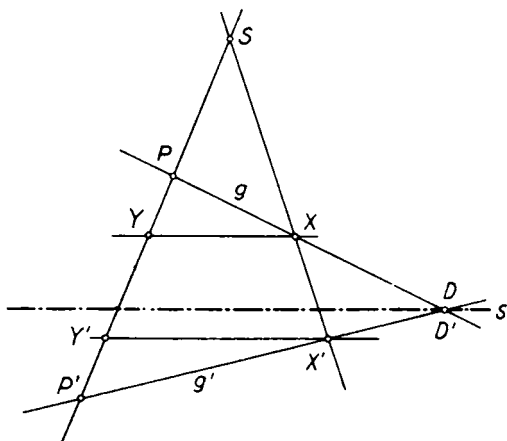


Fig. 98. Ebene perspektive Kollineation, festgelegt durch das Kollineationszentrum S , die Kollineationsachse s und ein Paar kollinear Punkte (P, P') . Vervollständigung der ebenen perspektiven Kollineation

Bemerkung 1: Für den axiomatischen Aufbau der ebenen projektiven Geometrie ist bemerkenswert, daß es nicht möglich ist, den **DESARGUES** Satz der Ebene allein mit Hilfe der **Lagensätze** der ebenen projektiven Geometrie zu beweisen. Wie **FELIX KLEIN** (1873) vermutet und **DAVID HILBERT**

(1899) bewiesen hat, braucht man bei diesem Beweise auch noch gewisse **Lagensätze** der projektiven Geometrie des Raumes.

34. Ebener Schnitt einer Pyramide

Eine dreiseitige Pyramide mit der Spitze S stehe mit dem Basisdreieck (ABC) auf der Grundrißebene π_1 . Gesucht wird der *Schnitt der Pyramide mit einer beliebigen Ebene ε* .

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Schnittebene ε als zweitprojizierend annehmen. Den Fall allgemeiner Lage der Ebene ε kann man nämlich durch Wahl einer erstprojizierenden Seitenrißebene π_3 senkrecht zur Grundrißspur e_1 der Ebene ε auf diesen Sonderfall zurückführen, da die Ebene ε dann drittprojizierend ist. Die Grundrißspur e_1 der zweitprojizierenden Ebene ε steht im Knoten E auf der Rißachse x_{12} senkrecht, während ihre Aufrißspur e_2 beliebig durch E verläuft (Fig. 99). Im Aufriß stellt sich das Schnittdreieck $(A_1B_1C_1)$ als Strecke auf e_2 dar, und die Aufrisse A_1'', B_1'', C_1'' der Eckpunkte sind die Verschneidungen zwischen e_2 und den Aufrissen $[S''A'']$, $[S''B'']$, $[S''C'']$ der Pyramidenkanten. Den Grundriß $(A_1'B_1'C_1')$ der Schnittfigur findet man nun durch Ordner.

Ergeben sich dabei, wie in Fig. 99 für den Punkt A_1' , schleiende Schnitte, dann gibt es verschiedene Möglichkeiten, sich den Punkt im Grundriß auf andere Weise genauer zu verschaffen. Z. B. kann man von der Invarianz des Teilverhältnisses dreier Punkte Gebrauch machen, nach der

$$(1) \quad (S'A' \cdot A_1') = (SA \cdot A_1) = (S''A'' \cdot A_1'')$$

ist. Oder man benutzt die Tatsache, daß nach 33. das Schnittdreieck $(A_1B_1C_1)$ und das Basisdreieck (ABC) zueinander perspektiv kollinear sind, wobei die Pyramidenspitze S das Kollineationszentrum und die Schnittgerade $s = e_1 = [\varepsilon, \pi_1]$ von ε und π_1 Kollineationsachse ist. Die gleiche Eigenschaft kommt auch ihren Grundrissen zu, d. h. *zwischen den Dreiecken $(A'B'C')$ und $(A_1'B_1'C_1')$ besteht eine ebene perspektive Kollineation mit S' als Kollineationszentrum und $s = e_1$ als Kollineationsachse*. Entsprechende Seiten des Schnittdreiecks und des Basisdreiecks schneiden sich daher jeweils in einem Punkt von e_1 . Hat man demnach einen Punkt des Schnittdreiecks, etwa B_1' , im Grundriß bestimmt, dann ergeben sich die beiden anderen Punkte A_1' und C_1' durch Konstruktion der den Geraden $[B'A']$ bzw. $[B'C']$ perspektiv kollinear entsprechenden Geraden $[B_1'A_1']$ bzw. $[B_1'C_1']$. Die Geraden $[B'A']$ und $[B_1'A_1']$ müssen sich somit in einem Punkt \mathfrak{C} , ebenso $[B'C']$ und $[B_1'C_1']$ in einem Punkt \mathfrak{U} und schließlich (Kontrolle!) $[A'C']$ und $[A_1'C_1']$ in einem Punkt \mathfrak{B} der Kollineationsachse e_1 treffen.

Will man von der Pyramide ein Modell herstellen, dann benötigt man die *Abwicklung*, das *Netz der Pyramide*. Die wahre Gestalt des Basis-

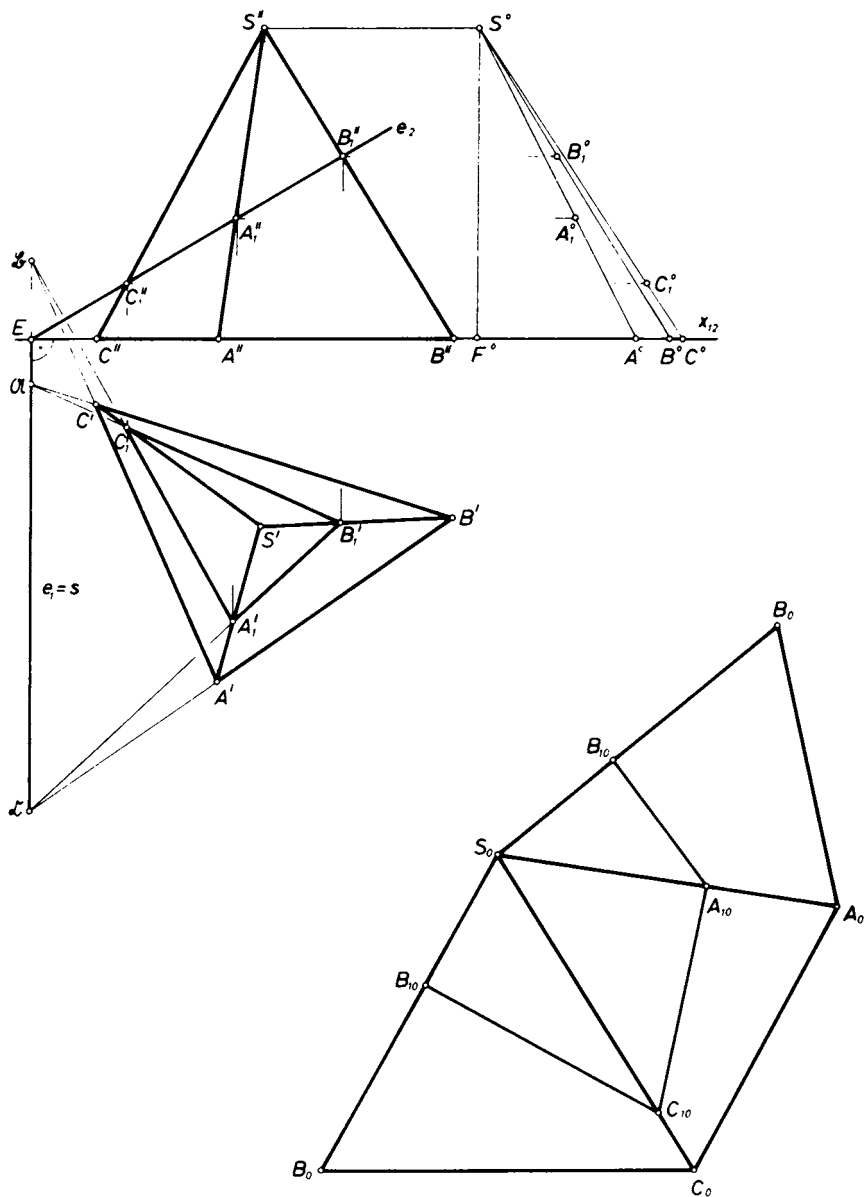


Fig. 99a (oben). Konstruktion des ebenen Schnittes einer dreiseitigen Pyramide
 Fig. 99b (unten). Abwicklung des Mantels und des ebenen Schnittes der dreiseitigen
 Pyramide in Fig. 99a

dreiecks (ABC) geht unmittelbar aus dem Grundriß $(A'B'C')$ hervor. Um die Abwicklung des Pyramidenmantels zu konstruieren, benötigt man die wahren Längen der drei Pyramidenkanten. Diese findet man durch Paralleldrehen der Kanten, was man zweckmäßig in einer besonderen Zeichnung ausführt. Man hat dazu die rechtwinkligen Dreiecke $(S^0F^0A^0)$, $(S^0F^0B^0)$ und $(S^0F^0C^0)$ zu konstruieren, deren gemeinsame Kathete S^0F^0 gleich der Pyramidenhöhe ist, während die Basiskatheten $F^0A^0 = S'A'$, $F^0B^0 = S'B'$, $F^0C^0 = S'C'$ in wahrer Größe dem Grundriß zu entnehmen sind. Die Hypotenusen sind dann die wahren Kantenlängen der Pyramide. Dreht man mit den Eckpunkten des Basisdreiecks (ABC) zugleich auch die Eckpunkte des Schnittdreiecks $(A_1B_1C_1)$ in die Parallellage zur Aufrißebene, dann legen die gedrehten Punkte A_1^0, B_1^0, C_1^0 und S^0 die wahren Abstände der Punkte A_1, B_1, C_1 von der Pyramidenspitze S fest.

Nun kann man sofort das Netz des (längs der Kante SA aufgeschnittenen) Pyramidenmantels samt den darauf liegenden Seiten des Schnittdreiecks $(A_1B_1C_1)$ zeichnen, da von den dreieckigen Pyramidenseitenflächen jeweils die Längen der Dreiecksseiten bekannt sind (Fig. 99 b).

35. Ebener Schnitt eines Prismas

Ein dreiseitiges Prisma mit dem Grunddreieck (ABC) und dem Deckdreieck $(A_1B_1C_1)$ soll mit einer Ebene ε senkrecht zur Kantenrichtung geschnitten werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir das Prisma in einer solchen Lage annehmen, daß seine Kanten zur Aufrißebene parallel sind. Denn bei allgemeiner Lage läßt sich diese Sonderlage stets durch Einführen einer Seitenrißebene parallel zur Kantenrichtung herstellen.

Um einen *Normalschnitt* des Prismas zu erhalten, muß die Horizontalspur e_1 der Schnittebene ε senkrecht zum Grundriß, ihre Vertikalspur e_2 senkrecht zum Aufriß der Prismenkanten liegen (Fig. 100). Die Schnittebene ε ist also bei der gewählten Prismenlage zweitprojizierend, weshalb das Schnittdreieck (123) sich im Aufriß als Strecke $(1''2''3'')$ abbildet. Seinen Grundriß $(1'2'3')$ findet man mit Hilfe der Ordner.

Die Grundrißebene π_1 und die Schnittebene ε schneiden das Prisma je in einem Dreieck. Da entsprechende Punkte der beiden Dreiecke einer Prismenkante angehören, sind die Dreiecke in parallelperspektiver Lage. *Zwischen dem Grunddreieck (ABC) und dem Schnittdreieck (123) besteht daher eine perspektive Affinität, und das gleiche gilt auch für deren Grundrisse. Affinitätsrichtung ist dabei die Kantenrichtung, Affinitätsachse die*

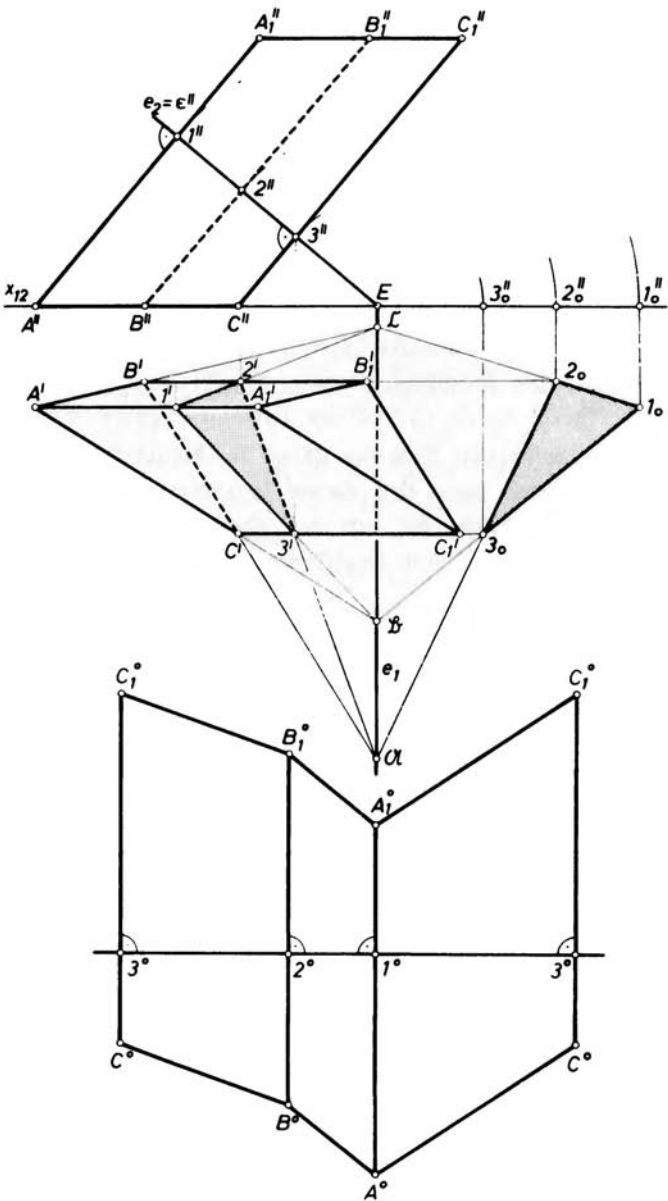


Fig. 100a (oben). Konstruktion des ebenen Schnittes (Normalschnittes) eines dreiseitigen Prismas

Fig. 100b (unten). Abwicklung des Mantels und ebenen Schnittes des dreiseitigen Prismas in Fig. 100a

Horizontalspur e_1 der Schnittebene. Daher müssen sich entsprechende Seiten des Basisdreiecks und des Schnittdreiecks in Punkten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} der Achse e_1 schneiden (Kontrolle!).

Um das *Netz des Prismas* zu erhalten, benötigt man zunächst die wahre Größe ($1_0 2_0 3_0$) des Normalschnittes. Diese findet man durch Umlegen der Schnittebene ε um ihre erste Spur e_1 in die Grundrißebene π_1 . Bei der Abwicklung des längs der Kante CC_1 aufgeschnittenen Prismenmantels wird der Normalschnitt ($1\ 2\ 3$) geradegestreckt. Dadurch ergeben sich zunächst die Punkte $3^0, 2^0, 1^0, 3^0$ der Abwicklung (Fig. 100). Die Prismenkanten erscheinen in der Abwicklung als Lote zu dieser Geraden; die wahren Entfernungen der Punkte des Grund- und des Deckdreiecks von dieser Geraden sind dem Aufriß zu entnehmen.

36. Durchdringung zweier ebenflächig begrenzter Körper

Als Beispiel für die Durchdringung zweier ebenflächig begrenzter Körper behandeln wir die *Durchdringung eines dreiseitigen Prismas mit einer dreiseitigen Pyramide*. Bei beliebiger Lage der Körper kann durch zweimaliges Umprojizieren stets erreicht werden, daß die Kanten des Prismas in bezug auf die zweite Seitenrißebene projizierend sind, so daß sein Normalschnitt in dieser Ebene in wahrer Größe erscheint. Es bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Prismenkanten u, v, w von vornherein zur Aufrißebene senkrecht annehmen. Die dreiseitige Pyramide mit der Spitze S und dem Basisdreieck (PQR) stehe auf der Grundrißebene (Fig. 101). Die beiden Körper durchdringen sich je nach ihrer Lage in einem oder zwei geschlossenen windschiefen Polygonen, deren Gestalt im Grundriß gesucht wird. Ihr Aufriß deckt sich mit dem Aufriß des Prismas.

Das räumliche Durchdringungspolygon kann auf zweierlei Weise bestimmt werden:

1. Kantenmethode: Schneidet man sämtliche Kanten des Prismas mit den Seitenflächen der Pyramide und umgekehrt sämtliche Pyramidenkanten mit den Prismenflächen, so erhält man die *Ecken des Polygons*.

2. Ebenenmethode: Schneidet man jede Seitenfläche des Prismas mit jeder Seitenfläche der Pyramide, so ergeben sich die *Seiten des Polygons*.

Nach der Kantenmethode ergeben sich die Eckpunkte des Polygons durch folgende Konstruktionsschritte:

In Fig. 101 trifft von den Pyramidenkanten lediglich die Kante $[SQ]$ das Prisma, wie der Aufriß zeigt. Die Durchstoßpunkte T und \bar{T} sind

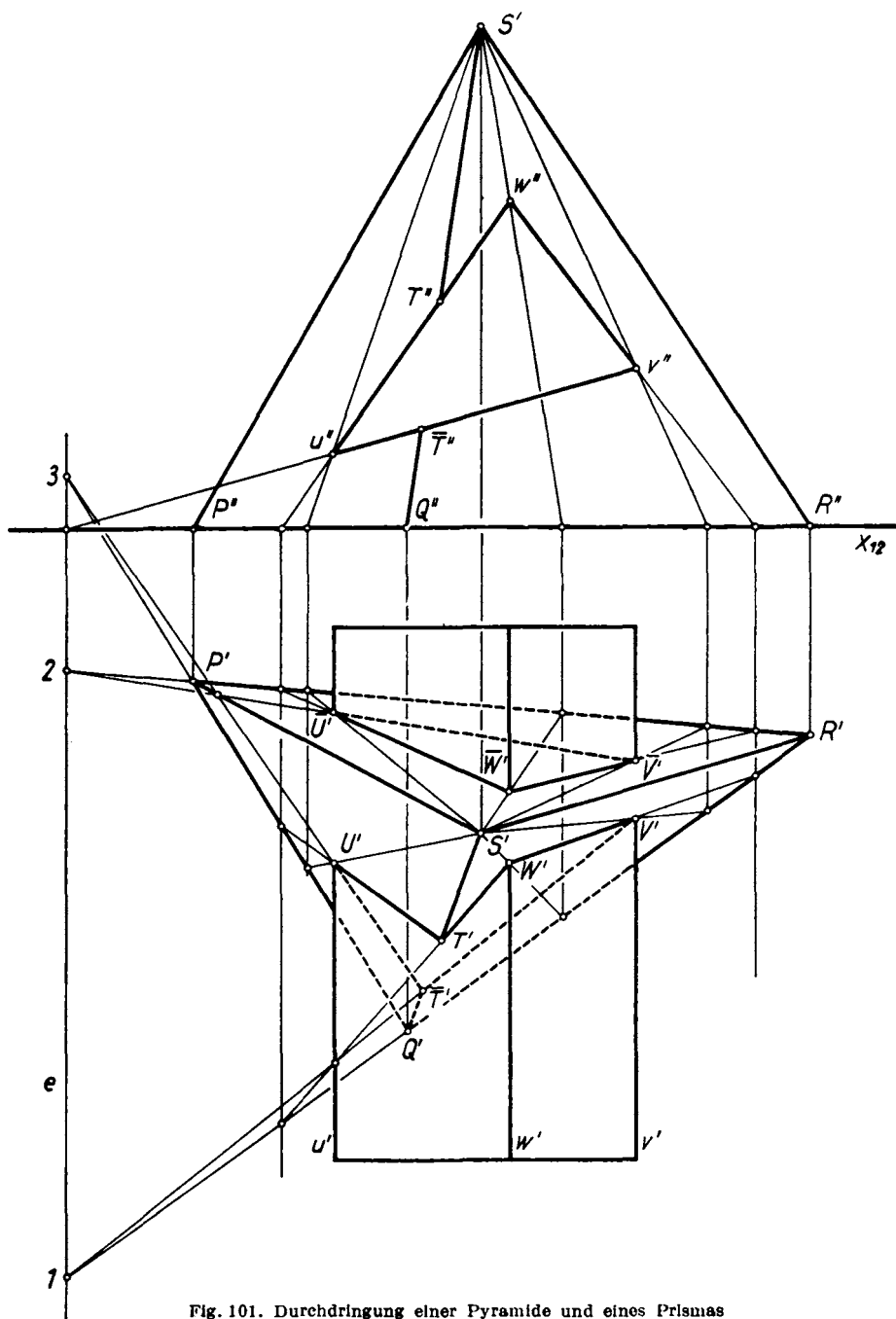


Fig. 101. Durchdringung einer Pyramide und eines Prismas

im Aufriß unmittelbar zu ersehen, womit auch die Grundrisse T' und \bar{T}' auf $[S'Q']$ festliegen. Um eine Prismenkante mit den Pyramidenflächen zu schneiden, legen wir eine *Hilfsebene durch die Prismenkante und die Pyramidenspitze S* . Diese schneidet die Pyramide in Mantellinien, auf denen die gesuchten Durchstoßpunkte der Prismenkante liegen. Die durch die Prismenkante u und die Pyramidenspitze S gelegte Hilfsebene ist zweitprojizierend. Ihre Aufrißspur, zugleich ihr Aufriß, ist die Gerade $[S''u'']$. Auf ihrer Grundrißspur (die im Knoten auf der Rißachse x_{12} senkrecht steht) und auf den Seiten des Pyramidenbasisdreiecks (PQR) liegen die Horizontalspurpunkte derjenigen beiden Mantellinien, die von der Hilfsebene aus den Pyramidenseitenflächen ausgeschnitten werden. Ihre Schnittpunkte U bzw. \bar{U} mit der Prismenkante u sind deren Durchstoßpunkte mit den Pyramidenflächen $[SPQ]$ bzw. $[SPR]$. Ebenso findet man die Durchstoßpunkte V, \bar{V} der Prismenkante v und W, \bar{W} der Prismenkante w mit der Pyramide. Damit sind sämtliche *Eckpunkte der Durchdringungsfigur* im Grundriß gefunden. Sie besteht aus dem windschiefen Polygon $(U'T'V'W'T'U')$ und aus dem Dreieck $(\bar{U}'\bar{V}'\bar{W}')$. Dabei sind die Seiten $(U'\bar{T}'V')$ und $(\bar{U}'\bar{V}')$ unsichtbar, da sie auf der Unterseite $[uv]$ des Prismas liegen.

Demgegenüber liefert die Ebenenmethode die Seiten des Schnittpolygons. Man wird sie an den Stellen anwenden, an denen die Kantenmethode schlechte Schnitte liefert; vor allem aber ist sie zur *Kontrolle* des gefundenen Polygons sehr geeignet. Drei Ebenen allgemeiner Lage schneiden sich paarweise in drei Geraden, die durch einen Punkt, den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Ebenen, gehen. Wählt man als eine Ebene die Grundrißebene, als zweite Ebene eine Prismenseitenfläche und als dritte Ebene eine Pyramidenseitenfläche, dann *treffen sich die Grundrißspur der Prismenebene, die Grundrißspur der Pyramidenebene und die Polygonseite, welche diesen beiden Ebenen angehört, in einem Punkt* (Dreiebenenverfahren).

In Fig. 101 ist diese Kontrolle für sämtliche Seiten des Schnittpolygons durchgeführt. So schneiden sich z. B. auf der Horizontalspur e der Prismenebene $[uv]$ die Horizontalspur $[Q'R']$ der Pyramidenfläche $[SQR]$ und der Grundriß $[\bar{T}'V']$ der Polygonseite $[\bar{T}'V]$ in einem Punkte 1, ebenso $[P'R']$ und $[\bar{U}'\bar{V}']$ in einem Punkte 2 und schließlich $[P'Q']$ und $[U'\bar{T}']$ in einem Punkte 3.

Der Grundgedanke, der jeder *Durchdringungskonstruktion zwischen einem Prisma und einer Pyramide* zugrunde liegt, ist der folgende:

Man legt geeignete *Hilfsebenen* durch die *Pyramidenspitze parallel zu den Kanten des Prismas*. Jede derartige Ebene, die außerdem durch eine Prismenkante gelegt wird, schneidet die Pyramidenflächen in Mantellinien, auf denen die Durchstoßpunkte der betreffenden Prismenkante liegen. Entsprechend schneidet jede Ebene dieses Ebenenbüschels, die gleichzeitig eine Pyramidenkante enthält, das Prisma in Mantellinien, auf denen die Durchstoßpunkte der betreffenden Pyramidenkante liegen.

Eine analoge Überlegung führt zu den Eckpunkten des *Durchdringungspolygons zwischen zwei Prismen*: Als *Hilfsebenen* sind Ebenen *parallel zu den Kanten beider Prismen* zu wählen. Sie schneiden beide Prismen in Mantellinien. Insbesondere schneidet jede Ebene dieser Parallelebenen-schar, die eine Prismenkante enthält, die Seitenflächen des anderen Prismas in Mantellinien, auf denen die Durchstoßpunkte der gewählten Prismenkante liegen (und umgekehrt).

Ist schließlich das *Durchdringungspolygon zwischen zwei Pyramiden* zu konstruieren, so kommen als *Hilfsebenen* solche Ebenen in Betracht, die *durch beide Pyramidenspitzen* gehen. Diese Hilfsebenen bilden ein *Ebenenbüschel* mit der Verbindungsgeraden der beiden Pyramidenspitzen als Achse; man spricht deshalb auch von den durch diese Achse gehenden *Pendelebenen*. Jede Ebene dieses Ebenenbüschels (jede Pendelebene) schneidet beide Pyramiden in Mantellinien. Die Durchstoßpunkte der Kanten der einen Pyramide durch die Seitenflächen der anderen Pyramide findet man dann dadurch, daß man diejenigen Pendelebenen auswählt, die eine Pyramidenkante enthalten.

Die *Seitenkanten* des Durchdringungspolygons ergeben sich in allen diesen Fällen nach der oben dargelegten *Ebenenmethode*; insbesondere erhält man die *Spurpunkte* der Polygonkanten wieder nach dem sehr einfachen *Dreiebenenverfahren*. Aus Gründen der Genauigkeit der Konstruktion ist es zweckmäßig, sowohl die Kantenmethode als auch die Ebenenmethode anzuwenden und alle dabei möglichen Kontrollen zu beachten.

VI

Schrägrisse räumlicher Objekte

37. Das Schrägrißverfahren

Zur anschaulichen Erläuterung räumlicher Konstruktionen und zur sinnfälligen Darstellung räumlicher Objekte haben wir uns bisher in unseren anschaulichen Bildern einer *schiefen Parallelprojektion* bedient, die einen *Schrägriß* der räumlichen Figur liefert. Ein besonders einfaches, diesen Erläuterungsskizzen zugrunde liegendes Konstruktionsverfahren, das bei gegebenem Grundriß und Aufriß des Objektes seinen Schrägriß zu konstruieren gestattet, ist das folgende *Schrägrißverfahren*.

Wir denken uns in der üblichen Weise mit dem aus der Grundrißebene π_1 und der Aufrißebene π_2 gebildeten orthogonalen Tafelsystem ein rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem $O(x, y, z)$ verbunden, so daß sich seine y -Achse mit der Rißachse x_{12} deckt, während die x -Achse der Grundrißebene und die z -Achse der Aufrißebene angehört (Fig. 102).

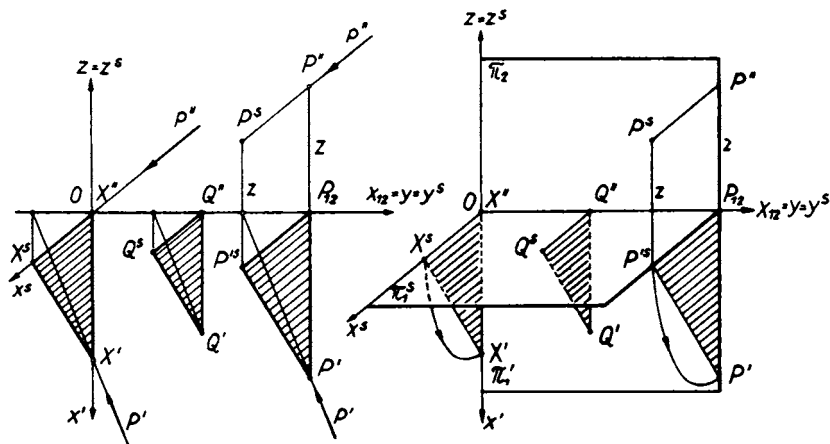


Fig. 102 (links). Schrägrißverfahren (Schiefe Projektion auf die Aufrißebene π_2) Sehrichtung p und Projektionsdreieck (konstruktive Erklärung)

Fig. 103 (rechts). Schrägrißverfahren. Drehschnehen, Verkürzungsdreieck (anschauliche Ausführung)

Eine beliebige schräge Richtung p (Grundriß p' , Aufriß p'') sei als Projektionsrichtung, die Zeichenebene (Aufrißebene π_2) als Bildebene gewählt.

Ein beliebiger Punkt X auf der x -Achse, gegeben durch seinen Grundriß X' und seinen Aufriß X'' , hat dann seinen Schrägriß X^s in dem Vertikalspurpunkt des durch X gelegten Projektionsstrahls p . Der Schrägriß x^s der x -Achse ist daher die durch O und X^s bestimmte Gerade, während der Schrägriß der y -Achse und der der z -Achse sich mit der y -Achse bzw. z -Achse deckt ($y^s = y, z^s = z$).

Da die Projektionsrichtung p beliebig gewählt werden kann, ist sowohl die Richtung x^s des Schrägrisses der x -Achse als auch die Lage des Punktes X^s auf x^s beliebig wählbar. Das von den Punkten O, X', X^s gebildete Dreieck heißt das Projektionsdreieck oder Verkürzungsdreieck für den Schrägriß. Seine Seiten liegen auf der (vertikalen) x -Achse, dem (beliebig gerichteten) Schrägriß x^s der x -Achse und auf der beliebigen Geraden $[X'X^s]$. Die dritte Seite $[X'X^s]$ ist der Schrägriß der Drehsehne jener Vierteldrehung um die Rißachse x_{12} , welche die (horizontale) Grundrißebene π_1 in die (vertikale) Zeichenebene (Aufrißebene π_2) hineindreht (Fig. 103).

Ist Q ein beliebiger Punkt der Grundrißebene, dann kann sein Schrägriß Q^s aus dem Grundriß Q' und Aufriß Q'' entweder mit dem durch Q gelegten Projektionsstrahl p oder einfacher über das Verkürzungsdreieck für den Punkt Q konstruiert werden. *Die Verkürzungsdreiecke aller in der Grundrißebene π_1 liegenden Punkte sind zueinander ähnlich, und entsprechende Seiten sind zueinander parallel.*

Zur Konstruktion des Schrägrisses P^s eines beliebigen Raumpunktes P , dessen Grundriß P' und Aufriß P'' bekannt sind, kann man sich ebenfalls wieder des Projektionsstrahls p durch P bedienen und seinen Bildspurpunkt P^s suchen; zweckmäßiger konstruiert man mit Hilfe des Verkürzungsdreiecks zunächst den Schrägriß P'^s des Grundrisses P' , den sogenannten *Schräggrundriß* P'^s des Punktes P . Dann liegt der *Schräggriß* P^s um die wahre z -Kote des Punktes P lotrecht über dem Schräggrundriß P'^s . Liegt der Raumpunkt P insbesondere in der Aufrißebene (Bildebene π_2), so fällt er mit seinem Schrägriß P^s zusammen.

Wir fassen zusammen:

Um den Schrägriß eines beliebigen Raumpunktes P zu konstruieren, wähle man das Verkürzungsdreieck für seinen Grundriß P' so, daß eine Ecke der Grundriß P' und die andere Ecke der Fußpunkt P_{12} des Lotes von P' auf die Rißachse x_{12} ist, während die dritte Ecke P'^s beliebige Lage hat. Dadurch entsteht *zwischen dem Grundriß und dem Schräggrundriß eine schiefe perspektive Affinität, wobei die Rißachse x_{12} die Affinitätsachse und der Schrägriß $[P'P'^s]$ der Drehsehne die Affinitätsrichtung ist.* Der Schrägriß P^s

des Punktes P liegt dann um die wahre Erhebung z über dem Schräggrundriß P'' . Die Punkte der Bildebene (Aufrißebene π_2) sind mit ihren Schrägrissen identisch.

Das Verkürzungsdreieck ($P'P_{12}P''$) kann ansich beliebig gewählt werden. Um jedoch ein nicht zu verzerrt wirkendes Bild zu erhalten, muß man darauf achten, daß der Sehstrahl p nicht zu flach gegen die Bildebene π_2 einfällt. Als allgemeine Regel gilt, daß der *Einfallswinkel des Sehstrahls gegen die Bildebene nicht kleiner als 60°* sein soll. Zweckmäßig ist es, bevor man von einem Objekt einen Schrägriß nach diesem Verfahren konstruiert, den Schrägriß eines Würfels zu entwerfen und das Verkürzungsdreieck so abzustimmen, daß der Schrägriß dieses Würfels anschaulich wirkt, wie dies z. B. in Fig. 94 der Fall ist.

Als Beispiel diene die

Aufgabe 1: Es soll der *Schrägriß eines regulären Tetraeders* konstruiert werden, das auf der Grundrißebene steht.

Die Eckpunkte A, B, C des Basisdreiecks des Tetraeders bilden im Grundriß ein gleichseitiges Dreieck ($A'B'C'$), im Aufriß liegen sie auf der Rißachse x_{12} (Fig. 104). Die Spitze S des Tetraeders deckt sich im Grundriß mit dem Mittelpunkt $M' = S'$ des Dreiecks ($A'B'C'$). Um den Aufriß S'' zu finden, führen wir als Seitenrißebene π_3 die erstprojizierende Ebene durch die Tetraederkante $[SA]$ ein, deren Horizontalspur die neue Rißachse $x_{13} = [M'A']$ ist. In diesem Seitenriß liegt die Spitze S''' auf dem Lot zu x_{13} durch M' so, daß $A'S''' = A'B'$, d. h. gleich der wahren Länge der Tetraederkanten ist. Die wahre Höhe $z = M'S''' = M''S''$ des Tetraeders kann nun in den Aufriß übernommen werden, womit Grund- und Aufriß des Tetraeders gezeichnet sind.

Um von dem Objekt einen Schrägriß nach dem Schrägrißverfahren zu konstruieren, nimmt man das Verkürzungsdreieck ($P'P''P^s$) beliebig an. Nun legt man das Verkürzungsdreieck im Punkte A an, d. h. man zieht durch A'' die Parallele zur Richtung $x^s = [P''P^s]$, durch A' die Parallele zum Schrägriß $[P'P^s]$ der Drehsehne. Ihr Schnittpunkt ist der Schrägriß A^s des Punktes A . Entsprechend findet man die Schrägrisse B^s, C^s und M^s der beiden anderen Eckpunkte und des Mittelpunktes des Basisdreiecks. Die (lotrechte) Höhe z des Tetraeders erscheint im Schrägriß in wahrer Größe, weshalb der Schrägriß S^s der Tetraederspitze S um die Strecke $z = M''S''$ über M^s liegt. Nach Klärung der Sichtbarkeit (die im Punkte C^s zusammenlaufenden Kanten sind unsichtbar) ist der Schrägriß des Tetraeders fertig.

Der Schrägriß der Basisebene ε sei durch die Aufrißspur e_2 und den Schrägriß e_1^s der Grundrißspur e_1 festgelegt, wobei sich diese beiden Spuren im Knoten E auf der Rißachse x_{12} schneiden (Fig. 105). Ferner ist der Schrägriß M^s des Basiskreismittelpunktes M gegeben. Zunächst ist be-

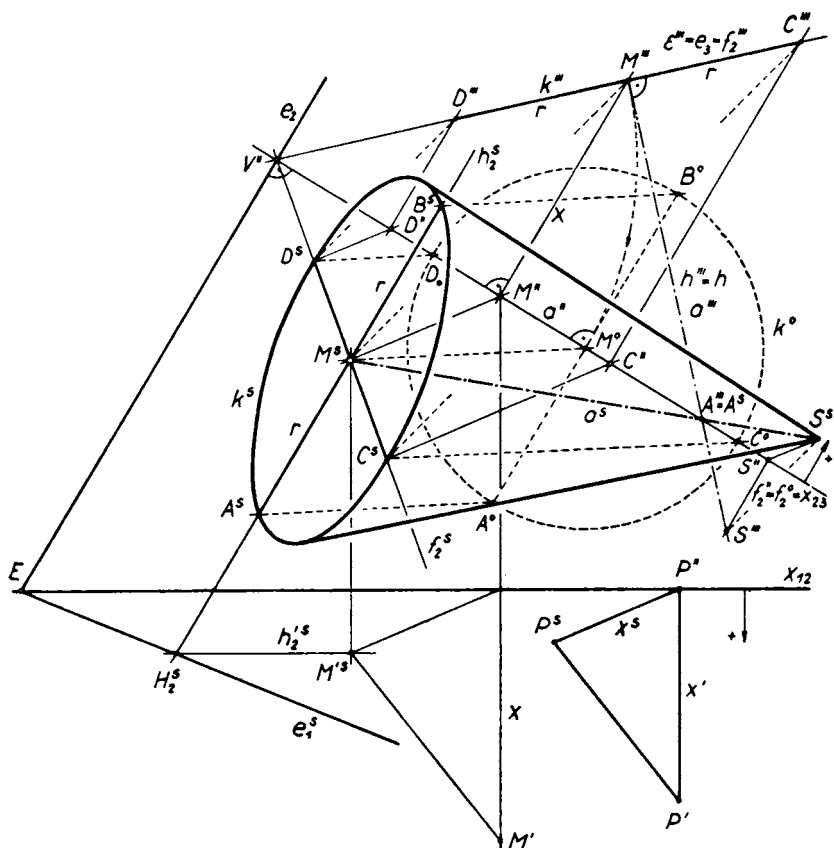


Fig. 105. Schrägriß eines Drehkegels der Höhe h , dessen Basiskreis in der Ebene ε (Spuren e_1 und e_2) liegt

kannt, daß der Schrägriß k^s des Basiskreises k eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M^s ist. Unter allen Kreisdurchmessern wird jener in wahrer Länge abgebildet, der zur Bildebene, d. h. zur Aufrißebene π_2 parallel ist. Er liegt auf der durch M gehenden zweiten Hauptlinie h_2 der Ebene ε ; sein Schrägriß h_2^s geht durch M^s und ist zur Spur e_2 parallel. Durch den Schnittpunkt H_2^s von h_2^s mit dem Schrägriß e_1^s der ersten Spur von ε (d. h. durch den Schrägriß H_2^s des Horizontalspurpunktes H_2 von h_2) kann

nun parallel zur Rißachse x_{12} der Schräggrundriß h_2^s dieser zweiten Hauptlinie h_2 gezeichnet werden. Auf ihr liegt senkrecht unter M^s der Schräggrundriß M'^s des Kreismittelpunktes M . Auf h_2^s liegen die Ellipsenpunkte A^s und B^s in einer Entfernung von M^s , die gleich dem wahren Kreisradius r ist.

Der zum Ellipsendurchmesser $A^s B^s$ konjugierte Durchmesser $C^s D^s$ ist der Schrägriß jenes Kreisdurchmessers CD , der zum Kreisdurchmesser AB orthogonal ist. Er liegt auf der zweiten Fallinie f_2 der Ebene ε durch den Kreismittelpunkt M . Um deren Schrägriß f_2^s zu bekommen, verschaffen wir uns zunächst ihren Aufriß f_2'' . Dazu konstruieren wir mit Hilfe des Verkürzungsdreiecks ($P'P''P^s$), das wir ähnlich an den Schräggrundriß M'^s anlegen, den Grundriß M' des Kreismittelpunktes. Mit ihm kennen wir auch seinen Aufriß M'' , der auf dem Ordner durch M' und auf der durch M^s gelegten Parallelen zur Seite $[P^sP'']$ des Verkürzungsdreiecks liegt. Der Aufriß f_2'' der zweiten Fallinie f_2 durch M ist nunmehr das Lot von M'' auf die Vertikalspur e_2 der Ebene ε . Durch ihren Vertikalspurpunkt V'' auf e_2 geht auch der Schrägriß $f_2^s = [V''M^s]$ dieser Fallinie. Damit kennt man zunächst die Richtung des zu $A^s B^s$ konjugierten Ellipsendurchmessers. Seine Endpunkte C^s und D^s ergeben sich nun mit Hilfe einer an die Aufrißebene angehängten Seitenrißebene π_3 , deren Rißachse x_{23} mit f_2'' zusammenfällt. In dieser Seitenrißebene erscheint nämlich die Ebene ε projizierend. Ihre Lage $\varepsilon''' = e_3 = f_2'''$ legen wir durch Übertragen der x -Kote des Punktes M aus dem Grundriß in diesen Seitenriß fest. M''' liegt auf dem Ordner durch M'' senkrecht zur Rißachse x_{23} , und der Abstand des Punktes M''' von der neuen Rißachse x_{23} ist gleich dem Abstand x des Punktes M' von der alten Rißachse x_{12} . In diesem Seitenriß liegen die Endpunkte C und D des Falliniendurchmessers in der Entfernung $C'''M''' = D'''M''' = r$ vom Seitenriß M''' des Kreismittelpunktes. Der Aufriß C'' bzw. D'' dieser Endpunkte liegt auf $f_2'' = x_{23}$, der Schrägriß C^s bzw. D^s auf f_2^s , wobei $[C''C^s] \parallel [D''D^s] \parallel [M''M^s] \parallel [P''P^s]$ ist. Mit Hilfe des konjugierten Durchmesserpaars $A^s B^s$, $C^s D^s$ kann jetzt nach der Rytz'schen Achsenkonstruktion der Schrägriß k^s des Basiskreises k gezeichnet werden.

Die Kegelachse a geht durch M und steht auf der Ebene ε senkrecht. Im Seitenriß erscheint a als das Lot a''' zu e_3 durch M''' , während der Aufriß a'' mit f_2'' zusammenfällt. Der Schnittpunkt A''' der Geraden a''' mit x_{23} liegt in der Aufrißebene π_2 und ist daher zugleich sein eigener Schrägriß A^s . Damit ist der Schrägriß a^s der Kegelachse als Gerade $[M^s A^s]$ bestimmt. Um auf ihr die Höhe h des Kegels abzutragen, bestimmt man im

Seitenriß die Kegelspitze S''' auf a''' so, daß $M'''S''' = h$ ist, und überträgt, analog wie beim Punkt M''' , den Punkt S''' über S'' in den Punkt S^s auf a^s . Nach Einzeichnen der *Konturerzeugenden* (= *Umrißmantellinien*) des Kegels, d. h. der Tangenten von S^s an die Ellipse k^s und nach Klärung der Sichtbarkeit des Basiskreises ist das Schrägbild der Kegels fertiggestellt.

Bemerkung 1: Bei der Konstruktion der Punkte C^s , D^s und S^s wurde, ausgehend vom Seitenriß, zunächst der Aufriß und dann der Schrägriß dieser Punkte konstruiert. Nun kann man sich aber die Konstruktion des Aufrisses dabei ersparen, da auch zwischen dem Seitenriß und dem Schrägriß der Ebene $[a_2]$ eine perspektive Affinität besteht mit x_{23} als Affinitätsachse und $[M'''M^s]$ als Affinitätsrichtung. Diese einfachere Konstruktion ist in Fig. 105 gestrichelt eingezeichnet.

Bemerkung 2: Zur Bestimmung von C^s und D^s kann man auch die Ebene ε um ihre Aufrißspur e_2 in die Aufrißebene π_2 hineindrehen. Der Kreismittelpunkt M gelangt dabei in die Lage M^0 , wobei $V''M^0 = V''M'''$ ist, und der Kreis k erscheint in π_2 als Kreis k^0 um M^0 in wahrer Größe (Radius r). Da f_2^0 sich mit f_2'' deckt, sind die Punkte C^0 und D^0 die Schnittpunkte des gedrehten Kreises k^0 mit der Falllinie f_2^0 , während die Punkte A^0 und B^0 auf dem dazu orthogonalen Kreisdurchmesser liegen. Die Paralleldrehung und der Schrägriß der Ebene ε sind ebenfalls zueinander perspektiv affin mit e_2 als Affinitätsachse und $[M^0M^s]$ als Affinitätsrichtung. Daher liegen entsprechende Punkte, z. B. A^0 und A^s oder C^0 und C^s , auf Parallelen zu $[M^0M^s]$, die in Fig. 105 ebenfalls gestrichelt eingezeichnet sind.

38. Der Satz von Pohlke

Drei von einem Raumpunkt O ausgehende, beliebig gerichtete und beliebig lange Strecken OX, OY, OZ , die nicht in einer Ebene liegen (die nicht komplanar sind), bilden ein *räumliches Dreibein* $O(X, Y, Z)$. Sind diese drei Strecken zudem gleichlang und stehen sie paarweise aufeinander senkrecht, dann nennt man ein solches rechtwinkliges gleichschenkliges Dreibein ein *orthonormiertes Dreibein* $O(X, Y, Z)$. Die auf den Achsen eines räumlichen rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems $O(x, y, z)$ liegenden Einheitsstrecken OX, OY, OZ bilden ein solches orthonormiertes Dreibein oder, wie wir kurz sagen wollen, eine *Würfecke*. Fig. 106 zeigt den Parallelriß $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ einer solchen Würfecke $O(X, Y, Z)$, der sogleich zum Parallelbild des Einheitswürfels vervollständigt ist.

Das Parallelbild der Würfecke ist ein gewisses ebenes Dreibein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$, bestehend aus drei vom Punkt O^s ausstrahlenden Strecken

$$(1) \quad O^sX^s = e_x, \quad O^sY^s = e_y, \quad O^sZ^s = e_z,$$

die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen; d. h. die vier Punkte $O^s, X^s,$

Y^s, Z^s liegen nicht auf derselben Geraden. Man nennt ein solches *ebenes Dreiein* $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$, das *Schrägriß einer Würfecke* $O(X, Y, Z)$ ist, ein **Pohlkesches Dreiein**.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man in der Wahl der Gestalt des ebenen Dreieins $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ völlig freie Hand hat, wenn dieses der Schrägriß einer Würfecke, d. h. ein **POHLKESCHES Dreiein** sein soll. Diese Frage wird entschieden durch einen berühmten Satz der Darstellenden Geometrie, durch den

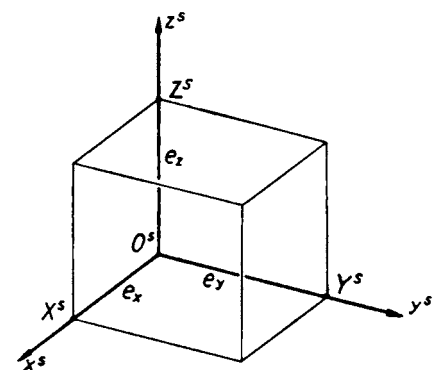


Fig. 106. Parallelriß einer Würfecke.
POHLKESCHES Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$

Satz von Pohlke (1853): *Jedes ebene Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ kann, wenn die vier Punkte O^s, X^s, Y^s, Z^s nicht alle auf einer Geraden liegen, als der Parallelriß eines orthonormierten Dreieins $O(X, Y, Z)$ im Raum aufgefaßt werden. Oder kürzer: Jedes solche ebene Dreiein*

$O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ ist ein *Pohlkesches Dreiein*.

Den Beweis dieses grundlegenden Satzes führen wir dadurch, daß wir 1. die *Projektionsrichtung* p und 2. die *Stellung der Bildebene* π so angeben, daß das in Fig. 107a in beliebiger Weise vorgegebene ebene Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ für diese Projektionsrichtung p der Schrägriß einer Würfecke $O(X, Y, Z)$ im Raum ist. Als Ersatz für ein räumliches Modell einer solchen Würfecke $O(X, Y, Z)$ diene die Erläuterungsfigur 107b, die eine wirkliche Würfecke in einem beliebigen Parallelriß darstelle.

Die zu dem Schrägriß 107a gehörige Sehstrahlrichtung p läßt sich zunächst sehr leicht angeben: Der Schnittpunkt H^s der Geraden $[O^sY^s]$ und $[X^sZ^s]$ ist der Deckpunkt der beiden windschiefen Geraden $[OY]$ und $[XZ]$ des räumlichen Objektes, d. h. der Punkt H^s ist der Schrägriß sowohl eines Punktes H_1 auf $[OY]$ als auch eines Punktes H_2 auf $[XZ]$, und die Gerade $[H_1H_2]$ ist die zu dem Schrägriß in Fig. 107a gehörige *Sehstrahlrichtung* p . Diese Punkte H_1 und H_2 lassen sich mit Hilfe der invarianten Teilverhältnisse

$$(1) \quad (OY \cdot H_1) = (O^sY^s \cdot H^s) = m:n,$$

$$(2) \quad (XZ \cdot H_2) = (X^sZ^s \cdot H^s) = r:s$$

an der Würfecke angeben. Wenn also das ebene Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$

überhaupt Schrägriß der Würfecke $O(X, Y, Z)$ sein soll, dann muß die Richtung $p = [H_1 H_2]$ die Projektionsrichtung sein.

Die zu $[H_1 H_2]$ parallelen Sehstrahlen p durch die Punkte O, X, Y, Z bilden ein Prisma. Jeder ebene Schnitt dieses Sehstrahlenprismas ist ein

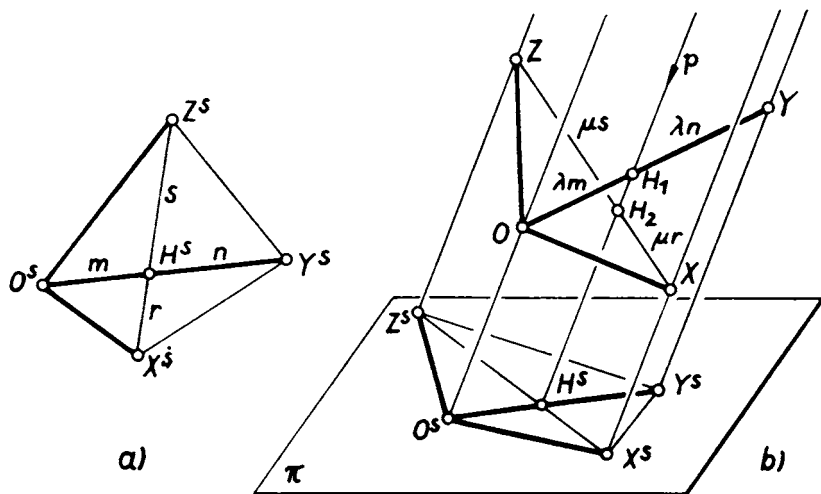


Fig. 107. Beweis des Satzes von POHLKE: Jedes ebene Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ in π ist für eine bestimmte Sehrichtung p Parallelprojektion einer bestimmten Würfecke $O(X, Y, Z)$

Schrägriß der Würfecke $O(X, Y, Z)$. Wir wollen nun in einem zweiten Schritte nachweisen, daß diese *Schnittebene* π stets so gelegt werden kann, daß die entstehende Schnittfigur zu dem in Fig. 107a vorgegebenen ebenen Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ *ähnlich* ist, d. h. wir wollen die zu diesem Schrägriß gehörige Stellung der Bildebene π ermitteln. Das durch die Kanten der drei Punkte O, X und Z bestimmte dreiseitige Prisma gestattet nun in der Tat einen solchen ebenen Schnitt. Nach der *Prismenschnittaufgabe* in 29. gibt es nämlich zwei reelle Stellungen von Ebenen π , die das dreiseitige Sehstrahlenprisma durch (OXZ) nach einem Dreieck schneiden, das zu dem Dreieck $(O^s X^s Z^s)$ *ähnlich* ist. Der Schnitt des vollständigen (vierseitigen) Sehstrahlenprismas durch $O(X, Y, Z)$ mit diesen Ebenen π ist dann aber wegen der Invarianz der Teilverhältnisse $(OY \cdot H_1)$ und $(XZ \cdot H_2)$ gewiß zu dem Viereck $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ in Fig. 107a *ähnlich*.

Verkleinert oder vergrößert man schließlich die in Fig. 107b dargestellte Würfecke in geeigneter Weise *ähnlich*, behält aber im übrigen die Sehstrahlenrichtung p und die gefundene Stellung der Bildebene π bei, dann

ist der Schnitt der Bildebene mit dem Sehstrahlenprisma zu der Figur in Fig. 107a *kongruent*, d. h. dieses beliebig angenommene ebene Dreieck $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ entsteht tatsächlich durch Parallelprojektion in der Richtung p aus einem orthonormierten Dreieck $O(X, Y, Z)$ im Raum und ist somit stets ein POHLKESches Dreieck, w. z. b. w.¹⁾

39. Die schiefe Axonometrie

Schließt man das abzubildende *räumliche Objekt* an ein *räumliches kartesisches Achsenkreuz* $O(x, y, z)$ an und projiziert es samt diesem Achsenkreuz auf eine Bildebene, so entsteht ein *axonometrisches Bild des Objektes*; das Abbildungsverfahren selbst nennt man *Axonometrie*. Wählt man dabei die Projektionsrichtung p senkrecht zur Bildebene π , so spricht man von *normaler Axonometrie*. Das normal-axonometrische Bild eines Objektes ist daher stets ein *Normalriß*. Bei schräger Einfallsrichtung der Sehstrahlen p gegen die Bildebene π liegt eine *schiefe* oder *allgemeine Axonometrie* vor, die einen *Schrägriß* des Objektes liefert.

Nach dem Satz von POHLKE kann bei schiefer Axonometrie, die wir weiterhin allein behandeln wollen, das Bild des räumlichen Achsen dreiecks $O(X, Y, Z)$ als beliebiges ebenes Dreieck $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ angenommen werden; die vier Punkte O^s, X^s, Y^s, Z^s dürfen dabei auf keiner Geraden liegen. Die Bilder der drei Einheitsstrecken $OX = OY = OZ = 1$ auf den Koordinatenachsen liefern die drei Verzerrungseinheiten

$$(1) \quad O^s X^s = e_x^s = e_x; \quad O^s Y^s = e_y^s = e_y; \quad O^s Z^s = e_z^s = e_z$$

für die Achsenrichtungen (Fig. 108). Hat man sie, d. h. die Bilder X^s, Y^s, Z^s der Einheitspunkte X, Y, Z , in beliebiger Entfernung von O^s auf den beliebig gerichteten Achsenbildern x^s, y^s, z^s willkürlich, jedoch so gewählt,

¹⁾ Diesen Satz, den man auch als den *Hauptsatz der Axonometrie* bezeichnet, hat KARL WILHELM POHLKE (1810–1876, Berlin) im Jahre 1853 gefunden, aber erst 1860 (zunächst ohne Beweis) veröffentlicht. In der allgemeinen Fassung, die ihm HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921, Berlin) im Jahre 1864 gab, besagt der Satz, daß die *Parallelprojektion eines beliebig gegebenen (unregelmäßigen) räumlichen Tetraeders* $O(ABC)$ bei geeigneter Wahl der (reellen) Projektionsrichtung p auf eine geeignete Bildebene π stets ein ebenes Viereck $O^s(A^s B^s C^s)$ gibt, das zu einem vorgegebenen ebenen Viereck $O^0(A^0 B^0 C^0)$ ähnlich ist, vorausgesetzt, daß nicht alle vier Ecken O^0, A^0, B^0, C^0 auf einer Geraden liegen. SCHWARZ bewies diesen Satz im wesentlichen auf dem oben dargestellten Wege. Seither ist der POHLKESche Satz unzählige Male bewiesen und in verschiedenen Richtungen ergänzt und erweitert worden. ERWIN KRUPPA (geb. 1885, Wien) entdeckte im Jahre 1907, daß es außer den beiden (oben dargelegten) reellen Lösungen des POHLKESchen Problems noch zwei konjugiert-komplexe Lösungen gibt.

daß O^s , X^s , Y^s , Z^s nicht auf einer Geraden liegen, so findet man das axonometrische Bild P^s eines Raumpunktes $P(x; y; z)$ auf folgende Weise: Man trägt die verzerrten Koordinatenstrecken

$$(2) \quad x^s = e_x \cdot x; \quad y^s = e_y \cdot y; \quad z^s = e_z \cdot z$$

auf den Bildern der Koordinatenachsen auf und vervollständigt im Bild diese Quaderecke zu einem Quader. Das Bild der dem Punkt O^s gegenüberliegenden Quaderecke ist dann das *axonometrische Bild* P^s des Punktes P . Zur Begründung der Richtigkeit dieser Konstruktion von P^s genügt es, auf die Invarianz der Teilverhältnisse und des Parallelismus bei Parallelprojektion hinzuweisen.

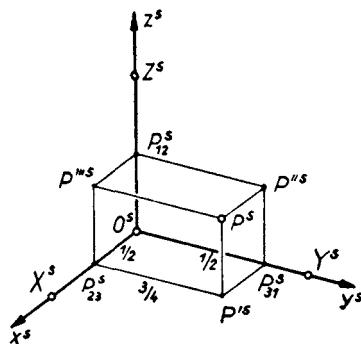


Fig. 108. Schiefaxonometrisches Bild $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ einer Würfecke $O(X, Y, Z)$ und des Koordinatenquaders des Raumpunktes $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Die Bilder der senkrechten Projektionen des Raumpunktes P auf die drei Koordinatenebenen sind der Reihe nach (Fig. 108):

P''^s = Projektion von P in die xy -Ebene = *axonometrischer Grundriß*,

P'''^s = Projektion von P in die yz -Ebene = *axonometrischer Außriß*,

P''''^s = Projektion von P in die zx -Ebene = *axonometrischer Kreuzriß*,

während die senkrechten Projektionen von P auf die Koordinatenachsen im Bilde zu den Punkten

P_{23}^s = Projektion von P auf die x -Achse,

P_{31}^s = Projektion von P auf die y -Achse,

P_{12}^s = Projektion von P auf die z -Achse

führen. In Fig. 108 sind diese Punkte dargestellt für den Fall, daß P die Koordinaten $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ hat.

Zur schnellen Konstruktion eines axonometrischen Bildes bedient man sich gern eines *Strahlenmaßstabes*, aus dem die verzerrten Koordinaten x^s , y^s , z^s eines Punktes P sofort entnommen werden können, wenn seine wirklichen Koordinaten x , y , z bekannt sind (Fig. 109). Nach beliebiger Wahl zweier paralleler Geraden, auf denen man die Bilder e_x , e_y der Einheitsstrecken 01 in x - bzw. y -Richtung aufträgt, ordnet man eine dritte

dazu parallele Gerade, auf der man e_z aufträgt, so an, daß die Anfangs- und die Endpunkte aller drei Einheitsstrecken auf je einem Strahl liegen. Durch ihren Schnittpunkt S laufen alsdann alle Strahlen, die zu gleichbezahlten Punkten auf den drei Maßstäben gehören.

Die drei Verzerrungsmaßstäbe für die Achsenrichtungen können

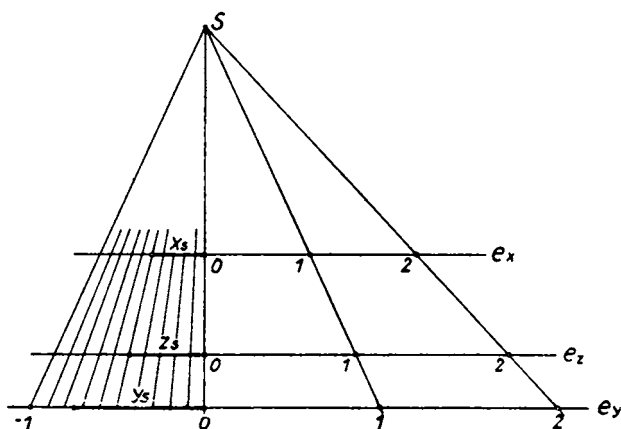


Fig. 109. Strahlenmaßstab (Verzerrungsmaßstäbe e_x, e_y, e_z) für die Achsen eines trimetrischen POHLKESchen Achsenkreuzes

voneinander verschieden oder teilweise gleich oder alle einander gleich gewählt werden. Demnach sind drei Fälle möglich:

1. $e_x \neq e_y; e_y \neq e_z; e_z \neq e_x$: *trimetrisches Achsenkreuz*,
2. $e_x = e_y \neq e_z$ (und ähnlich): *dimetrisches Achsenkreuz*,
3. $e_x = e_y = e_z$: *isometrisches Achsenkreuz*.

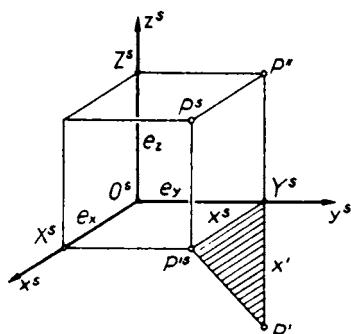


Fig. 110. Frontale Axonometrie oder Schrägrißverfahren

Wählt man außerdem noch die Achsenrichtungen in spezieller Weise, so erhält man die folgenden wichtigen Sonderfälle der schiefen Axonometrie:

1. Das Schrägrißverfahren, das bereits aus 38. bekannt ist, ist eine *dimetrische schiefe Axonometrie* mit $e_y = e_z = 1$, bei der außerdem $y^s \perp z^s$ gewählt ist, während der Maßstab e_x und die Richtung der x^s -Achse beliebig sind (Fig. 110). Man bezeichnet dieses Verfahren auch als

frontale Axonometrie, weil die (y, z) -Ebene, deren Figuren ihre Gestalt beibehalten, dabei als (frontale) Bildebene dient.

2. Die Kavalierperspektive ist eine *isometrische Axonometrie* mit $e_x = e_y = e_z = 1$, bei der $y^s \perp z^s$ und $\sphericalangle(x^s, y^s) = 135^\circ$ gewählt sind (Fig. 111). Sie stellt zugleich einen *Sonderfall des Schrägrißverfahrens* dar, bei dem die (y, z) -Ebene (Aufrißebene) als Bildebene dient.

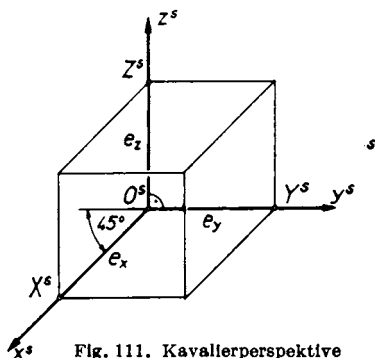


Fig. 111. Kavalierperspektive

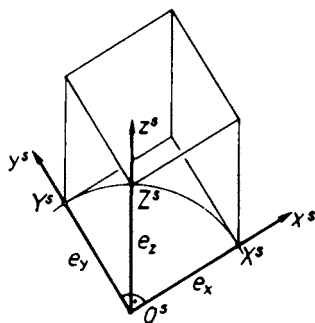


Fig. 112. Militärperspektive

(Die Bezeichnung stammt aus dem alten Befestigungswesen, bei dem gewisse überhöhte Teile der Bastionen „Kavaliere“ hießen.)

3. Die Militärperspektive ist gleichfalls eine *isometrische Axonometrie* mit $e_x = e_y = e_z = 1$, bei der $x^s \perp y^s$ ist und z^s vertikal gewählt ist (Fig. 112), wobei die (x, y) -Ebene (Grundrißebene) als Bildebene dient. Sie liefert eine Art *Vogelschau* und kann z.B. zur räumlichen Belegung eines kartenmäßig gegebenen Grundrisses verwendet werden.

Bemerkung 1: Modelle und Risse einer Raumfigur pflegt man stets in gewissen Maßstäben anzufertigen; die Abmessungen der Raumfigur werden dabei ähnlich verkleinert oder vergrößert, ihre „Gestalt“ bleibt also un geändert. Das axonometrische Bild eines Körpers ist daher in Wahrheit der Parallelriß eines bestimmten zur Raumfigur ähnlichen Körpermodells, dessen Maßstab nicht weiter interessiert.

40. Das Schnellrißverfahren

Das von LUDWIG ECKHART (1890–1938, Wien) im Jahre 1937 angegebene Schnellrißverfahren (auch Einschnideverfahren genannt) ist ein besonders bequemes Verfahren, um von einem beliebigen räumlichen Objekt ein axonometrisches Bild zu gewinnen. Es müssen dazu zwei zugeordnete Normalrisse des Objektes vorliegen, die sich auf zwei verschiedenen Blättern befinden; sie können auch in zwei verschiedenen Maßstäben gezeichnet sein.

Die *Konstruktionsvorschrift* für ein axonometrisches Bild nach dem *ECKHARTSchen* Einschneideverfahren ist einfach:

Man legt die beiden gegebenen zugeordneten Normalrisse des Objekts, z. B. seinen Grundriß und seinen Aufriß, ganz *beliebig* auf das Zeichenblatt, wählt für jeden Riß, ebenfalls ganz beliebig, je eine *Ordnerichtung* (*Einschneiderichtung*) p' bzw. p'' und schneidet die Ordner entsprechender Risse P' und P'' der einzelnen Objektpunkte P . Dann ist der *Schnittpunkt* P^s jedes solchen Ordnerpaares ein axonometrisches Bild (der *Schnellriß*) des zugehörigen Raumpunktes P (Fig. 113).

Beweis: Zunächst beweisen wir, daß das Einschneideverfahren eine *lineare Abbildung* des Gegenstandes liefert, d. h. daß das durch Einschneiden gewonnene *Bild einer Raumgeraden g wieder eine Gerade g^s* ist.

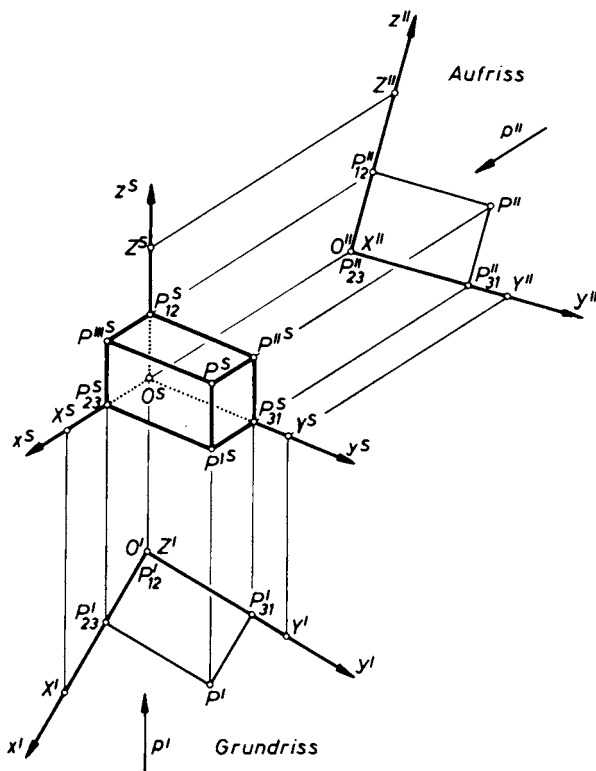


Fig. 113. Schnellrißverfahren (Einschneideverfahren von ECKHART)

Sind A und B zwei beliebige Punkte auf der Raumgeraden g , so findet man aus ihrem Grundriß und Aufriß durch Einschneiden in der Richtung

p' bzw. p'' die Punkte A^s und B^s (Bild 114). Wählt man einen beliebigen weiteren Punkt X auf g , so ist

$$(AB \cdot X) = (A'B' \cdot X') = (A''B'' \cdot X''),$$

und zwar auch dann, wenn den beiden Rissen verschiedene Maßstäbe zugrunde liegen. Der Ordner durch X' liefert auf der Geraden $[A^sB^s]$ einen Punkt X_1^s , der Ordner durch X'' einen Punkt X_2^s , wobei

$$(A^sB^s \cdot X_1^s) = (A'B' \cdot X'),$$

$$(A^sB^s \cdot X_2^s) = (A''B'' \cdot X'')$$

ist. Wegen der Gleichheit dieser Teilverhältnisse fallen die Punkte X_1^s und X_2^s auf der Geraden $[A^sB^s]$ in einen einzigen Punkt X^s zusammen.

Daraus folgt nun, daß der Punkt X^s auf der Geraden $[A^sB^s]$ durch Einschneiden aus dem Punkt X auf g entsteht. Das besagt aber, daß der Schnellriß von X auf der Geraden $[A^sB^s]$ liegt. Daher ist der *Schnellriß einer Geraden g wieder eine Gerade g^s* und das *Teilverhältnis von drei Punkten einer Geraden ist eine Schnellrißinvariante*. Daraus folgt unmittelbar, daß der Schnellriß eines *Parallelogramms* (Viereck mit sich halbierenden Diagonalen) wieder ein *Parallelogramm* ist. *Parallele Raumgeraden haben daher parallele Schnellrisse*.

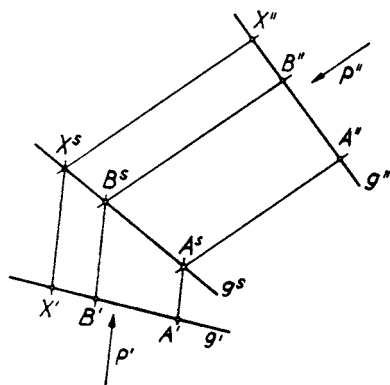


Fig. 114. Beweis der Linearität des Schnellrißverfahrens. Der Schnellriß einer geraden Punktreihe g (Grundriß g' , Aufriß g'') ist eine ähnliche Punktreihe g^s

Als nächstes weisen wir nach, daß das durch *Einschneiden* gewonnene Bild eines Gegenstandes ein *axonometrisches Bild* ist. Aus dem Grundriß $O'(X', Y', Z')$ und dem Aufriß $O''(X'', Y'', Z'')$ des orthonormierten Dreibeins $O(X, Y, Z)$, die in beliebigen Maßstäben gezeichnet sind und in denen $Z' = O'$ und $X'' = O''$ ist, findet man durch Einschneiden in den Ordnerrichtungen p' und p'' zunächst die Punkte O^s, X^s, Y^s, Z^s (Fig. 113). Da die z -Achse erstprojizierend, die x -Achse zweitprojizierend ist, fällt das Bild z^s der z -Achse auf $[O^sZ^s]$ und das Bild x^s der x -Achse auf $[O^sX^s]$. Wegen der Linearität der Abbildung ist aber auch das Bild y^s der y -Achse die Gerade $[O^sY^s]$. Als *Schnellriß des orthonormierten Dreibeins $O(X, Y, Z)$* erhält man also ein *ebenes Dreibein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$* , das nach dem *POHLKESchen Satz* stets als *Parallelprojektion* (axonometrisches Bild) eines räumlichen Dreibeins $O(X, Y, Z)$ aufgefaßt werden kann.

Was damit für die Punkte des Achsenkreuzes nachgewiesen ist, gilt aber auch für jeden beliebigen Raumpunkt P . Denn P ist vermöge der Projektionen von OP auf die Koordinatenachsen durch Strecken auf den Koordinatenachsen festlegbar, die sich beim Einschneiden als Parallelprojektionen dieser Koordinatenstrecken darstellen. Somit gilt

Satz 1: Der Schnellriß eines räumlichen Objektes, der nach dem Einschneideverfahren von Eckhart aus zwei zugeordneten Normalrissen erzeugt wird, ist ein axonometrisches Bild des Objekts, d. h. der Parallelriß eines gewissen zum Objekt ähnlichen Modells (dessen Maßstab nicht weiter interessiert).

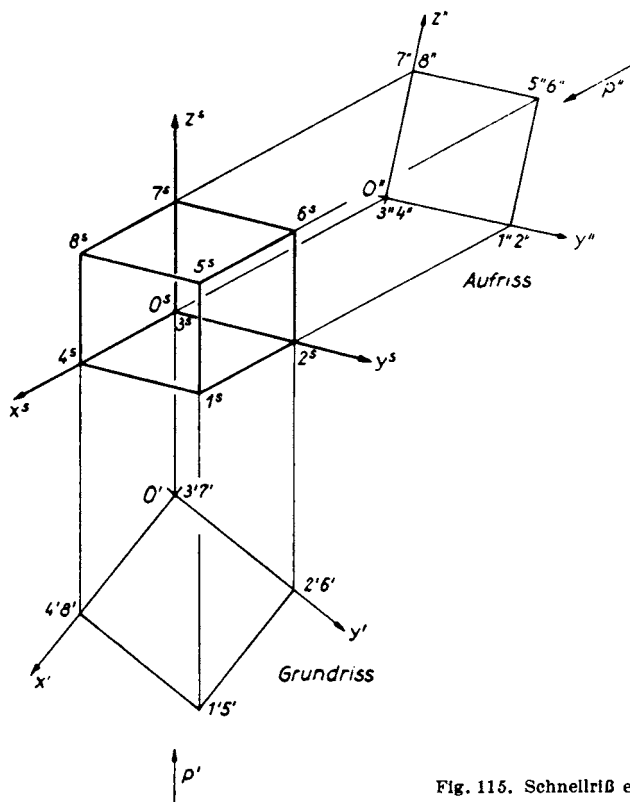


Fig. 115. Schnellriß eines Würfels

Fig. 115 zeigt den Schnellriß eines Würfels, gewonnen aus seinem Grund- und Aufriß, die verschiedene Maßstäbe haben, Fig. 116 zeigt den Schnellriß einer Balkenverbindung.

Bemerkung 1: In den Anwendungen ist es meist zweckmäßig, die Einschneide-richtung p' vertikal zu wählen. Man erreicht dadurch, daß das Bild der räumlich vertikalen z -Achse auch im Schnellriß vertikal erscheint.

Bei ungeschickter Wahl der Lage der beiden zugeordneten Normalrisse und der beiden Einschniederichtungen liefert das Schnellrißverfahren eine sehr verzerrte Parallelprojektion des räumlichen Objektes. Es ist deshalb von Bedeutung, daß man auch umgekehrt zunächst *das ebene Pohlkesche Dreiein* $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ beliebig wählen kann (natürlich so, daß die Punkte O^s, X^s, Y^s, Z^s nicht auf einer Geraden liegen, und so, daß

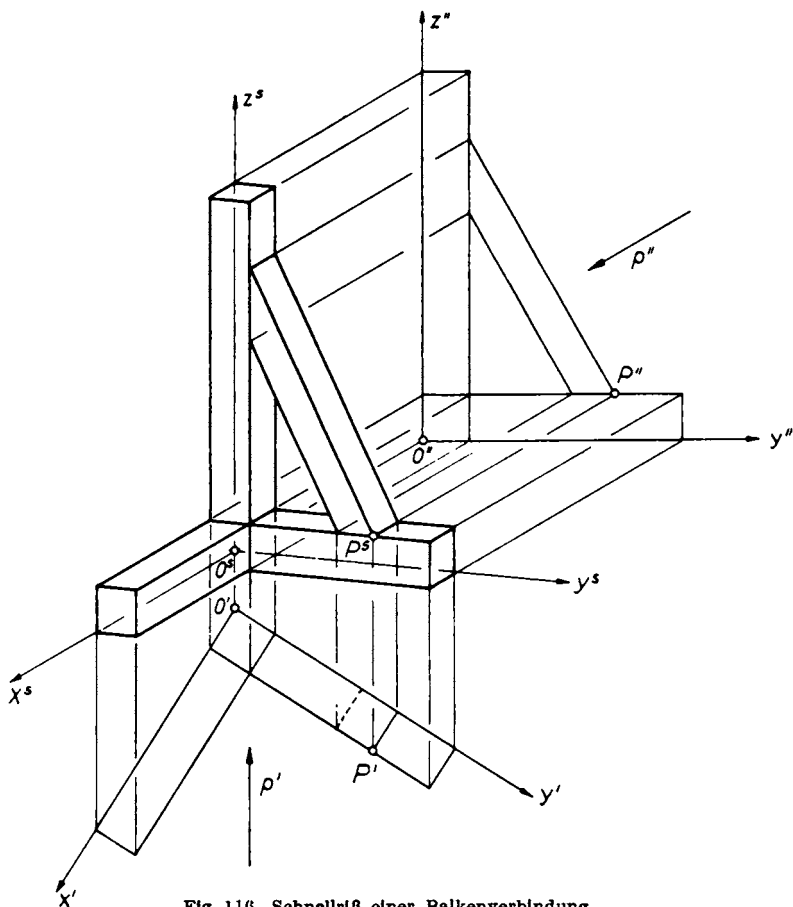


Fig. 116. Schnellriß einer Balkenverbindung

das Bild des Einheitswürfels den anschaulichen Eindruck eines Würfels vermittelt), um dann erst nachträglich die zugehörige Lage seiner beiden Normalrisse zu bestimmen.

Ist nämlich das ebene POHLKESCHE Dreiein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ angenommen, so liegen zunächst mit $[O^sZ^s] = p'$ und $[O^sX^s] = p''$ die beiden für den Grundriß und Aufriß maßgebenden *Ordnerrichtungen* fest (Fig. 117).

Nach beliebiger Wahl der Punkte O' und O'' auf den durch O^s verlaufenden Ordnern p' und p'' sind der Grundriß $O'(X', Y')$ und der Aufriß $O''(Y'', Z'')$ des räumlichen Dreibeins $O(X, Y, Z)$ in einer solchen Lage in die Zeichenebene hineinzulegen, daß die Punkte X^s, Y^s, Z^s durch Einschneiden aus den Punktpaaren $X', X'' = O''$ bzw. Y', Y'' bzw. $Z' = O', Z''$ entstehen. Die Lage des orthonormierten Zweibeins $O'(X', Y')$ im Grundriß findet man auf folgende Weise: Die Ordner durch X^s und Y^s

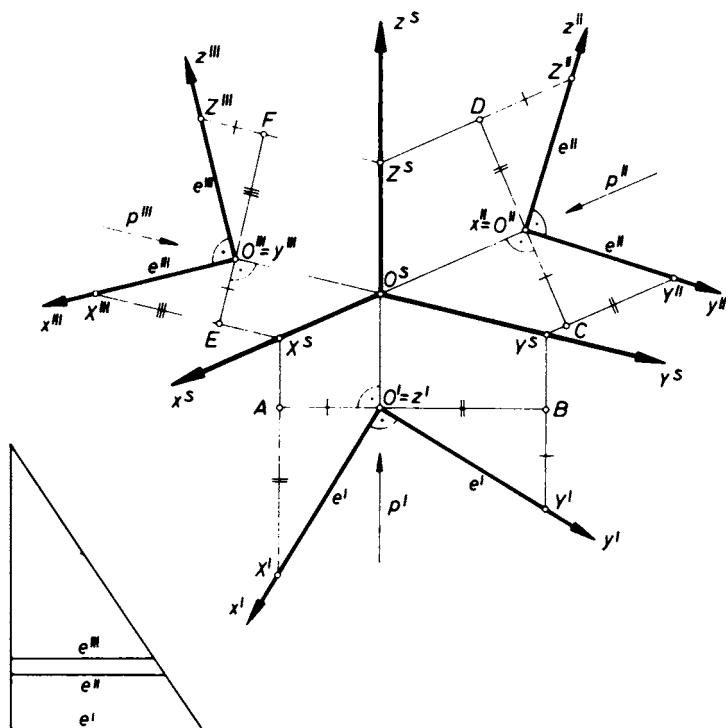


Fig. 117. Rekonstruktion des zu einem beliebigen gegebenen Schrägriß (POHLKESchen Dreibein $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$) passenden Grund- und Aufrisses

schneiden die Normale zu p' durch O' in den Punkten A bzw. B . Trägt man die Strecke $O'A$ von B aus und die Strecke $O'B$ von A aus nach unten in Richtung p' (oder in der Gegenrichtung) an, so erhält man die Punkte Y' und X' , die (als Hypotenusen kongruenter rechtwinkliger Dreiecke) von O' gleichen Abstand $O'X' = O'Y'$ haben. Da außerdem $\angle X'O'Y' = 90^\circ$ ist, stellt $O'(X', Y')$ in der Tat den Grundriß des räumlichen Dreibeins $O(X, Y, Z)$ dar. Genauso verschafft man sich die Lage des Auf-

risses $O''(Y'', Z'')$ des Dreibeins $O(X, Y, Z)$. Zeichnet man Grund- und Aufriß des Objektes in diese Zweibeine ein (deren Einheitsstrecken und Maßstäbe i. a. voneinander verschieden sind: $O'Y' \neq O''Y''$), dann kann man aus ihnen den Schnellriß des Objekts mit dem vorgegebenen Achsenkreuz $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ entwickeln.

Nach demselben Prinzip kann man sich auch nach beliebiger Wahl des Punktes O''' auf $p''' = y^s$ (Kreuzriß des Sehstrahls p) die *Lage des Kreuzrisses* $O'''(X''', Y''', Z''')$ des Achsenkreuzes $O(X, Y, Z)$ verschaffen (Fig. 117). Entsprechende Punkte P''' und P^s des Kreuzrisses und Schnellrisses einer Figur hängen durch *Ordner der Richtung* $p''' = y^s$ (*dritte Einschniederichtung*) zusammen. Grund-, Auf- und Kreuzriß haben i. a. *verschiedene Maßstäbe* ($e' \neq e'' \neq e'''$).

VII

Drehzylinder

41. Ebener Schnitt eines Drehzylinders

Läßt man eine Gerade g um eine feste, dazu parallele Achse a rotieren, so beschreibt g einen *Drehzylinder*. Die Achse a der Drehung ist die *Zylinderachse*, die Gerade g ist eine *Erzeugende* oder *Mantellinie* des Zylinders und der Abstand r der Geraden g von der Achse a der *Zylinderradius*. Jeder Punkt P von g beschreibt bei der Erzeugung des Drehzylinders einen Kreis k , dessen Ebene zur Zylinderachse a senkrecht steht. Der Drehzylinder entsteht daher auch dadurch, daß man einen Kreis k in der Richtung der (zu seiner Ebene normalen) Zylinderachse a parallel verschiebt. Die Kreisebenen sind untereinander parallel. Man nennt diese Kreise k daher *Parallelkreise* des Zylinders.

Jede achsennormale Ebene v schneidet den Drehzylinder in einem Kreis (Parallelkreis), jede achsenparallele Ebene, wenn überhaupt, in zwei (verschiedenen oder zusammenfallenden) parallelen Geraden (Mantellinien).

Eine beliebige Ebene ε , die zur Zylinderachse weder parallel noch senkrecht ist, schneidet den Drehzylinder in einer Kurve, die durch die Zylindererzeugenden auf einen Normalschnitt des Zylinders, also einen Parallelkreis, perspektiv affin bezogen ist. Daraus folgt

Satz 1: *Jeder ebene weder achsenparallele noch achsennormale Schnitt eines Drehzylinders ist eine Ellipse.*

Fig. 118 zeigt das *axonometrische Bild* eines Stücks eines Drehzylinders, dessen Achse a mit der z -Achse des Achsenkreuzes $O(x, y, z)$ zusammenfällt. Der in der (x, y) -Ebene liegende Basiskreis k des Zylinders erscheint dabei als Ellipse k^* , deren auf x^* bzw. y^* liegende Durchmesser A^*B^* und C^*D^* zueinander konjugiert sind. Die Tangenten in A^* und B^* an die Ellipse k^* sind daher parallel zu y^* , die Tangenten in C^* und D^* sind parallel zu x^* . Die *Umrißmantellinien* oder *Konturerzeugenden* des Zylinders erscheinen als die zu a^* parallelen *Tangenten der Ellipse k^** .

Die beiden Konturerzeugenden $[U, U_1]$ und $[V, V_1]$ bilden im Raum den sogenannten wahren Umriß des Zylinders, d. h. jene Flächenkurve,

in einer *Ellipse* k_1 , deren Schrägriß k_1^s eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O_1^s ist. Zwischen der Schnittellipse k_1 und dem Basiskreis k besteht eine räumliche perspektive Affinität. Folglich besteht zwischen den Schrägrissen k^s und k_1^s des Basiskreises k und der Schnittellipse k_1 eine ebene perspektive Affinität. Dabei ist e^s die Affinitätsachse und $a^s = [O^s O_1^s] = z^s$ die Affinitätsrichtung. Die Punkte A_1^s , B_1^s sowie C_1^s , D_1^s des Schrägbildes k_1^s der Schnittellipse k_1 liegen auf den Schrägbildern der Mantellinien durch die affin entsprechenden Punkte A^s , B^s bzw. C^s , D^s des Basiskreisbildes k^s . Außerdem ist der Durchmesser $A_1^s B_1^s \parallel e^s$, da $A^s B^s \parallel e^s$ ist, während der Durchmesser $C_1^s D_1^s$ sich mit $C^s D^s$ auf e^s trifft. Die Tangenten in den Punkten C_1^s und D_1^s an k_1^s sind zu e^s parallel, da dies für die affinen Tangenten in C^s und D^s an k^s gilt, während die Tangenten in A_1^s und B_1^s an k_1^s sich mit den affin entsprechenden Tangenten in A^s und B^s an k^s auf der Affinitätsachse e^s schneiden. $A_1^s B_1^s$ und $C_1^s D_1^s$ ist ein konjugiertes Durchmesserpaar der Ellipse k_1^s , deren Hauptachsen sich nach RYTZ konstruieren lassen. Auch die Berührungspunkte U_1^s , V_1^s der Ellipse k_1^s mit den beiden Umrißerzeugenden (dem scheinbaren Umriß) des Zylinders lassen sich einfach über die Affinität konstruieren, nach der sich der Durchmesser $[U_1^s V_1^s]$ mit dem affin entsprechenden Durchmesser $[U^s V^s]$ auf e^s schneiden muß.

Die Konstruktion des ebenen Schnittes eines Drehzylinders in Grund- und Aufriß zeigt Fig. 119. Der Drehzylinder, dessen Achse a zur Grundrißebene π_1 senkrecht steht und der nach unten durch die Grundrißebene, nach oben durch die dazu parallele Deckebene begrenzt ist, projiziert sich im Grundriß als Kreis, im Aufriß als ein zwischen den beiden Konturerzeugenden (dem zweiten scheinbaren Umriß des Zylinders) liegendes Rechteck.

Als Schnitt des Drehzylinders mit einer beliebigen Ebene ε , festgelegt durch ihre beiden Spuren e_1 und e_2 , ergibt sich eine Ellipse e , deren Grundriß e' sich mit dem Grundkreis $k = k'$ des Zylinders deckt. Das Aufrißbild e'' der Schnittellipse e ist wieder eine Ellipse. Um von ihr ein konjugiertes Durchmesserpaar zu erhalten, konstruieren wir Grund- und Aufriß der Hauptachsen der Schnittellipse. Diese gehen durch den Ellipsenmittelpunkt M und liegen auf der ersten Hauptlinie h_1 (kleine Achse) bzw. auf der ersten Fallinie f_1 (große Achse) der Ebene ε . Im Grundriß erscheinen sie als der zu e_1 parallele Kreisdurchmesser $A'B'$ bzw. als der zu e_1 senkrechte Kreisdurchmesser $C'D'$. Nachdem man mit Hilfe ihrer Spurpunkte V_1 , H_f und V_f die erste Hauptlinie h_1 und erste Fallinie f_1 in den Aufriß übertragen hat, findet man auf h_1'' außer dem Ellipsenmittel-

punkt M'' noch die Endpunkte A'' , B'' und auf f_1' die Endpunkte C'' , D'' . Diese Durchmesser sind als Normalrisse der Hauptachsen der Schnittellipse e konjugierte Durchmesser der Aufrißellipse e'' . Insbesondere sind die Tangenten in C'' und D'' zu h_1'' parallel, also horizontal. Überträgt

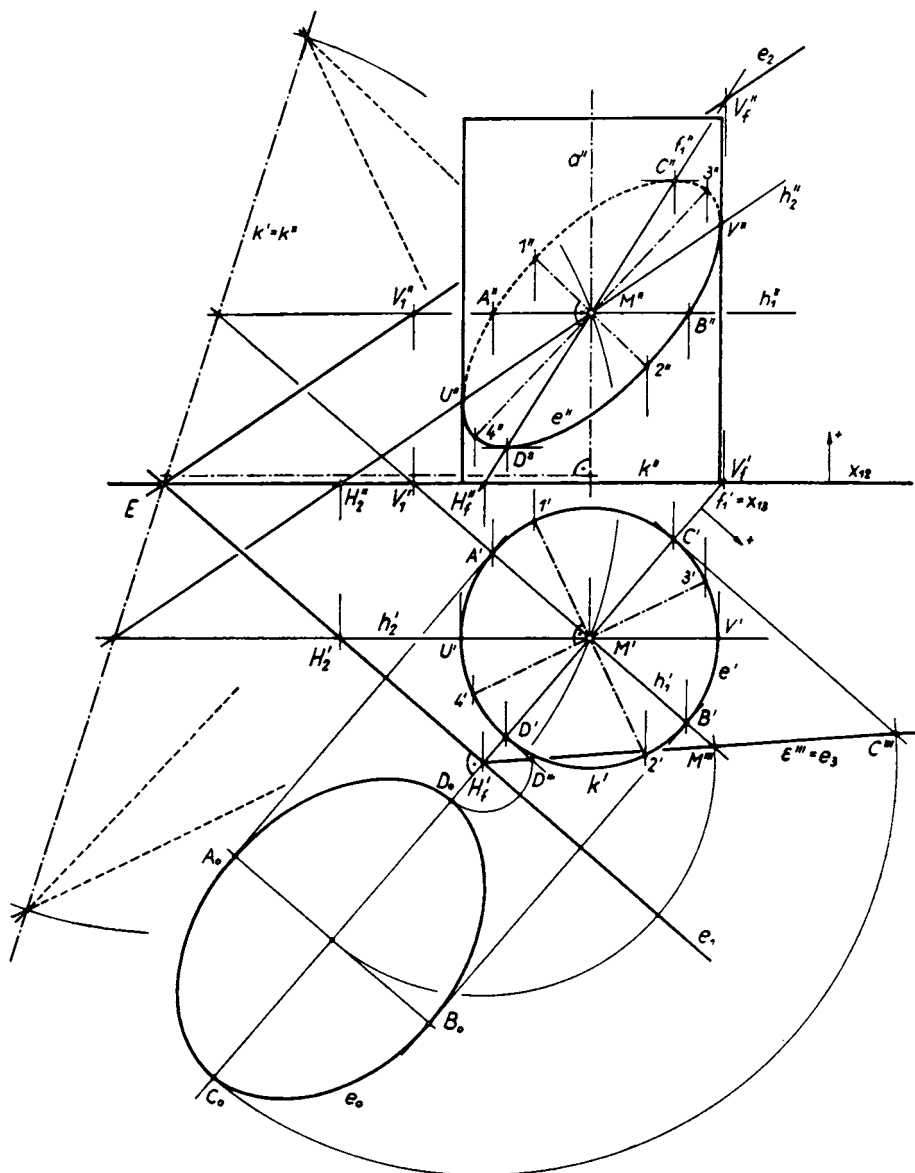


Fig. 119. Ebener Schnitt eines Drehzylinders (Grund- und Aufrißverfahren)

man den zur Aufrißebene parallelen Durchmesser $[UV]$, der auf der zweiten Hauptlinie h_2 von ε liegt, vom Grundriß in den Aufriß, so erhält man die Punkte U'' , V'' , in denen die Aufrißellipse e'' die Umrißerzeugenden des Zylinders berührt, und die Sichtbarkeit von e'' wechselt.

Die *Hauptachsen der Aufrißellipse e''* können mit der RYTZschen Achsenkonstruktion aus den beiden konjugierten Durchmessern $A''B''$ und $C''D''$ ermittelt werden. Bequemer ist es, die Hauptachsen von e'' mit Hilfe der zwischen dem Grundriß e' und dem Aufriß e'' der Schnitellipse bestehenden perspektiven Affinität direkt zu konstruieren. Achse dieser Affinität ist nach 16. das zusammenfallende Bildpaar $k' = k''$ der Deckgeraden k der Ebene ε , die durch den Knoten $E = [e_1, e_2]$ und die Punkte $[h'_1, h''_1]$ sowie $[h'_2, h''_2]$ geht, Affinitätsrichtung ist die Ordnerrichtung. Die Hauptachsen von e'' und e' sind identisch mit jenem Rechtwinkelpaar in M'' bzw. M' , das sich in der Affinität entspricht und das nach 8. mittels des THALES-Kreises durch M' und M'' , dessen Mitte auf $k' = k''$ liegt, sofort konstruiert werden kann. Die Scheitel $1'', 2'', 3'', 4''$ der Aufrißellipse e'' findet man aus den entsprechenden Punkten $1', 2', 3', 4'$ des Grundkreises e' .

Um die *wahre Gestalt der Schnitellipse e* zu erhalten, dreht man die Schnittebene ε um ihre Horizontalspur e_1 in die Grundrißebene π_1 hinein. Die einzelnen Punkte beschreiben dabei je einen zu e_1 normalen Drehkreis, der sich im Grundriß als Lot zu e_1 , im Seitenriß π_3 (neue Rißachse $x_{13} = f'_1$) in wahrer Größe darstellt. Die Durchmesser A_0B_0 und C_0D_0 sind die wahren Hauptachsen der in π_1 hineingedrehten Schnitellipse e_0 .

Bemerkung 1: Der Raumpunkt $P(x, y, z)$ heißt *reell*, wenn seine Koordinaten (x, y, z) reelle Zahlen sind, und er heißt *komplex*, wenn wenigstens eine seiner Koordinaten (x, y, z) komplex ist.

Ein reeller Raumpunkt $P(x, y, z)$ hat stets einen reellen Grundriß $P'(x, y)$ und einen reellen Aufriß $P''(y, z)$.

Auch ein komplexer Raumpunkt $P(x, y, z)$ kann einen reellen Grundriß $P'(x, y)$ haben; das ist dann (und nur dann) der Fall, wenn x und y reell, aber z komplex ist. Sein Aufriß $P''(y, z)$ ist dann stets komplex.

Ein komplexer Punkt $P(x, y, z)$ kann auch einen reellen Aufriß $P''(y, z)$ haben; das ist dann (und nur dann) der Fall, wenn y und z reell sind, x aber komplex ist. Sein Grundriß $P'(x, y)$ ist dann stets komplex.

Bemerkung 2: Zwei komplexe Raumpunkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ heißen zueinander *konjugiert komplex*, wenn ihre Koordinaten zueinander konjugiert komplex sind, d. h.

$$(1) \quad x_2 = \bar{x}_1, \quad y_2 = \bar{y}_1, \quad z_2 = \bar{z}_1$$

ist. Man schreibt dann $P_2 = \bar{P}_1$.

Die Verbindungsgerade zweier konjugiert-komplexer Raumpunkte P_1 und \bar{P}_1 ist stets reell, weil 1. der Mittelpunkt

$$(2) \quad M = \left(\frac{x_1 + \bar{x}_1}{2}, \quad \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2}, \quad \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right)$$

reell ist und 2. auch ihr Fernpunkt U , gegeben durch den reellen Richtungsvektor

$$(3) \quad u = \left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{2i}, \quad \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i}, \quad \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right)$$

reell ist.

Bemerkung 8: Der Basiskreis k des Drehzylinders

$$(4) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

in Fig. 119 bildet sich im Aufriß nur dann als die (doppeltüberdeckte) Strecke

$$(5) \quad -r \leq y \leq +r, \quad z = 0$$

auf der Rißachse x_{12} (der Länge $2r$) ab, wenn man bloß seine reellen Punkte im Auge hat. Die reellen Punkte P'' der Rißachse x_{12} , die außerhalb dieser Strecke (5) liegen, für die also $|y| > r$ ist, sind Aufrisse von je zwei zueinander konjugiert komplexen Punkten des Basiskreises k

$$(6) \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0,$$

nämlich der beiden zueinander konjugiert komplexen Kreispunkte

$$(7) \quad P_1 = (+i\sqrt{y^2 - r^2}, y, 0) \quad \text{und} \quad P_2 = \bar{P}_1 = (-i\sqrt{y^2 - r^2}, y, 0),$$

deren Aufrisse in dem reellen Punkt $P_1'' = P_2'' = (0, y, 0)$ zusammenfallen (vgl. Bem. 2).

Daraus folgt

Satz 2: Wenn man neben den reellen Punkten des Basiskreises (6) auch noch seine komplexen Punkte betrachtet, so ist sein Aufriß k'' nicht bloß die reelle (doppeltüberdeckte) Strecke (5) der Länge $2r$, sondern die ganze reelle (doppeltüberdeckte) Rißachse x_{12} (die unbegrenzte reelle doppeltgezählte y -Achse).

Ähnlich kann überhaupt jeder beliebige reelle Punkt $P''(y, z)$ der Aufrißebene π_2 als Aufriß zweier zu π_2 symmetrischer Punkte

$$(8) \quad P_1 = (+\sqrt{r^2 - y^2}, y, z) \quad \text{und} \quad P_2 = (-\sqrt{r^2 - y^2}, y, z)$$

des Drehzylinders (4) aufgefaßt werden, die für $|y| < r$ reell verschieden, für $y = r$ reell zusammenfallend und für $|y| > r$ konjugiert komplex sind.

42. Die Rektifikation des Kreises

Man kann den *Mantel eines Drehzylinders* (aber auch jedes anderen Zylinders mit rektifizierbarem Normalschnitt) in die Ebene abwickeln. Schneidet man den Drehzylinder längs einer Mantellinie auf, so ist die *Abwicklung des Zylindermantels* in die Ebene ein *Rechteck*, dessen Höhe gleich der Höhe des Zylinders und dessen Breite gleich dem Umfang $u = 2r\pi$ des Basiskreises ist.

Die Zahl $\pi = 3,14159265 \dots$ ist, wie FERDINAND LINDEMANN (1882) bewiesen hat, eine *transzendente Zahl*, d. h. es gibt keine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, welche die Zahl π zur Wurzel hat. *Deshalb ist es* (nach den Lehren der analytischen Geometrie und der Algebra) *unmöglich, die Zahl π aus der Einheitsstrecke 1 allein mit Benutzung von Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten exakt zu konstruieren.* Daher ist auch die *Rektifikation des Kreises*, d. h. die Konstruktion einer Strecke von der Länge des Kreisumfangs $u = 2r\pi$ bei gegebenem Kreisradius r , mit Zirkel und Lineal allein in einer endlichen Zahl von Konstruktionschritten nicht möglich.

Das Rektifikationsproblem hängt zusammen mit dem Problem der *Quadratur des Kreises*. Dieses verlangt, eine Kreisfläche von gegebenem Radius r in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln. Ist a die Seitenlänge des Quadrates, so folgt $a^2 = r^2\pi$ oder $a = r\sqrt{\pi}$. Wäre die Zahl π mit Zirkel und Lineal in endlicher Schrittzahl konstruierbar, so könnte man auch $\sqrt{\pi}$ (etwa mittels des Höhensatzes in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten 1 und π) konstruieren, und umgekehrt kann aus $\sqrt{\pi}$ auch π selbst konstruiert werden. Daher sind die Rektifikation und die Quadratur eines Kreises äquivalente Probleme. *Auch die Quadratur des Kreises ist somit nach Lindemann mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.*

Bemerkung 1: Das Problem der *Quadratur des Kreises* hat schon die Griechen seit ANAXAGORAS (um 450 v. Chr.) in hohem Maße beschäftigt und war so allgemein bekannt, daß der Lustspieldichter ARISTOPHANES in seinen „Vögeln“ (414 v. Chr.) darauf anspielen konnte. Die Versuche zu seiner Lösung waren später so zahlreich, daß sich im Jahre 1775 die Pariser Akademie der Wissenschaften offiziell weigerte, Arbeiten anzunehmen, die sich damit befaßten. Ebenso verweigerte die Pariser Akademie die Nachprüfung angeblicher Lösungen der *Dreiteilung eines Winkels* (beliebiger Größe), der *Verdoppelung des Würfels* und der Konstruktion eines *perpetuum mobile*.

Seit LINDEMANN ist die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises (mit Zirkel und Lineal in endlicher Schrittzahl) bewiesen. Auch das Problem der Dreiteilung eines (beliebigen) Winkels und das der Würfelverdoppelung ist unter den gleichen Voraussetzungen nicht lösbar, wie man schon sehr viel früher bewiesen hat. Dessenungeachtet suchen auch heute noch viele Nichtmathematiker nach Lösungen; ihre Versuche sind jedoch von vornherein zum Scheitern verurteilt.

Was man mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Konstruktionsschritten erreichen kann, sind nur *näherungsweise Lösungen* dieser Probleme. Exakte Lösungen, die den genannten Bedingungen genügen, sind unmöglich.

Das schließt natürlich nicht aus, daß es *exakte Lösungen* dieser Probleme mit *höheren Konstruktionsmitteln* geben kann. Tatsächlich kann man mittels eines sogenannten

Evolventenzirkels das Problem der Quadratur des Kreises exakt lösen, ebenso mit Hilfe eines *Ellipsenzirkels* das Problem der Dreiteilung des Winkels und das der Verdoppelung des Würfels.

Unter den zahlreichen *Näherungskonstruktionen zur Rektifikation des Kreises* ist die von dem polnischen Jesuitenpater ADAM KOCHAŃSKI (1685) gefundene besonders einfach und sehr genau. Sie erfordert nur wenige Konstruktionsschritte und arbeitet mit konstanter Zirkelöffnung.

In den zu rektifizierenden Kreis trägt man zwei orthogonale Durchmesser (etwa horizontal und vertikal) ein und zeichnet im Endpunkt des einen (etwa im tiefsten Punkt des vertikalen) Durchmessers die (horizontale)

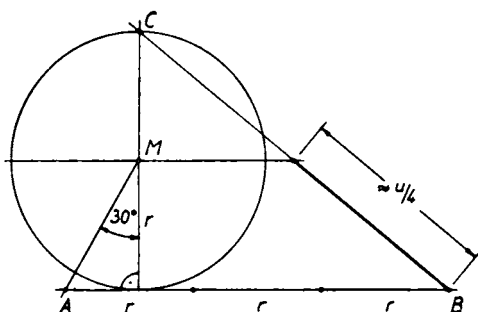


Fig. 120. Näherungsweise Rektifikation des Kreisumfangs nach ADAM KOCHAŃSKI

Tangente (Fig. 120). An den vertikalen Durchmesser trägt man im Kreismittelpunkt *M* einen Winkel von 30° an (das kann, vom horizontalen Durchmesser ausgehend, mit der alten Zirkelöffnung geschehen) und schneidet den zweiten Schenkel dieses Winkels mit jener Tangente im Punkte *A*. Nun trägt man auf der Tangente von *A* aus in Richtung zum Berührungspunkt dreimal den Radius *r* ab und erhält den Punkt *B*. Dann ist die Strecke zwischen *B* und dem Kreispunkt *C*, der dem Berührungspunkt gegenüberliegt (d. h. dem höchsten Punkt des Kreises), näherungsweise gleich dem halben Kreisumfang

$$(1) \quad BC \approx \frac{u}{2} = r\pi.$$

Für die genaue Länge der Strecke *BC* gilt nämlich nach PYTHAGORAS

$$(2) \quad BC^2 = (2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2,$$

woraus wegen $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ folgt

$$(3) \quad BC = r \sqrt[4]{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3,14153336 \dots$$

Gegenüber dem halben Kreisumfang

$$(4) \quad \frac{u}{2} = r\pi = r \cdot 3,14159265 \dots$$

ergibt sich demnach ein *Fehler* F von der Größenordnung

$$(5) \quad F \approx 6 \cdot 10^{-5} \cdot r.$$

Da das unbewaffnete Auge erfahrungsgemäß zwei Punkte, die um weniger als $1/20$ [mm] voneinander entfernt sind, nicht mehr zu trennen vermag, bleibt der *Rektifikationsfehler* F des halben Kreisumfanges $u/2 = r\pi$ so lange unter dieser Schranke der Zeichengenauigkeit, als

$$(6) \quad F \approx 6 \cdot 10^{-5} \cdot r \text{ [mm]} < \frac{1}{20} \text{ [mm]}$$

ist. Dies ist der Fall, wenn der *Kreisradius*

$$(7) \quad r < \frac{10^5}{6 \cdot 20} \text{ [mm]} = \frac{5}{6} \cdot 10^3 \text{ [mm]} = \frac{5}{6} \text{ [m]} < 83,4 \text{ [cm]}$$

ist, d. h. aber für fast alle auf dem Zeichenblatt auftretenden Kreise.

Auch ein *Kreisbogen* (Radius r , Zentriwinkel φ) ist mit Zirkel und Lineal (in endlich vielen Konstruktionsschritten) *nicht exakt rektifizierbar*. Zur *angenäherten Rektifikation* verwendet man am besten die einfache Konstruktion, durch die WILLEBRORD SNELL (1621) eine sehr genaue *Näherungsformel* für die Länge $r\varphi$ des Kreisbogens ausgewertet hat, welche der 1401 in Kues an der Mosel geborene, als Philosoph und Kirchenpolitiker bedeutende Kardinal NICOLAUS CUSANUS (1458) angegeben hat. Diese Formel lautet

$$(8) \quad r\varphi \approx \frac{3r \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

Um nach ihr den zum Zentriwinkel φ und Radius r gehörigen Kreisbogen \widehat{AB} angenähert zu rektifizieren (Fig. 121), trägt man nach SNELL (= SNELLIUS) den Radius r von A aus in der Richtung zum Kreismittelpunkt M dreimal an und projiziert aus dem Endpunkt C den Punkt B auf die Kreistangente im Punkt A . Dann ist die Länge AD des Tangentenstücks näherungsweise gleich dem Kreisbogen \widehat{AB} :

$$(9) \quad AD \approx \widehat{AB}.$$

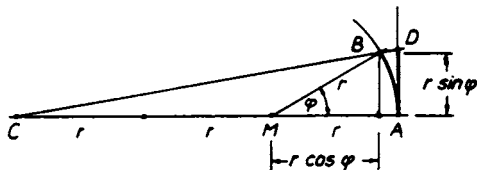


Fig. 121. Näherungsweise Rektifikation eines Kreisbogens nach NICOLAUS CUSANUS und WILLEBRORD SNELL

Die wirkliche Länge der Strecke AD errechnet sich aus der den ähnlichen Dreiecken in Fig. 121 entspringenden Proportion

$$(10) \quad AD:r \sin \varphi = 3r:(2r + r \cos \varphi)$$

zu

$$(11) \quad AD = r \cdot \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

Daraus findet man für den *relativen Fehler*

$$F_r = \frac{\widehat{AB} - AD}{\widehat{AB}} \text{ dieser Näherungskonstruktion die beistehenden Schranken.}$$

Winkel	relativer Fehler
$\varphi = 0^\circ$	$F_r = 0$
$\varphi \leq 15^\circ$	$F_r < 1/25\text{‰}$
$\varphi \leq 30^\circ$	$F_r < 1/2\text{‰}$
$\varphi \leq 45^\circ$	$F_r < 2,5\text{‰}$
$\varphi \leq 60^\circ$	$F_r < 8\text{‰}$

Die Näherungskonstruktion ist um so genauer, je kleiner der Winkel φ ist. *Praktisch brauchbar* ist diese Konstruktion von CUSANUS bis zu einem Winkel von 30° bei Kreisen, deren Radius $r < 600/\pi < 191$ [mm] ist.

43. Die Abwicklung eines ebenen Schnittes des Drehzylinders

Zur *Abwicklung des Drehzylinders* in Fig. 119 samt der auf ihm liegenden Schnittellipse e schneiden wir den Zylindermantel längs der Mantellinie durch den tiefsten Punkt D der Schnittellipse auf und breiten ihn in die Ebene aus. Es ergibt sich ein *Rechteck*, dessen Höhe gleich der Höhe des Zylinders, dessen Basis gleich dem Umfang des Zylinders ist. Dieser Umfang wird nach KOCHAN'SKY durch Rektifikation des Basiskreises gefunden. Um die einzelnen Punkte der Schnittkurve e auf dem Zylindermantel in die Abwicklung zu übernehmen, führt man eine Seitenrißebene π_3 so ein, daß die Schnittebene ε drittprojizierend ist, d. h. man wählt die Rißachse $x_{13} \perp e_1$.

In Fig. 122 wurde dieser Seitenriß gleich als Aufriß gewählt, so daß sich die Schnittellipse e im Aufriß als die Strecke $e'' = C''D''$ auf $e_2 = \varepsilon''$ projiziert, während ihr Grundriß e' mit dem Basiskreis des Drehzylinders zusammenfällt. Die Abwicklung des Zylindermantels, die rechts neben den Aufriß gezeichnet ist, trägt auf der Grundseite die Punkte D^0, B^0, C^0, A^0, D^0 , jeweils im Abstand $u/4$, die aus den Punkten D', B', C', A', D' des Basiskreises e' (Umfang u) hervorgehen. Die Punkte D^0, B^0, C^0, A^0, D^0 der Ellipsenabwicklung e^0 liegen auf den (vertikalen) Mantellinien durch die gleichbezeichneten Punkte des abgewickelten Basiskreises, jeweils in einer Höhe, die dem Aufriß zu entnehmen ist. Aus der Symmetrie der Ellipse e bezüglich des ersten Falliniendurchmessers CD und des ersten Hauptliniendurchmessers AB folgt, daß die *Abwicklung der Ellipse* eine Kurve e^0 ist, die zur Mantellinie $[C^0C^0]$ axial-symmetrisch, und zu den

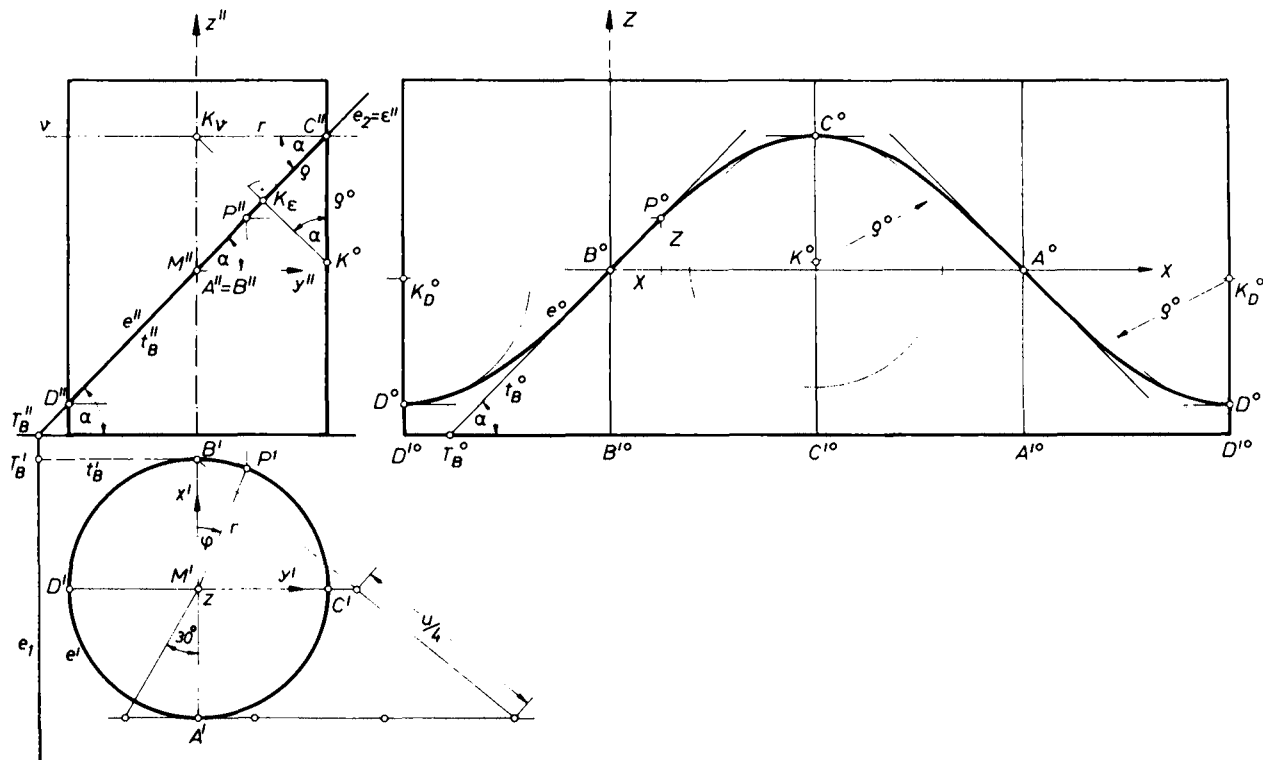


Fig. 122. Abwicklung eines Drehzylinders mit ebenem (elliptischem) Schnitt e in die Ebene (e_o = Sinuslinie)

Punkten A^0 und B^0 zentrisch-symmetrisch ist. Die Tangenten im höchsten Punkt C^0 und im tiefsten Punkt D^0 sind horizontal. Um auch im Punkte B^0 die *Tangente* an die Abwicklung e^0 der Ellipse zu finden, zeichnen wir den Grund- und Aufriß der Tangente t_B im Punkt B an die Ellipse. Ihr Grundriß t'_B deckt sich mit der Tangente an den Basiskreis e' im Punkt B' . Da die Tangente t_B in der Schnittebene ε liegt, hat sie ihren Horizontal-spurpunkt T'_B auf der Horizontalspur e_1 von ε . Bei der Abwicklung des Zylindermantels denken wir uns gleichzeitig die Tangentenebene an den Zylinder im Punkt B , die zur Aufrißebene parallel ist und den Zylinder längs der Mantellinie durch B berührt, mit abgewickelt. Dabei geht die in dieser Tangentenebene liegende Ellipsentangente t_B in die Tangente t_B^0 an die Abwicklung e^0 in B^0 über. Überträgt man daher die Strecke $B'T'_B$ nach $B^0T_B^0$ in die Abwicklung, so geht die Tangente t_B^0 in B^0 durch den Punkt T_B^0 .

Schließlich wollen wir auch noch den *Schmiegekreis im Scheitel* C^0 der abgewickelten Kurve e^0 ermitteln. Die wirkliche Schnittkurve e ist eine Ellipse mit den Halbachsen

$$(1) \quad a = \frac{1}{2} C''D'' = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{1}{2} A'B' = r,$$

wobei α der Neigungswinkel der Schnittebene ε gegen die Grundrißebene ist. Daher hat der Schmiegkreis im Scheitel C der Ellipse e nach (11.10) den Radius

$$(2) \quad \varrho = \frac{b^2}{a} = \frac{r^2}{r/\cos \alpha} = r \cos \alpha.$$

Man kann demnach ϱ auf folgende Weise konstruieren: Man legt in C die Normalebene ν zur Zylinderachse, die den Zylinder in einem Kreis vom Radius r schneidet, der seinen Mittelpunkt K_r auf der Zylinderachse hat. Das Lot von K_r auf die Schnittebene ε schneidet aus ε den Punkt K_ε aus, dessen Abstand von C

$$(3) \quad CK_\varepsilon = C''K_\varepsilon = r \cos \alpha = \varrho$$

gleich dem Schmiegkreisradius der Ellipse im Scheitel C ist.

Bemerkung 1: Diese Konstruktion ist ein Sonderfall eines wichtigen allgemeinen Satzes der Differentialgeometrie, des

Satzes von Meusnier: Legt man in einem regulären Punkt P einer stetig gekrümmten Fläche Φ eine beliebige *Flächentangente* t , dann schneidet jede durch t gelegte Ebene ε die Fläche in einer bestimmten Flächenkurve. In dem Ebenenbüschel mit t als Achse gibt es genau eine Ebene ν , die die Flächennormale n in P enthält, die *Normalebene* ν der Fläche in P durch t . Hat nun der hiezugehörige *Normalschnitt*

der Fläche Φ an der Stelle P den Schmieglekreismittelpunkt K_* , so ist der Schmieglekreismittelpunkt K_* eines beliebigen *schiefen Schnittes* ε von Φ durch t im Punkte P der Fußpunkt des Lotes von K_* auf ε .

Um auch noch den *Schmieglekreisradius* ϱ^0 der *Abwicklung* e^0 im Punkte C^0 zu finden, beachten wir, daß die Abwicklung e^0 der Kurve e in der unmittelbaren Umgebung des Punktes C mit der Normalprojektion der Kurve e auf die Tangentenebene τ des Drehzylinders in C zusammenfällt. Die Normalprojektion des Schmieglekreises der Schnittellipse in C (Schmieglekreismittelpunkt K_* , Schmieglekreisradius ϱ) auf die Tangentenebene τ in C ist nach (30. Fig. 89) eine Ellipse mit den Halbachsen

$$(4) \quad a^0 = \varrho = r \cos \alpha, \quad b^0 = \varrho \sin \alpha = r \sin \alpha \cos \alpha,$$

woraus man nach (11.10) für den Schmieglekreisradius ϱ^0 der Abwicklung e^0 in C^0 erhält:

$$(5) \quad \varrho^0 = \frac{(a^0)^2}{b^0} = \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{r \sin \alpha \cos \alpha} = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Daraus ergibt sich die folgende

Konstruktion für den Schmieglekreisradius ϱ^0 der Abwicklung e^0 im Punkte C^0 , die sinngemäß auch für die Abwicklung e^0 des ebenen Schnittes e einer beliebigen in die Ebene abwickelbaren Fläche gilt: Man legt in dem betreffenden Flächenpunkt C jene Normalebene ν der Fläche, welche in C die Kurve e berührt. Aus dem Schmieglekreismittelpunkt K_* dieses Normalschnittes ν fällt man das Lot auf die Schnittebene ε , das die Tangentenebene τ von C im Schmieglekreismittelpunkt K^0 des Punktes C^0 der Abwicklung e^0 trifft. Die Strecke $CK^0 = C^0K^0$ ist der Schmieglekreisradius ϱ^0 der Abwicklung e^0 im Punkt C^0 .

Bemerkung 2: Diese Konstruktion des Schmieglekreismittelpunktes K^0 der Abwicklung e^0 von e folgt auch ohne Rechnung aus dem *Satze von Meusnier*, wenn man wieder die Tatsache verwendet, daß K^0 die Schmieglekreismitte der Normalprojektion von e auf die Tangentenebene τ des Drehzylinders im Punkte C ist.

Für den zugehörigen (elliptischen) *Projektionszylinder* ist nämlich die Ellipsenebene ε ein *schiefer Schnitt* und die Ebene τ ein *Normalschnitt*, welche zur gleichen Flächentangente gehören. Nach dem Satze von MEUSNIER schneidet das in der Schmieglekreismitte K_* der Ellipse e auf die Ellipsenebene ε errichtete Lot aus der Normalschnittebene τ die gesuchte *Schmieglekreismitte K^0 der Abwicklung e^0* aus. Nach Fig. 122 folgt daraus nochmals für den *Schmieglekreisradius ϱ^0 der Abwicklung* die Formel

$$(6) \quad \varrho^0 = \frac{\varrho}{\sin \alpha} = \frac{r \cos \alpha}{\sin \alpha} = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Zur *analytischen Darstellung der Abwicklung des ebenen Schnittes e eines Drehzylinders* legen wir im Raume ein (ausnahmsweise linkshändiges) car-

tesisches Koordinatensystem $O(x, y, z)$ so, daß sein Nullpunkt auf M fällt, seine z -Achse sich mit der Zylinderachse deckt, während seine x -Achse auf AB liegt (Fig. 122). Dann gilt für die Koordinaten der Punkte P der Schnittellipse

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= p y, \end{aligned}$$

wobei das erste Gleichungspaar den Basiskreis und zugleich den Drehzylinder beschreibt, während die dritte Gleichung die (zweitprojizierende) Ebene ε mit $p = \operatorname{tg} \alpha$ darstellt. Daraus erhält man in

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= p r \sin \varphi \end{aligned}$$

eine Parameterdarstellung der schief im Raum gelegenen Ellipse ε mit φ als Parameter.

Legt man andererseits in die Ebene des abgewickelten Zylindermantels ein ebenes cartesisches Koordinatensystem $O(X, Z)$, dessen Nullpunkt in B^0 liegt, während die Z -Achse sich mit der durch B^0 gehenden abgewickelten Zylindererzeugenden deckt, dann besteht der Zusammenhang (Fig. 122)

$$(9) \quad Z = z, \quad X = \widehat{B'P'} = r\varphi.$$

Daraus folgt nach (8)

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} X &= r\varphi \\ Z &= p r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{oder} \quad Z = p r \cdot \sin\left(\frac{X}{r}\right)$$

als Gleichung der abgewickelten Kurve e^0 . Es gilt also

Satz 1: Die Abwicklung des ebenen Schnittes eines Drehzylinders ist eine Sinuslinie. Die Wellenlänge dieser Sinuslinie ist $2r\pi$, ihre Amplitude pr und ihre Steigung in den Wendepunkten $\operatorname{tg} \alpha = p$.

VIII

Drehkegel

44. Die Kegelschnitte als ebene Schnitte eines Drehkegels.

Der Satz von Dandelin

Ein *Drehkegel* entsteht dadurch, daß eine Gerade g um eine feste, sie unter einem spitzen Winkel schneidende Achse a rotiert. Die Drehachse a ist die *Kegelachse*, der Schnittpunkt S von g mit a die *Kegelspitze* (der Kegelscheitel). Die Gerade g und alle Lagen, die sie bei der Drehung um a einnimmt, heißen *Erzeugende* oder *Mantellinien*, der Winkel zwischen g und a ist der *halbe Öffnungswinkel* des Drehkegels. Die Bahnkurven der einzelnen Punkte von g bei der Drehung um a sind achsennormale Kreise und heißen *Parallelkreise* des Kegels.

Jeder ebene Schnitt eines Drehkegels heißt Kegelschnitt.

Je nachdem die Schnittebene ε durch die Kegelspitze S oder nicht durch S gelegt wird, ist die Schnittkurve ein *zerfallender* oder ein *nicht zerfallender Kegelschnitt*. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der *Neigungswinkel* α der *Schnittebene* ε gegen eine beliebige Parallelkreisebene π des Drehkegels kleiner, gleich oder größer als der *Neigungswinkel* β der *Kegelerzeugenden* gegen π ist. Wir finden so der Reihe nach bei einem reellen Drehkegel folgende ebene Schnittfiguren:

I. Zerfallende Kegelschnitte:

1. $\alpha < \beta$: Kegelspitze S (algebraisch: ein Paar konjugiert komplexer Geraden mit dem reellen Schnittpunkt S).
2. $\alpha = \beta$: eine Kegelerzeugende (algebraisch: eine doppeltzählende reelle Gerade).
3. $\alpha > \beta$: zwei Kegelerzeugende (algebraisch: zwei verschiedene reelle Geraden mit dem reellen Schnittpunkt S).

II. Nichtzerfallende Kegelschnitte:

1. $\alpha < \beta$: *Ellipse*, im Sonderfall ($\alpha = 0$) ein *Kreis*.
2. $\alpha = \beta$: *Parabel*.
3. $\alpha > \beta$: *Hyperbel*.

Zur Entscheidung, von welchem Typ der Kegelschnitt ist, der von einer nicht durch die Kegelspitze S gelegten Ebene ε aus dem Drehkegel ausgeschnitten wird, verschiebt man die Schnittebene parallel zu sich, bis sie durch die Kegelspitze S geht. Je nachdem, ob diese Ebene ε den Kegel

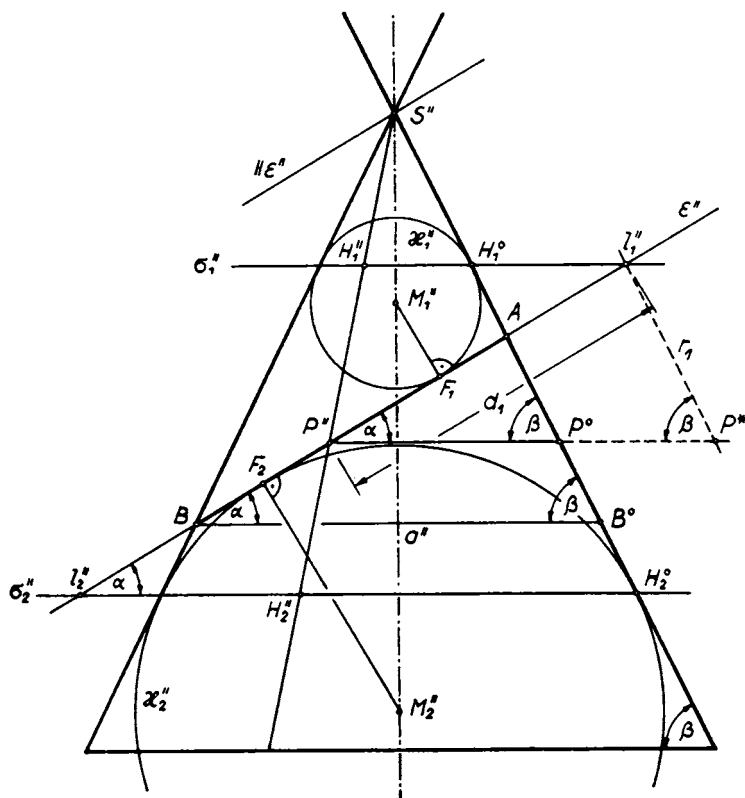


Fig. 123. Satz von DANDELIN für den elliptischen Schnitt eines Drehkegels. Die Brennpunkte F_1, F_2 der Schnittellipse sind die Berührungspunkte der beiden dem Kegel eingeschriebenen DANDELINSchen Kugeln κ_1, κ_2 mit der Schnittebene ε

nur in einem Punkt, einer einzigen (doppeltzählenden, reellen) Mantellinie oder in zwei verschiedenen (reellen) Mantellinien schneidet, ist der Kegelschnitt eine Ellipse (im Sonderfall ein Kreis), eine Parabel oder eine Hyperbel. Der Beweis hierfür wird im folgenden erbracht.

1. Ein Drehkegel mit der Achse a und der Spitze S werde von einer Ebene ε geschnitten, die nicht durch S geht und deren Parallelebene $\parallel \varepsilon$ durch S den Kegel nur in S trifft. Fig. 123 zeigt den Aufriß des Kegels, dessen Achse a zur Grundrißebene senkrecht steht. Der Aufriß des Kegels ist

unten von dem streckenförmigen Aufriß seines *Basiskreises* und seitwärts vom Aufriß seiner beiden *Umrißerzeugenden* (*Konturerzeugenden*) begrenzt, welche zusammen den *zweiten scheinbaren Umriß des Kegels* bilden. Die Schnittebene ε ist zweitprojizierend angenommen. Die Schnittkurve erscheint dann als die doppeltüberdeckte Strecke AB auf ε'' .

In das Kegellinnere legen wir die zwei Kugeln κ_1 und κ_2 , die den Kegel und zugleich die Schnittebene ε von der einen bzw. anderen Seite berühren. Ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 liegen auf der Kegelachse. Den Kegel berühren sie längs je eines Kreises, der in einer achsennormalen Ebene σ_1 bzw. σ_2 liegt, und die Ebene ε berühren sie in je einem Punkt F_1 bzw. F_2 , den Fußpunkten der Lote aus M_1 bzw. M_2 auf ε .

Von einem beliebigen Punkt P der Schnittkurve von ε mit dem Kegel legen wir alle Tangenten an die Berührungskugel κ_1 . Diese berühren κ_1 längs eines Kreises, und aus Symmetriegründen haben alle Punkte dieses Berührungskreises von P gleichen Abstand, insbesondere also auch der Punkt F_1 in ε und der auf der Mantellinie des Kegels durch P liegende Punkt H_1 in σ_1 . Entsprechend sind auch F_2 in ε und H_2 in σ_2 von P gleich weit entfernt. Die wahre Länge dieser Abstände findet man durch Herausdrehen der Punkte P, H_1, H_2 auf die Konturerzeugende des Kegels in die Lage P^0, H_1^0, H_2^0 .

Demnach ist

$$(1) \quad \begin{cases} r_1 = PF_1 = PH_1 = P^0H_1^0, \\ r_2 = PF_2 = PH_2 = P^0H_2^0. \end{cases}$$

Die Summe dieser beiden Strecken ist aber gleich der festen Länge $H_1^0H_2^0$ der Mantellinien zwischen den beiden Ebenen σ_1 und σ_2 , so daß

$$(2) \quad r_1 + r_2 = PF_1 + PF_2 = PH_1 + PH_2 = H_1H_2 = 2a = AB = \text{const}$$

ist, und zwar für alle Punkte P der Schnittkurve. Dies besagt aber, daß P einer *Ellipse* mit den *Brennpunkten* F_1 und F_2 angehört. Die Punkte A und B sind die *Scheitel* dieser Ellipse. Daher ist $AF_1 = BF_2$ und $AF_2 = BF_1$. Daraus folgt leicht, wenn man (2) auf den Scheitel A anwendet

$$AF_1 + AF_2 = AF_1 + BF_1 = AB = 2a,$$

wie schon am Ende von (2) vermerkt wurde.

Die in (2) bewiesene Tatsache ist der Inhalt des *Satzes von Germinal Pierre Dandelin* (1794–1847, Brüssel) im Falle des elliptischen Schnittes eines Drehkegels. Nach ihm heißen die Berührungskugeln κ_1 und κ_2 auch die *Dandelinschen Kugeln* der Schnittellipse.

Die Ellipsebene ε schneidet die Ebenen σ_1 und σ_2 der Berührungskreise der beiden DANDELINSchen Kugeln κ_1 und κ_2 in je einer Geraden l_1 bzw. l_2 , den beiden zu den Brennpunkten F_1 bzw. F_2 gehörigen *Leitgeraden* l_1, l_2 der Ellipse, die sich in Fig. 123 zweitprojizierend, d. h. als Punkte l_1' und l_2'' darstellen. Die durch l_1' gelegte Parallele zur Mantellinie $[H_1^0 H_2^0]$ schneide die Gerade $[P'' P^0]$ im Punkte P^* . Ist d_1 der räumliche (senkrechte) Abstand des Punktes P von der Leitgeraden l_1 , also $d_1 = Pl_1 = P''l_1'$, so ist wegen des Sinussatzes das Verhältnis

$$(3) \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{PF_1}{Pl_1} = \frac{P^0 H_1^0}{P'' l_1'} = \frac{P^* l_1'}{P'' l_1'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const} < 1$$

eine feste Zahl, also unabhängig von der Lage des Punktes P auf der Ellipse; denn α ist der feste Neigungswinkel der Schnittebene ε und β der feste Neigungswinkel der Kegelerzeugenden gegen die Horizontalebene. Da $\alpha < \beta$ vorausgesetzt wurde, ist das Verhältnis der Sinus dieser Winkel eine feste Zahl kleiner als 1.

Dreht man in Fig. 123 auch den Punkt B auf die rechte Umrißerzeugende in die Lage B^0 , so erhält man andererseits aus dem zum Dreieck $(l_1' P'' P^*)$ ähnlichen Dreieck (ABB^0) für dieses Verhältnis den festen Wert

$$(4) \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AB^0}{AB} = \frac{2e}{2a} = \frac{e}{a} = \varepsilon,$$

weil nach (2) $H_1 H_2 = H_1^0 H_2^0 = 2a$, ferner

$$(5) \quad AH_1^0 = AF_1 \quad \text{und} \quad B^0 H_2^0 = BF_2$$

und folglich

$$(6) \quad AB^0 = H_1^0 H_2^0 - (AH_1^0 + B^0 H_2^0) = AB - (AF_1 + BF_2) = F_1 F_2 = 2e$$

ist. Man nennt das (dimensionslose) Verhältnis des halben Brennpunktsabstandes e zur halben großen Achse a die *numerische Exzentrizität* $\varepsilon = e/a$ der Ellipse; es stellt eine reine Zahl dar, die auch als die *Formzahl* der Ellipse bezeichnet wird. Ähnliche Ellipsen haben dieselbe Formzahl $\varepsilon = e/a < 1$.

Damit ist die folgende wichtige Eigenschaft der Ellipse nachgewiesen:

Satz 1: Für jeden Punkt einer Ellipse ist das Verhältnis $r:d$ seiner Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitgeraden eine Konstante, die < 1 und gleich der numerischen Exzentrizität oder Formzahl $\varepsilon = e/a$ der Ellipse ist.

Ist L_1 der Schnittpunkt der Leitgeraden l_1 mit der großen Ellipsenachse $[AB]$, so gilt (Fig. 124), wenn man auf den Streckensinn achtet, für die

Ellipsenscheitel A und B nach (4)

$$\frac{BF_1}{BL_1} = \frac{r_B}{l_B} = \varepsilon > 0, \quad \frac{AF_1}{AL_1} = \frac{r_A}{l_A} = -\varepsilon < 0.$$

Daraus folgt

$$(7) \quad (AB \cdot L_1) = \frac{AL_1}{BL_1} = \frac{AL_1}{AF_1} \cdot \frac{BF_1}{BL_1} \cdot \frac{AF_1}{BF_1} = -\frac{AF_1}{BF_1} = -(AB \cdot F_1),$$

d. h.:

Der Schnittpunkt einer Leitgeraden mit der großen Ellipsenachse und der zugehörige Brennpunkt teilen den großen Ellipsendurchmesser AB außen und innen in gleichem Verhältnis.

Die *Leitgeraden* heißen daher auch die *Polaren der Brennpunkte bezüglich der Ellipse*.

Bemerkung 1: Zur planimetrischen Konstruktion eines beliebigen Punktes der Leitgeraden genügt es, die Tangenten in den Endpunkten einer beliebigen Brennpunktsehne der Ellipse miteinander zu schneiden. Dieser Schnittpunkt liegt dann auf der Leitgeraden.

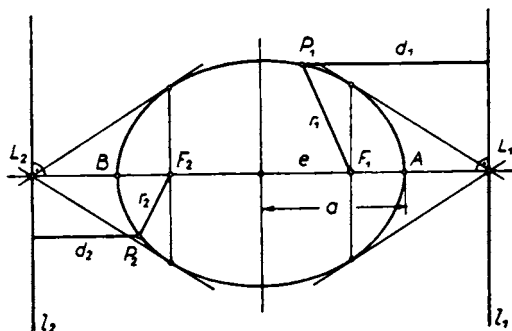


Fig. 124. Die Ellipse als Ort der Punkte P , deren Abstände r und d von einem Brennpunkt F und seiner Leitgeraden l festes Verhältnis $r/d = \text{const} < 1$ haben

2. Wird ein Drehkegel von einer Ebene ε so geschnitten, daß die Parallelebene $\parallel \varepsilon$ durch die Kegelspitze den Kegel in zwei reellen und verschiedenen Mantellinien schneidet (Fig. 125), dann läßt sich ganz analog wie beim elliptischen Schnitt nachweisen, daß der ebene Schnitt des Kegels eine *Hyperbel* ist.

Die *Dandelinschen Kugeln* κ_1 und κ_2 berühren den Kegel in je einem Kreis, der in der Normalebene σ_1 bzw. σ_2 zur Kegelachse a liegt, und die Schnittebene ε in den Punkten F_1 und F_2 , den *Brennpunkten der Hyperbel*. Wenn nämlich P ein beliebiger Punkt der Schnittkurve ist, so gilt, weil alle Tangenten aus P an die Kugel κ_1 bzw. κ_2 gleiche Länge haben,

$$(8) \quad \begin{cases} r_1 = PF_1 = PH_1 = P^0 H_1^0 \\ r_2 = PF_2 = PH_2 = P^0 H_2^0, \end{cases}$$

also

$$(9) \quad r_1 - r_2 = PF_1 - PF_2 = P^0 H_1^0 - P^0 H_2^0 = H_1^0 H_2^0 = 2a = AB = \text{const},$$

d. h. die Schnittkurve ist eine *Hyperbel* mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Der Satz von Dandelin gilt daher sinngemäß auch für jeden hyperbolischen Schnitt eines Drehkegels.

Unter den Erzeugenden des Drehkegels gibt es genau zwei, die die Schnittebene ε in keinem eigentlichen Punkt treffen. Sie werden aus dem Kegel von der Parallelebene zu ε durch die Kegelspitze S ausgeschnitten und

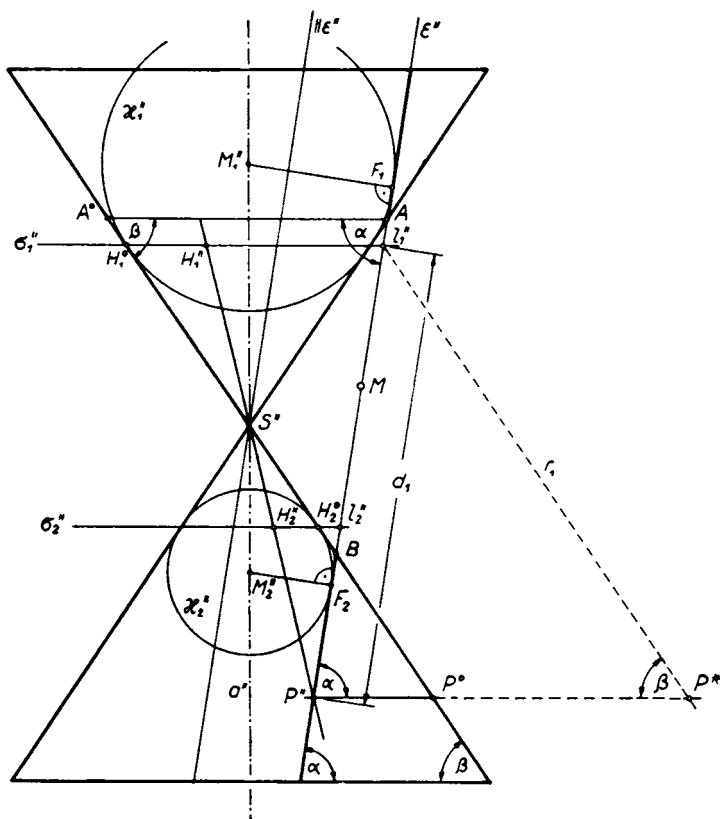


Fig. 125. Satz von DANDELIN für den hyperbolischen Schnitt eines Drehkegels. Die Brennpunkte F_1, F_2 der Schnitthyperbel sind die Berührungspunkte der beiden dem Kegel eingeschriebenen DANDELINSCHEN Kugeln κ_1, κ_2 mit der Schnittebene ε .

legen die Richtungen nach den beiden Fernpunkten der Schnitthyperbel, d. h. die Richtungen ihrer Asymptoten fest. Also gilt

Satz 2: Die Asymptoten a_1, a_2 des Hyperbelschnittes eines Drehkegels sind parallel zu jenen beiden Erzeugenden des Drehkegels, die von der zur Schnittebene ε parallelen Ebene $\parallel \varepsilon$ durch die Kegelspitze S ausgeschnitten werden.

Kennt man den *Mittelpunkt* M der Hyperbel (etwa als Mitte zwischen ihren beiden *Scheiteln* A, B), so hat man damit auch ihre Asymptoten.

Die Schnittgeraden der Schnittebene ε mit den Ebenen σ_1, σ_2 , in denen die Berührungskreise der DANDELINSchen Kugeln κ_1, κ_2 mit dem Kegel liegen, sind die *Leitgeraden* l_1, l_2 der Hyperbel, die den beiden Brennpunkten F_1, F_2 zugeordnet sind. Die Parallele zur Mantellinie $[H_1^0 H_2^0]$ durch l_1'' (Fig. 125) bestimmt mit der Horizontalen durch P'' das Dreieck $(l_1'' P'' P^*)$, in dem als Basiswinkel der Neigungswinkel α der Schnittebene ε und der Neigungswinkel β der Kegelerzeugenden gegen die Horizontalebene auftreten. Ist $r_1 = PF_1$ und $d_1 = Pl_1$ der räumliche (senkrechte) Abstand des Hyperbelpunktes P von der Leitgeraden l_1 , so gilt:

$$(10) \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{PF_1}{Pl_1} = \frac{P^0 H_1^0}{P'' l_1''} = \frac{P^* l_1''}{P'' l_1''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const} > 1,$$

wobei der Wert dieser Konstanten unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes P auf der Hyperbel ist. Andererseits ist im Dreieck (ABA^0) :

$$(11) \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{A^0 B}{AB} = \frac{2e}{2a} = \frac{e}{a} = \varepsilon,$$

da nach (9) $AB = 2a$ und (aus analogen Gründen wie beim elliptischen Schnitt) $A^0 B = F_1 F_2 = 2e$ ist. Es folgt

Satz 3: Für jeden Punkt einer Hyperbel ist das Verhältnis $r:d$ der Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitgeraden eine Konstante > 1 und gleich der numerischen Exzentrizität oder Formzahl $\varepsilon = e/a$ der Hyperbel.

Ferner gilt, entsprechend wie bei der Ellipse (Fig. 126):

Die beiden Leitgeraden l_1, l_2 einer Hyperbel sind die Polaren der Brennpunkte F_1, F_2 bezüglich der Hyperbel.

3. Ist schließlich (Fig. 127) die Schnittebene ε so gewählt, daß die Parallelebene $\parallel \varepsilon$ durch S den Kegel längs einer Erzeugenden berührt, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. Diese einzige zu ε parallele Kegelerzeugende legt die Richtung nach dem (einzigen) Fernpunkt der Parabel, d. h. die Richtung der Parabelachse und aller Parabeldurchmesser fest.

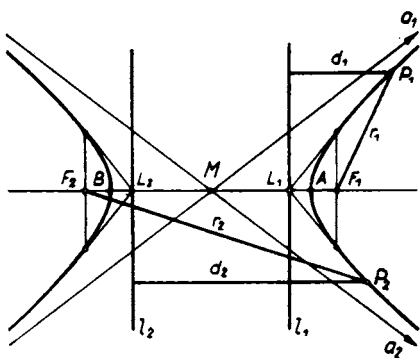


Fig. 126. Die Hyperbel als Ort der Punkte P , deren Abstände r und d von einem Brennpunkt F und seiner Leitgeraden l festes Verhältnis $r/d = \text{const} > 1$ haben

schnitt k . Unter den Kugeln κ , welche dem Kegel eingeschrieben sind, gibt es solche, welche die Ebene ε des Kegelschnittes berühren. Die Berührungspunkte dieser Dandelin'schen Kugeln mit der Schnittebene ε sind die Brennpunkte des Kegelschnittes k . Die Schnittgeraden der Ebene ε mit jenen Ebenen, welche die Berührungskreise der Dandelin'schen Kugeln mit dem Kegel enthalten, sind die Leitgeraden des Kegelschnittes k .

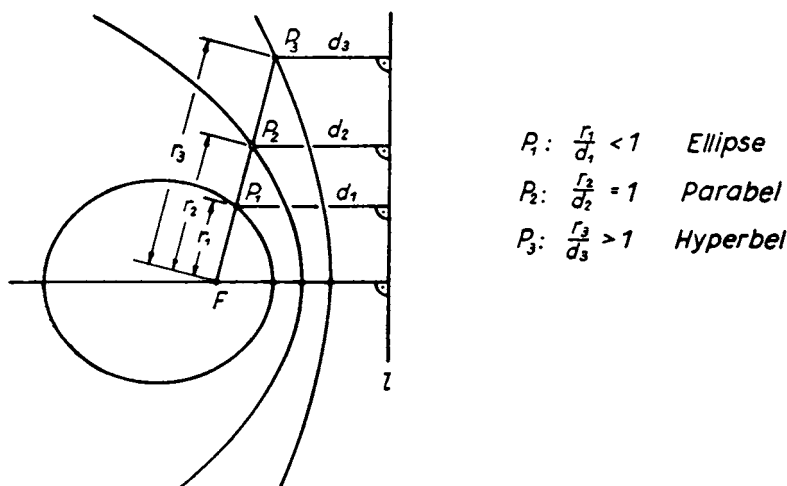


Fig. 128. Ellipse, Parabel, Hyperbel als Ort der Punkte P , deren Abstände r und d von einem Brennpunkt F und seiner Leitgeraden l festes Verhältnis $r/d = \text{const}$ haben

Für alle drei Arten von Kegelschnitten gilt dabei die folgende *gemeinsame Definition* (Fig. 128), die sich schon bei APOLLONIOS von PERGE (262—190 v. Chr.) findet:

Satz 4: Ein (regulärer) Kegelschnitt ist der Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt F (Brennpunkt) und einer (F nicht enthaltenden) festen Geraden l (Leitgerade) konstantes Abstandsverhältnis $r/d = \varepsilon$ haben. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem dieses Abstandsverhältnis ε kleiner, gleich oder größer als 1 ist.

45. Der elliptische Schnitt eines Drehkegels

Der Drehkegel (Spitze S) stehe mit einem Parallelkreis (Basiskreis) auf der Grundrißebene, so daß seine Achse a erstprojizierend ist. Die Schnittebene ε , die mit der Grundrißebene π_1 einen Winkel α bilde, der kleiner als der Neigungswinkel β der Kegerzeugenden gegen π_1 sei, werde zweitprojizierend angenommen (Grundrißspur e_1 , Aufrißspur $e_2 = \varepsilon''$). Im Aufriß stellt sich dann die Schnittellipse e (genauer: der reelle Zug der

Schnittellipse e) als die doppelt überdeckte Strecke $A''B''$ dar (Fig. 129). Aus Symmetriegründen trägt die erste Falllinie f_1 eine Hauptachse der Ellipse im Raum und die Strecke $A'B'$ ist eine Hauptachse ihres Grundrißbildes e' . Der Mittelpunkt M von e ist die Mitte des großen Ellipsendurchmessers AB , also ist M'' der Mittelpunkt von $A''B''$ und M' der Mittelpunkt von $A'B'$. Die kleine Achse der Ellipse e deckt sich mit der ersten Hauptlinie h_1 durch M , ihre Endpunkte C und D sind die Durchstoßpunkte von h_1 durch den Kegel. Sie liegen auf dem zu M gehörenden Parallelkreis k des Kegels, dessen Aufriß k'' zweitprojizierend ist, während sein Grundriß k' ein Kreis um S' ist mit einem Radius, der dem Aufrißbild zu entnehmen ist. Mit Hilfe der Hauptachsen $A'B'$ und $C'D'$ kann nun der Grundriß e' der Schnittellipse e gezeichnet werden.

Zur *Punktkonstruktion der Grundrißellipse e'* stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, die sämtlich *geeignete Hilfsebenen* verwenden.

1. Man legt beliebige *achsennormale Hilfsebenen*; diese schneiden den Kegel in einem Kreis, die Schnittebene ε in einer ersten Spurparallelen. Die Schnittpunkte beider sind Punkte der Ellipse (Beispiel: Punkt C').

2. Man legt beliebige *Hilfsebenen durch die Kegelachse*. Sie schneiden den Kegel in zwei Mantellinien, die Schnittebene ε in einer Geraden. Im Grundriß decken sich diese Geraden; im Aufriß dagegen sind sie verschieden, und ihre Schnittpunkte ergeben zwei Punkte der Schnittellipse, die in den Grundriß übertragen werden können (Beispiel: Punkt P'). Die Methode versagt allerdings dann, wenn die Hilfsebene doppelprojizierend ausfällt (Mantellinien durch 3 und 9).

3. Man legt beliebige *zweitprojizierende Hilfsebenen durch die Kegelspitze S* , welche den Kegel in zwei Mantellinien und die Ebene ε in einer Geraden schneiden. Deren Treffpunkte gehören der Schnittellipse e an (Beispiele: die Punkte A' und B' sowie W' und \overline{W}').

Zur *Tangentenkonstruktion* in einem Punkt P' der Grundrißellipse e' hat man die Tangentenebene τ im Punkte P des Drehkegels mit der Schnittebene ε zu schneiden. Die Grundrißspur t_1 von τ ist die Tangente an den Grundkreis in dem Spurpunkt $P_1 = P'_1$ der Mantellinie des Punktes P . Der Schnittpunkt $T = T'$ von t_1 mit e_1 ist dann der Grundrißspurpunkt der Tangente t in P , und seine Verbindung mit P' ist der gesuchte Grundriß t' dieser Tangente oder die Tangente an die Grundrißellipse e' im Punkt P' .

Der *Basiskreis* (Ebene π_1) und jeder nicht zerfallende *ebene Schnitt* (Ebene ε) des Drehkegels sind im Raum durch seine Mantellinien *perspektiv*

kollinear aufeinander bezogen. *Kollinationszentrum* ist die *Kegelspitze* S , *Kollinationsstrahlen* sind die *Mantellinien*, *Kollinationsachse* ist die Spur e_1 der Schnittebene ε auf der Basisebene π_1 .

Diese Beziehung ergibt im Grundriß eine *ebene perspektive Kollination* zwischen dem in π_1 liegenden *Basiskreis* des Drehkegels und dem Grundriß e' des ebenen Schnittes e . *Kollinationszentrum* ist dabei der Grundriß S' der Kegelspitze S , *Kollinationsstrahlen* sind die Grundrisse der Mantellinien und *Kollinationsachse* ist die Spur e_1 der Schnittebene ε auf der Basiskreis-ebene π_1 (Grundrißspur von ε).

Auch diese perspektiv-kollineare Beziehung kann oft mit Vorteil *konstruktiv* zur Ermittlung von Punkten und Tangenten des ebenen Schnittes e oder seines Grundrisses e' ausgenutzt werden. Im Grundriß entspricht dabei z. B. in Fig. 129 dem Kreispunkt P'_1 der Ellipsenpunkt P' . Die *Ellipsentangente* t' in P' ist daher das *perspektiv-kollineare Bild* der Kreistangente t_1 in P'_1 . Die Geraden t' und t_1 schneiden sich dabei in einem Punkte T' der Kollinationsachse e_1 . Damit kann man sofort in jedem Punkte P' der Ellipse e' die Tangente t' zeichnen.

Für den Grundriß der Schnittlinie des Drehkegels und der Ebene ε gilt allgemein der folgende wichtige

Satz 1: *Der ebene Schnitt eines Drehkegels, der auf der Grundrißebene steht, ist ein nicht zerfallender Kegelschnitt, sofern die Schnittebene ε die Kegelspitze nicht enthält. Der Grundriß dieser Schnittkurve ist ein Kegelschnitt vom gleichen Typ. Dabei ist der Grundriß der Kegelspitze ein Brennpunkt für den Grundriß des Kegelschnitts. Die zugehörige Leitgerade ist der Grundriß jener Geraden, in der sich die Schnittebene ε und die zur Grundrißebene parallele Ebene durch die Kegelspitze schneiden.*

Beweis im Falle eines *elliptischen Schnittes*. Die Ebene ε und die Horizontalebene durch die Kegelspitze S schneiden sich in einer Geraden l , deren Grundriß l' in Fig. 129 eingezeichnet ist. Der Abstand eines beliebigen Punktes P' der Grundrißkurve e' vom Grundriß S' der Kegelspitze sei mit r , der Abstand von l' mit d bezeichnet. Ist h der Höhenunterschied zwischen S und P , so folgt aus dem Aufriß, wenn α der Neigungswinkel der Schnittebene ε und β der Neigungswinkel der Kegel erzeugenden gegen die Grundrißebene ist:

$$(1) \quad \frac{h}{d} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{h}{r} = \operatorname{tg} \beta$$

oder wegen $\alpha < \beta$

$$(2) \quad \frac{r}{d} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{const} < 1.$$

Da das Verhältnis r/d für jeden Punkt P' des Grundrisses e' der Schnittkurve denselben festen Wert < 1 hat, folgt, daß die Grundrißkurve e' eine Ellipse ist, die S' zum Brennpunkt und l' zur Leitgeraden hat, w. z. b. w.

Dieser Satz gilt, ebenso wie sein Beweis, sinngemäß auch für einen hyperbolischen und einen parabolischen Schnitt des Drehkegels, d. h. für $\alpha > \beta$ und $\alpha = \beta$.

Die Abwicklung des von einem Parallelkreis begrenzten Stückes des Kegelmantels, der längs einer Mantellinie (etwa längs der Mantellinie des Punktes A) aufgeschnitten ist, ist ein *Kreissektor* (Fig. 130). Der Radius dieses Kreissectors ist gleich der Länge s der Mantellinien, seine Bogenlänge gleich dem Umfang $2r\pi$ des Kegelgrundkreises. Wir bezeichnen dabei mit r jetzt (anders als oben) den Radius des Basiskreises des Kegels. Man hat nun diesen Umfang auf dem Bogen des Kreissectors abzutragen. Dazu rektifiziert man etwa einen 30° -Bogen des Grundkreises nach CUSANUS und SNELL (Radius r , Mittelpunkt M_r) durch Projektion aus O_r und verbiegt die so auf der Tangente erhaltene Strecke auf den Bogen des Kreises mit dem Radius s (Mittelpunkt M_s) durch Rückprojektion aus O_s . Damit ist zunächst die Abwicklung des Kegelmantels samt den Erzeugenden, die einer Zwölfereinteilung des Grundkreises entsprechen, gewonnen.

Um die *Punkte P der Schnittellipse in die Abwicklung zu übertragen*, dreht man diese im Aufriß (Fig. 129) auf eine Umrißmantellinie nach P'' und erhält dadurch ihre wahre Entfernung $SP = S''P''$ von der Kegelspitze S ; diese Länge kann in die Abwicklung übernommen werden ($S^0P^0 = S''P''$). Da der Drehkegel und die Schnittebene ε und damit auch die Schnittellipse e eine zur Aufrißebene parallele Symmetrieebene durch S haben, ist auch die Abwicklung e^0 der Ellipse bezüglich der Mantellinie durch B^0 und — falls man sich die Kurve über A^0 hinaus fortgesetzt denkt — auch bezüglich der Mantellinien durch A^0 symmetrisch. Diese Punkte sind daher Scheitel der Abwicklung e_0 , und die Kurve e_0 durchsetzt in ihnen die Mantellinien senkrecht.

Um die *Tangente t^0 in einem beliebigen Punkt P^0 der abgewickelten Kurve e^0* zu konstruieren, hat man die (in der Tangentenebene τ des Kegels im Punkte P liegende) Tangente t von e zu übertragen. Die Tangentenebene τ breitet sich, wenn sie zusammen mit dem Kegelmantel abgewickelt wird, so aus, daß sie mit dem Kegelmantel nach wie vor die Kegerzeugende des Punktes P gemeinsam hat. Die Tangente t_1 an den Kegelgrundkreis im Spurpunkt P'_1 dieser Kegerzeugenden geht bei der Abwicklung der

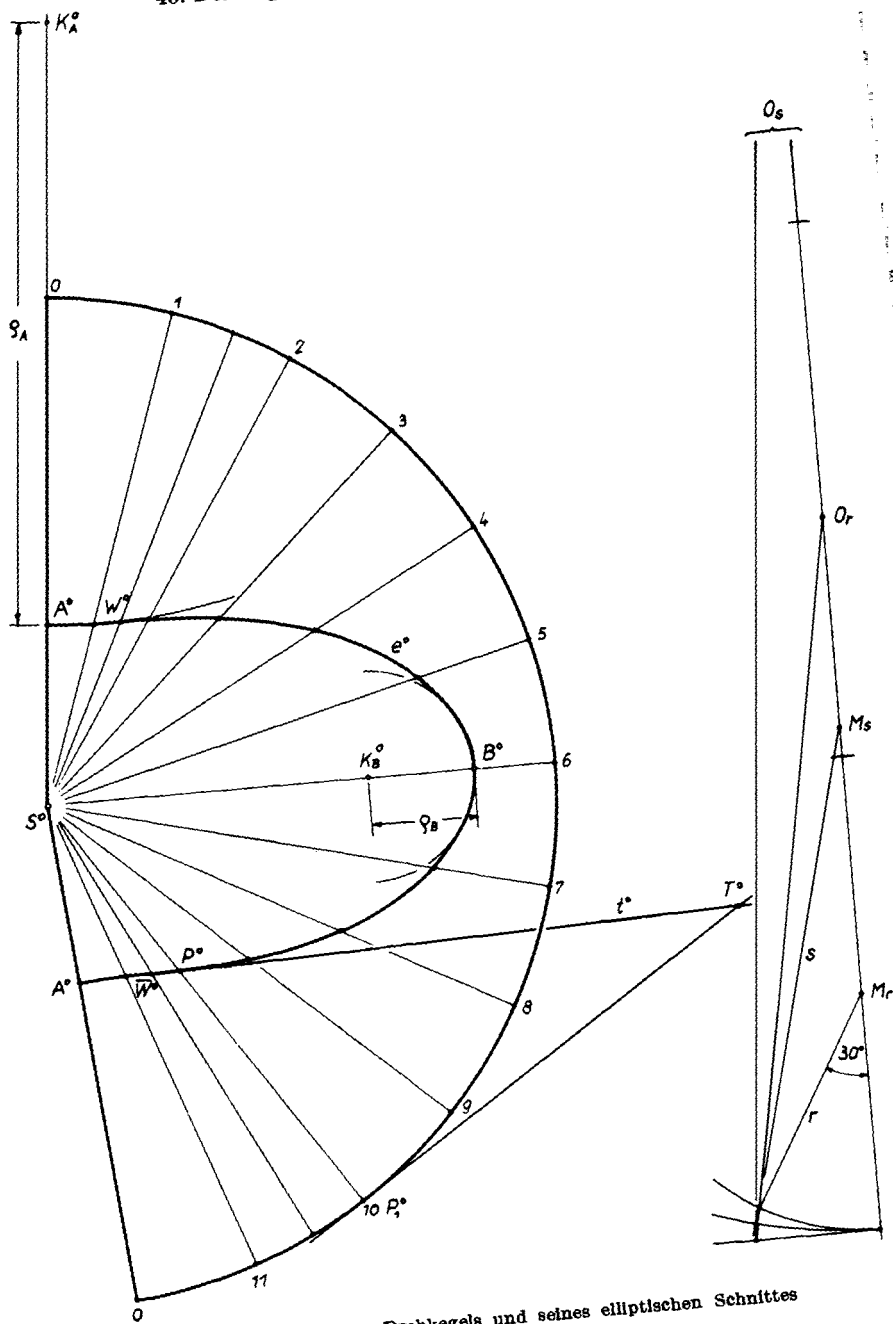


Fig. 130. Abwicklung des Drehkegels und seines elliptischen Schnittes aus Fig. 129 in die Ebene

Tangentenebene über in die Tangente an die Abwicklung des Grundkreises im Punkt P_1^0 . Dabei kann der Spurpunkt T' der Tangente t sofort in die Abwicklung nach T^0 mit übernommen werden, da $P_1'T' = P_1^0T^0$ ist. Mit $[P^0T^0]$ hat man damit die Tangente t^0 im Punkte P^0 der Abwicklung e^0 der Ellipse e gefunden.

Die *Scheitelschmiegekreise* in den Scheiteln B^0 und A^0 der abgewickelten Schnittkurve e^0 lassen sich nach den in 43. entwickelten Überlegungen auf folgende Weise finden (Fig. 129): Der Parallelkreis des Kegels für den Punkt B hat seinen Mittelpunkt auf der Kegelachse a , und folglich hat nach dem *Satz von Meusnier* der zugehörige Normalschnitt ν seinen Schmiegekreismittelpunkt in dem Punkt M_ν , in dem die Kegelnormale des Punktes B ($=$ Normale zur Umrißerzeugenden) die Kegelachse trifft. Das Lot von diesem Punkt M_ν auf die Schnittebene ε schneidet die Erzeugende des Punktes B in einem Punkte K_B , dessen Entfernung von B gleich dem Schmiegekreisradius $\varrho_B = B''K_B'' = B^0K_B^0$ für den Punkt B^0 in der Abwicklung ist. Genau so wird der Schmiegekreisradius ϱ_A für den Scheitel A^0 gefunden.

Da die Schmiegekreismittelpunkte K_B und K_A in den Punkten B^0 und A^0 auf verschiedenen Seiten der Kurve e^0 liegen, hat diese zwischen den Punkten A^0 und B^0 einen *Wendepunkt*. Zur Konstruktion dieses Wendepunktes benutzt man die (hier nicht bewiesene) Tatsache, daß nur jene Punkte W der Schnittkurve e zu einem Wendepunkt W^0 der abgewickelten Kurve e^0 führen, deren *Tangentenebenen* τ an den Drehkegel auf der Schnittebene ε senkrecht stehen. Da die Schnittebene ε zweitprojizierend ist, muß die zweite Spur dieser Tangentenebene τ und damit auch ihre zweite Spurparallele $h_{2\tau}$ durch die Kegelspitze S auf ε'' senkrecht stehen. Ihr Aufriß $h_{2\tau}''$ ist das Lot von S'' auf ε'' , ihr Grundriß $h_{2\tau}'$ die Parallele zur Rißachse x_{12} durch S' . Der Grundrißspurpunkt H_2' von $h_{2\tau}$ liegt auf $h_{2\tau}'$ und auf dem Ordner des Punktes $H_2'' = [h_{2\tau}'', x_{12}]$. Die Grundrißspur τ_1 der Tangentenebene τ ist dann die Tangente von H_2' an den Basiskreis des Kegels; da es zwei solche Tangenten τ_1 und $\bar{\tau}_1$ gibt, gibt es zwei zu ε normale Tangentenebenen τ und $\bar{\tau}$. Die gesuchten Punkte W_1 und W_2 der Schnittkurve e liegen auf den Kegerzeugenden, längs denen die Ebenen τ und $\bar{\tau}$ den Kegel berühren. Die genaue Konstruktion ihrer Risse W_1', W_1'' bzw. W_2', W_2'' und ihre Übertragung in die Abwicklung geschieht nach den bereits geschilderten Verfahren. Man erhält in Fig. 130 zwei Wendepunkte W_1^0 und W_2^0 der Abwicklung e^0 . Auch die *Wendepunktstangenten* können nach dem dargelegten Verfahren leicht gefunden werden.

46. Der hyperbolische Schnitt eines Drehkegels

Ein Drehkegel mit der erstprojizierenden Achse a und der Spitze S werde von einer Ebene ε so geschnitten, daß die Parallelebene ε durch S aus dem Kegel zwei reelle Erzeugende ausschneidet. Dann ist die Schnittkurve eine *Hyperbel*. Insbesondere kommt auch dann ein Hyperbelschnitt zustande, wenn die Schnittebene ε parallel zur Kegelachse liegt. Die Kegel-erzeugenden, die der Parallelschnitt $\parallel \varepsilon$ durch S liefert, geben dabei die Richtungen der Fernpunkte der Hyperbel an, d. h. die Asymptoten der Hyperbel sind zu ihnen parallel.

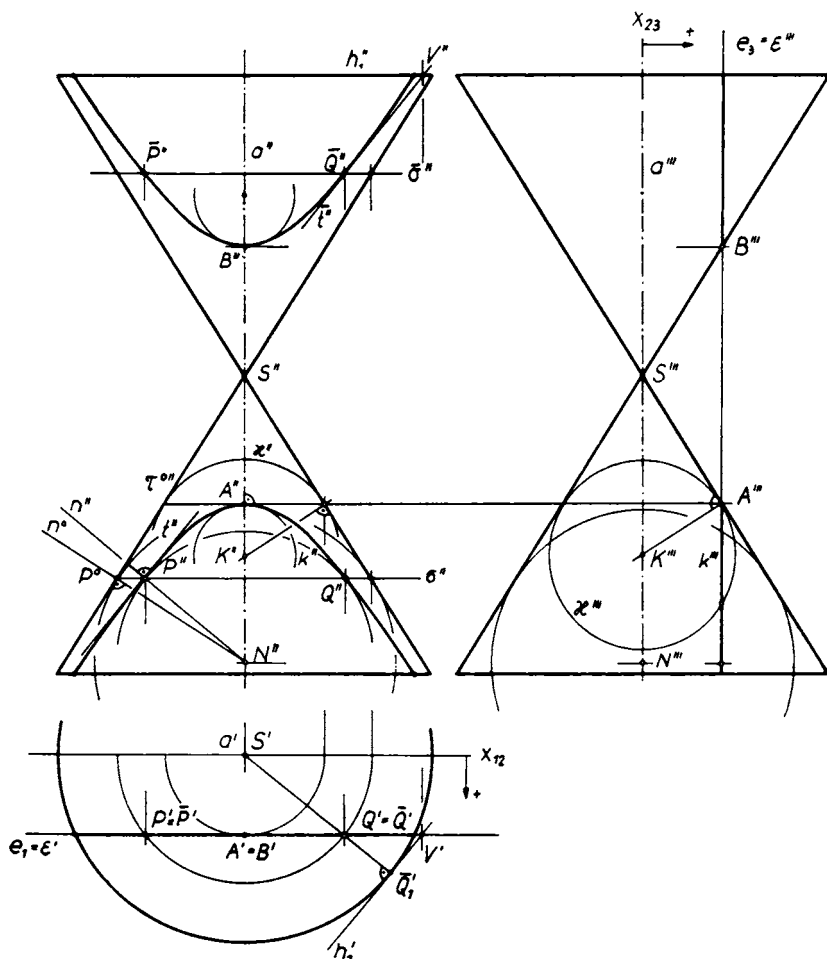


Fig. 131 zeigt die Konstruktion eines Hyperbelschnittes in dem Fall, daß die *Schnittebene* ε zur *Aufrißebene* *parallel* ist. Ihr Grundriß ε' ist dann eine zur Rißachse x_{12} parallele Gerade. Der Grundriß der Hyperbel deckt sich mit ε' , ihr Aufriß ist eine zur wahren Hyperbel kongruente Hyperbel. Aus Symmetriegründen ist S'' der *Mittelpunkt* und a'' die *reelle Achse* der Aufrißhyperbel. Ihre *Asymptoten* fallen mit dem Aufriß der Konturerzeugenden (dem *zweiten scheinbaren Umriß*) des Kegels zusammen. Diese Konturerzeugenden sind nämlich zur Hyperbelebene ε parallel und weisen daher nach den *Fernpunkten der Hyperbel*. Die Konturebenen des Kegels sind Tangentenebenen in diesen Fernpunkten und projizierend; ihre Aufrisse, die Konturerzeugenden, sind daher die *Asymptoten der Hyperbel*.

Zur *Punktkonstruktion* der Aufrißhyperbel legt man achsennormale Schnitte. Jede solche Ebene σ schneidet den Kegel in einem Parallelkreis, der im Grundriß in wahrer Größe erscheint. Seine Schnittpunkte P' und Q' mit ε' liefern im Aufriß die Punkte P'' und Q'' der Aufrißhyperbel auf σ'' . Der zu σ bezüglich der Kegelspitze S symmetrische achsennormale Schnitt $\bar{\sigma}$ führt im Grundriß zum gleichen Kreis, weshalb die Punkte P' und Q' auch die Grundrisse der Hyperbelpunkte \bar{P} und \bar{Q} in $\bar{\sigma}$ sind. Zu dem Grundrißkreis, der ε' gerade (im Punkt $A' = B'$) berührt, gehören die *Scheitel* A'' und B'' der Aufrißhyperbel.

Die *Tangente* t im Punkte P der *Hyperbel* ist die Schnittgerade der Schnittebene ε und der Tangentenebene τ des Kegels im Punkte P . Die Ebene τ berührt den Kegel längs der Erzeugenden des Punktes P . Drehen wir den Kegel samt dieser Tangentenebene τ um seine Achse a , bis der Punkt P die Lage P^0 auf der Konturerzeugenden erreicht hat, dann ist die Tangentenebene τ^0 zweitprojizierend und ihr Aufriß $\tau^{0''}$ deckt sich mit jener Konturerzeugenden. Ihre Normale n^0 im Punkte P^0 steht auf τ^0 und damit auf der Konturerzeugenden $\tau^{0''}$ senkrecht und schneidet die Kegelachse a in einem Punkt N . Dreht man den Punkt P^0 in seine ursprüngliche Lage P zurück, dann bleibt der Punkt N als Punkt der Drehachse a fest. Die Kegelnormalen aller auf demselben Parallelkreis des Kegels liegenden Punkte P bilden einen Drehkegel mit jenem Parallelkreis als Basiskreis und dem Punkt N als Spitze, den sogenannten *Normalenkegel* des Parallelkreises. Die Gerade $[NP]$ ist daher die *Kegelnormale* n des Punktes P , und $[N''P'']$ ist ihr Aufriß n'' . Auf dieser Normalen n steht die Tangentenebene τ des Punktes P senkrecht. Da die Tangente t die Schnittgerade der Tangentenebene τ und der zur Aufrißebene π_2 parallelen Ebene ε ist, ist t die zweite

Hauptlinie der Tangentenebene τ im Punkte P , und ihr Aufriß t'' steht folglich auf n'' senkrecht. Dieses Verfahren zur Tangentenkonstruktion heißt, da es die Kegelnormale n benutzt, *Normalenmethode*.

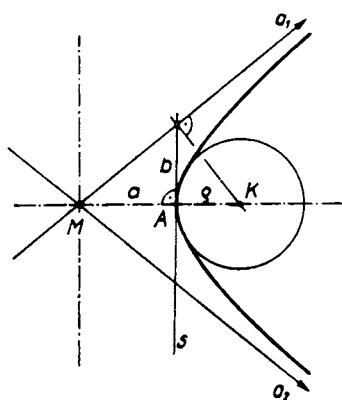
Statt dieser konstruktiv einfachen Methode kann auch ein anderes Verfahren verwendet werden, das die Tangente als Schnitt der Tangentenebene an den Kegel mit der Ebene ε ohne Zuhilfenahme der Kegelnormalen n liefert: *Methode der Tangentenebene*. Sie ist in Fig. 131 für den Punkt \bar{Q}'' ausgeführt. Die Tangentenebene τ des Punktes \bar{Q} schneidet die Deckkreisebene des Kegels in einer ersten Spurparallelen h_1 . Ihr Grundriß h'_1 ist die Tangente an den Grundriß des Deckkreises in dem Punkte \bar{Q}_1 , in dem die Erzeugende des Punktes \bar{Q} diesen Kreis schneidet. Der Schnittpunkt $V' = [h'_1, \varepsilon']$ ist dann der Grundriß eines Punktes V , der sowohl der Tangentenebene τ wie auch der Schnittebene ε angehört, also ein Punkt der gesuchten Tangente t des Punktes \bar{Q} . Sein Aufriß V'' , der auf dem Aufriß der Deckkreisebene liegt, ist ein Punkt der Tangente t'' an die Aufrißhyperbel; t'' ist somit als Verbindungsgerade der Punkte V'' und \bar{Q}'' bestimmt.

Führen wir noch einen *Kreuzriß* mit der Rißachse x_{23} ein, so erscheint in ihm der Kegel in einer zu seinem Aufriß kongruenten Gestalt, während der Kreuzriß ε''' der Schnittebene ε eine Parallele zum Kreuzriß a''' der Kegelachse a ist, wobei der Abstand der Geraden ε''' von a''' aus dem Grundriß hervorgeht. Der Seitenriß der Hyperbel fällt auf $\varepsilon''' = e_3$, und die Schnittpunkte von ε''' mit den Konturerzeugenden des Kegels sind die Kreuzrisse A''' und B''' der beiden Hyperbelscheitel.

Um den für das genaue Zeichnen wichtigen *Scheitelschmiegekreis der Hyperbel* im Scheitel A zu gewinnen, gehen wir von einer beliebigen, den Kegel längs eines Parallelkreises (z. B. längs des Parallelkreises durch P) berührenden Kugel aus. Ihr Mittelpunkt ist die Spitze N des zu dem Parallelkreis gehörigen Normalenkegels, ihr scheinbarer Umriß ist im Aufriß und im Kreuzriß ein Kreis, der die Konturerzeugenden des Kegels berührt. Die Kugel hat in jedem Punkt des Berührungskreises die gleiche Tangentenebene wie der Kegel. Daher ist der Kleinkreis, den die Ebene ε aus der Kugel ausschneidet und dessen Mittelpunkt und Radius aus dem Kreuzriß zu ersehen sind, ein Kreis, der die Hyperbel im Punkt P und zugleich auch im symmetrisch gelegenen Punkt Q (je *zweipunktig*) berührt. Sein Aufriß berührt daher die Aufrißhyperbel in den Punkten P'' und Q'' (woraus sich nebenbei eine dritte Konstruktion für die Tangente t'' im Punkte P'' ergibt). Wandert nun der Punkt P gegen den Hyperbelscheitel A ,

dann wandert auch der Punkt Q gegen A , und die Kugel geht in jene Kugel κ über, die den Kegel längs des Parallelkreises des Scheitels A berührt. Der von der Ebene ε aus dieser Kugel κ ausgeschnittene Kreis k berührt dann die Hyperbel im Scheitel A vierpunktig, ist also der *Scheitelschmiegleis* der Hyperbel. Sein zunächst dem Kreuzriß zu entnehmender Mittelpunkt K und sein Radius kann auch unmittelbar im Aufriß konstruiert werden.

Damit ist die folgende *Konstruktionsvorschrift für den Scheitelschmiegleis einer Hyperbel* bewiesen (Fig. 132):



Von der Hyperbel seien die beiden Asymptoten a_1, a_2 und der Scheitel A gegeben. Man schneidet die Scheiteltangente s mit der einen Asymptote und errichtet in diesem Schnittpunkt das Lot auf die Asymptote. Dieses Lot schneidet auf der reellen Hyperbelachse den Schmiegkreismittelpunkt K für den Hyperbelscheitel A aus.

Fig. 132. Konstruktion des Scheitelschmiegleises einer Hyperbel

Sind a und b die Längen der beiden Halbachsen der Hyperbel, dann ergibt sich nach dem Höhensatz im Dreieck für den Radius ρ des Scheitelschmiegleises

$$(1) \quad a \cdot \rho = b^2 \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{b^2}{a},$$

genau so wie in (11. 10) bei der Ellipse für R_a .

47. Der parabolische Schnitt eines Drehkegels

Ein Drehkegel (Spitze S , erstprojizierende Achse a) werde von einer Ebene ε so geschnitten, daß die Parallelebene zu ε durch die Kegelspitze eine Tangentenebene des Kegels ist (Fig. 133). Dann ist die Schnittkurve eine *Parabel* k . Zu ihrer Konstruktion im Grund- und Aufrißverfahren genügt es ohne Verlust an Allgemeinheit, die Ebene ε *zweitprojizierend* vorauszusetzen. Sie sei durch ihre Spuren $e_1 \perp x_{12}$ und $e_2 = \varepsilon''$ parallel zur linken Konturerzeugenden des Kegelaufnisses festgelegt. Der höchste Punkt

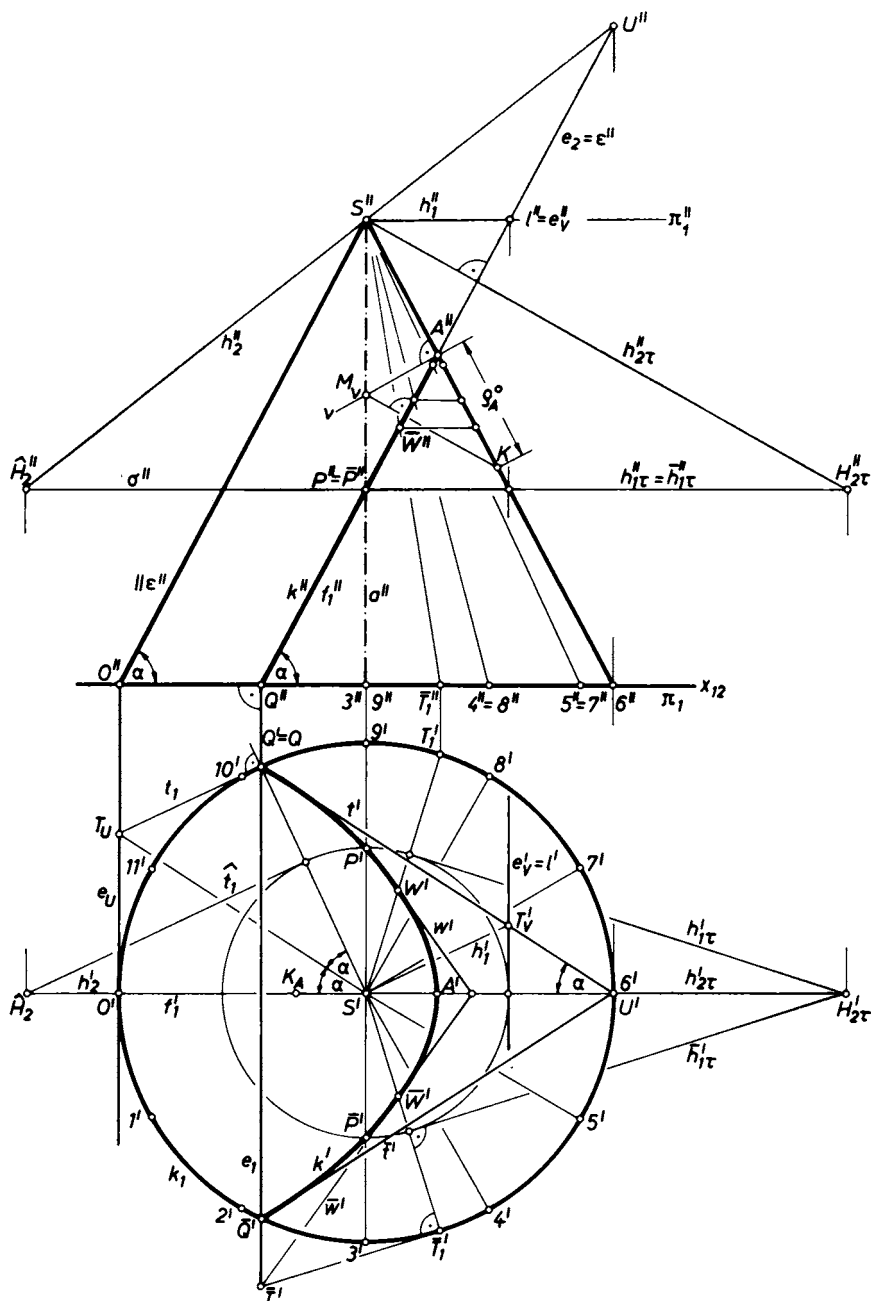


Fig. 133. Parabelschnitt eines Drehkegels. Der Grundriß S' des Kegelscheitels S ist Brennpunkt des Grundrisses k' der Schnittparabel k

A der Schnittkurve (auf der rechten Konturerzeugenden gelegen) ist der *Parabelscheitel*, und die durch A gehende erste Fallinie f_1 der Ebene ε , die zur linken Konturerzeugenden des Kegelaufnisses parallel ist, ist die *Parabelachse*.

Im Aufriß erscheint die Parabel (genauer: ihr reeller Zug) als eine von A'' ausgehende doppeltüberdeckte Halbgerade k'' auf ε'' . Ihr *Grundriß* ist gleichfalls eine *Parabel* k' mit A' als Scheitel und dem Grundriß f'_1 der räumlichen Parabelachse f_1 als Achse. Der *Brennpunkt* dieser Grundrißparabel k' fällt mit dem Grundriß S' der *Kegelspitze* zusammen, während der Grundriß l' der Schnittgeraden l der Parabelebene ε mit der Horizontalebene π durch die Kegelspitze S ihre *Leitgerade* ist. Da die Ebene ε und die Kegelerzeugenden gegen die Grundrißebene gleichgeneigt sind ($\alpha = \beta$), ist das Dreieck $(S''A''l'')$ gleichschenkelig ($A''S'' = A''l''$); folglich liegt der Parabelscheitel A' in der Mitte zwischen dem Brennpunkt S' und der Leitgeraden l' , ferner ist $S'l' = 2 \cdot S'A'$ gleich dem *Parameter* p der Grundrißparabel.

Zur *Punkt konstruktion* der Grundrißparabel k' legt man achsennormale ebene Schnitte σ , die den Kegel in einem horizontalen Kreis (Parallelkreis), die Ebene ε in einer zweitprojizierenden ersten Spurparallelen schneiden. Beide können aus dem Aufriß sofort in den Grundriß übertragen werden. Der Parallelkreis und die erste Spurparallele schneiden sich in zwei Punkten P und \bar{P} , deren Grundrisse P' und \bar{P}' zwei Punkte der Grundrißparabel k' sind. Wählt man $\sigma = \pi_1$, so erhält man die Schnittpunkte Q, \bar{Q} der Parabel k in π_1 ; sie liegen auf der Spurgeraden e_1 von ε und auf dem Basiskreis k_1 des Drehkegels.

Die *Tangente* in einem beliebigen Punkte der Parabel (z. B. im Punkte Q auf dem Basiskreis k_1 des Kegels) ist die *Schnittgerade der Tangentenebene* τ an den Kegel mit der Parabelebene ε . Die Tangentenebene τ des Kegels im Punkte Q enthält die Erzeugende $[SQ]$ und (als Horizontalspur) die Tangente t_1 an den Basiskreis k_1 im Punkte Q . Der Grundriß h'_2 ihrer zweiten Hauptlinie h_2 durch die Kegelspitze S geht durch S' und ist zur Rißachse x_{12} parallel. Der Horizontalspurpunkt $H_2 = H'_2$ von h_2 ist der (in Fig. 133 nicht zugängliche) Schnittpunkt von h'_2 mit der Horizontalspur t_1 der Tangentenebene τ . Sein Aufriß H''_2 liegt auf x_{12} und liefert, mit S'' verbunden, den Aufriß h''_2 dieser Hauptlinie. Weil H_2 in Fig. 133 unzugänglich ist, wurde zur Ermittlung von h''_2 statt der Grundrißebene π_1 die Parallelkreisebene σ verwendet. An die Stelle der ersten Spur t_1 von τ tritt dann die dazu parallele Kreistangente \hat{t}_1 , und an die Stelle des Spurpunktes H_2 tritt der Spurpunkt \hat{H}_2 .

Schneidet t' den horizontalen Kreisdurchmesser h'_2 in U' , so bilden die parallelen Geraden $[S' T_u]$ und $[Q' U']$ mit ihm denselben Winkel α . Weil die beiden aus T_u an den Basiskreis gelegten Tangenten an den Kreis k_1 lngengleich sind, ist $(S' O' T_u) \cong (S' Q' T_u)$. Die Gerade $[S' T_u]$ halbiert daher den über dem Bogen $(O' Q)$ des Basiskreises k_1 ruhenden Zentriwinkel $2\alpha = \sphericalangle (O' S' Q')$. Nach dem Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel im Kreis ist daher der über dem Bogen $(O' Q')$ ruhende Peripheriewinkel $\sphericalangle (O' 6' Q') = \alpha$. Die Geraden $[Q' 6']$ und $[Q' U']$ fallen daher zusammen, folglich auch die auf h'_2 liegenden Punkte $6'$ und U' . Im Aufriß liegen somit die Punkte $6''$ und U'' auf demselben Ordner. W.z. b. w.

Bemerkung 1: Daraus ergibt sich die folgende einfache *Tangentenkonstruktion für die Parabel*, von der der Brennpunkt F , die Achse a , und ein Punkt P gegeben sind (Fig. 134): Der Kreis k_1 um F durch P schneidet die Parabelachse a in Punkten U und V ; durch U geht die Tangente $t = [PU]$ des Punktes P , durch V geht die Normale $n = [PV]$ der Parabel k in P .

Um den *Scheitelschmiegekreis* der Parabel zu finden, zeichnen wir zunächst einen beliebigen, die Parabel im Scheitel A berührenden Kreis (Fig. 135). Er schneidet die Parabel mit der Scheitelgleichung

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

im Punkte P und in dem bezuglich der Parabelachse ($y = 0$) symmetrischen Punkte \bar{P} . Ist ϱ der Radius dieses Kreises, und sind (x, y) die cartesischen Koordinaten von P , so gilt nach dem Sehnensatz im Kreise

$$(2) \quad x(2\varrho - x) = y^2 = 2px$$

oder wegen $x \neq 0$

$$(3) \quad \varrho = p + \frac{x}{2}.$$

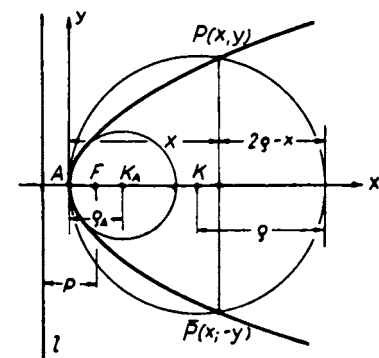


Fig. 135.

Scheitelschmiegekreis der Parabel

Wandert nun P und damit zugleich auch \bar{P} auf der Parabel gegen den Parabelscheitel A , dann strebt ϱ gegen den Scheitelschmiegekreisradius

$$(4) \quad \varrho_A = \lim_{x \rightarrow 0} \varrho = p.$$

Es folgt

Satz 1: Der Radius ϱ_A des Scheitelschmiegekreises der Parabel ist gleich ihrem Parameter p , d. h. der Schmiegekreismittelpunkt K_A hat vom Scheitel A einen doppelt so großen Abstand wie der Brennpunkt F .

Die *Abwicklung* des Drehkegels samt der auf ihm liegenden parabolischen Schnittkurve k zeigt Fig. 136. Sie wird auf entsprechende Weise gewonnen wie in Fig. 130 die Abwicklung des Drehkegels mit elliptischem Schnitt. Nachdem man den längs der linken Aufrißkonturerzeugenden $[OS]$ aufgeschnittenen Kegelmantel samt den zwölf Mantellinien von Fig. 133 in die

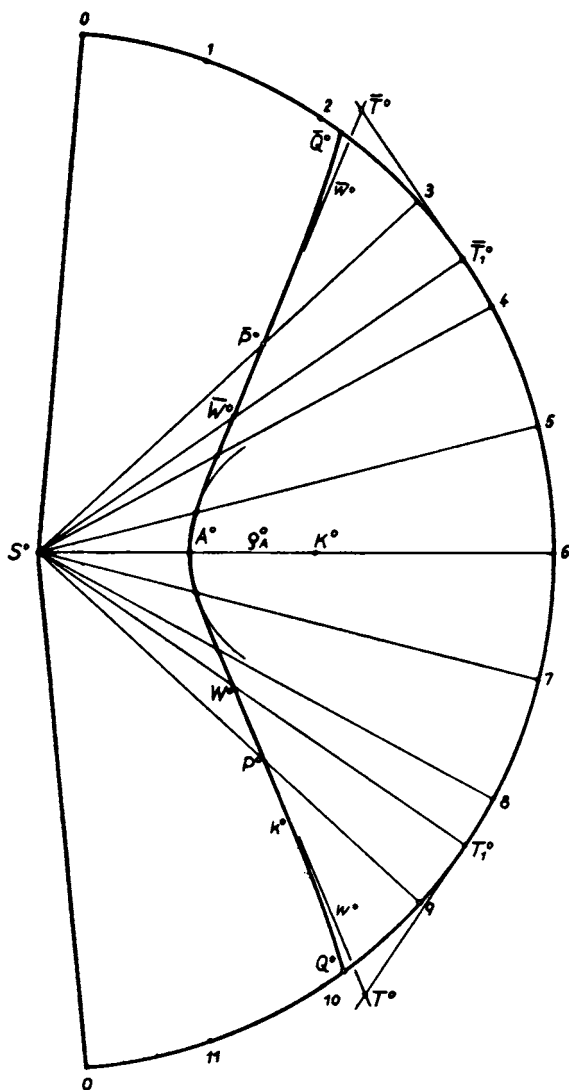


Fig. 136. Abwicklung des Drehkegels und seines Parabelschnittes aus Fig. 133 in die Ebene

Ebene ausgebreitet hat, gewinnt man die *abgewinkelte Kurve* k^0 durch Übertragen der wahren Abstände der einzelnen Parabelpunkte von der Kegelspitze S in die Abwicklung ($SP = S^0P^0$).

Die Abwicklung des Parabelscheitels A ergibt den Scheitel A^0 der Kurve k^0 . Den *Schmiegekreisradius* ρ_A^0 der Abwicklung k^0 in A^0 findet man wieder durch folgende Konstruktion (Fig. 133): Die Normalebene ν im Punkte A des Drehkegels, die durch die Parabeltangente und die Kegelnormale in A bestimmt ist, schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt, der nach dem *Satz von Meusnier* seinen Schmiegekreismittelpunkt M_ν auf der Kegelachse a hat. Das Lot aus M_ν auf die Parabelebene ε trifft die Kegelerzeugende des Punktes A in einem Punkte K , dessen Abstand von A gleich dem Schmiegekreisradius ρ_A^0 im Scheitel A^0 der abgewinkelten Kurve k^0 ist.

Die *Wendepunkte* W^0 und \bar{W}^0 der Kurve k^0 gehen wieder aus jenen Punkten der Parabel hervor, in denen die *Tangentenebene* τ an den Kegel auf der Parabelebene ε senkrecht steht. Die Aufrißspur und jede zweite Spurparallele einer solchen ausgezeichneten Tangentenebene τ muß auf ε'' senkrecht stehen. Die Tangentenebene τ werde festgelegt durch ihre die Kegelspitze S enthaltende zweite Hauptlinie $h_{2\tau}$ und ihre in der Horizontalebene σ des Punktes P liegende erste Hauptlinie $h_{1\tau}$; dann ist $h_{2\tau}''$ das Lot von S'' auf ε'' , während $h_{1\tau}'$ mit σ'' identisch ist. Im Grundriß ist $h_{2\tau}'$ die Parallele zur Rißachse x_{12} durch S' , während $h_{1\tau}'$ eine Tangente an den Grundriß des Parallelkreises durch den Punkt P' ist. Der Schnittpunkt $H_{2\tau}$ von $h_{1\tau}$ und $h_{2\tau}$ kann nun sofort aus dem Aufriß in den Grundriß auf $h_{2\tau}'$ übernommen werden, wodurch sich im Grundriß zwei erste Hauptlinien $h_{1\tau}'$ und $h_{1\tau}'$ als Tangenten an jenen Kreis ergeben. Die durch die Berührungspunkte gelegten Mantellinien des Kegels tragen dann jene Punkte W und \bar{W} der Parabel k , welche bei der Abwicklung in die Wendepunkte W^0 und \bar{W}^0 von k^0 übergehen.

Die *Wendetangenten* w^0 und \bar{w}^0 gehen aus den Tangenten w und \bar{w} der Parabel k hervor und lassen sich durch Übertragen des rechtwinkligen Dreiecks, das aus der Kegelerzeugenden des Punktes W bzw. \bar{W} , der Tangente an den Basiskreis und der Tangente w bzw. \bar{w} gebildet wird, in die Abwicklung gewinnen.

IX

Schiefer Kreiszylinder und schiefer Kreiskegel

48. Der ebene Schnitt eines schiefen Kreiszylinders

Ein *schiefer Kreiszylinder* wird dadurch erzeugt, daß eine Gerade e längs eines Kreises k parallel zu sich verschoben wird, wobei die Gerade weder in der Kreisebene liegt noch auf der Kreisebene senkrecht steht. Der Kreis k heißt *Leitkreis*, die Gerade e und alle von ihr bei der Verschiebung eingenommenen Lagen sind die *Erzeugenden* oder *Mantellinien* des schiefen Kreiszylinders. Alle zum Leitkreis k parallelen ebenen Schnitte sind zu k kongruente Kreise. Die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte ist die *Achse* a des schiefen Kreiszylinders.

In Fig. 137 ist ein solcher schiefer Kreiszylinder im Grund- und Aufriß dargestellt. Man erkennt den *Basiskreis* und *Deckkreis*, die in zwei horizontalen Ebenen liegen, und die *Achse* a des Zylinders, die parallel zur Aufrißebene ist. Der *Grundriß* wird außerdem noch begrenzt von zwei zu a' parallelen Kreistangenten, den Grundrissen jener beiden Erzeugenden, längs denen der Zylinder von *erstprojizierenden Tangentenebenen* berührt wird; diese beiden Erzeugenden bilden zusammen den *ersten wahren Umriß*, ihre Grundrisse den *ersten scheinbaren Umriß des Zylinders*. Der *Aufriß* des Zylinders wird ebenso von zwei zu a'' parallelen Geraden begrenzt, den Aufrissen jener beiden Erzeugenden, längs denen der Zylinder von *zweitprojizierenden Tangentenebenen* berührt wird; diese beiden Erzeugenden bilden zusammen den *zweiten wahren Umriß*, ihre Aufrisse den *zweiten scheinbaren Umriß* des schiefen Kreiszylinders.

Ein *beliebiger ebener Schnitt* eines schiefen Kreiszylinders ist eine Kurve, die mit dem Leitkreis k durch eine schiefe perspektive Affinität verbunden ist, also eine *Ellipse*. Insbesondere ist auch jeder *Normalschnitt* k_n , senkrecht zur Achse eine *Ellipse*. Außer den ebenen Schnitten σ , die parallel zur Ebene π_1 des Leitkreises k geführt werden, liefert auch jeder Schnitt $\bar{\sigma}$, der zu σ in bezug auf die Ebene ν eines Normalschnitts k_n symmetrisch ist, wieder einen Kreis (Fig. 137). *Ein schiefer Kreiszylinder kann demnach auf zwei Arten nach Kreisen geschnitten werden.*

Wird ein schiefer Kreiszylinder so aufgestellt, daß seine Achse auf der Grundrißebene senkrecht steht, so ist seine Basiskurve (Normalschnitt) eine Ellipse, und er selbst heißt auch *elliptischer Zylinder*. Die beiden Ebenenstellungen $\sigma, \bar{\sigma}$, die zu *Kreisschnitten* führen, lassen sich dann auf folgende Weise ermitteln (Fig. 138). Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die kleine Achse b der Basisellipse zur Rißachse x_{12}

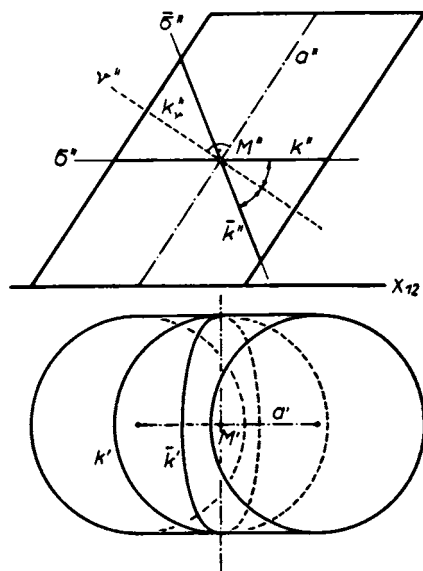


Fig. 137. Kreisschnitte eines schiefen Kreiszylinders (elliptischen Zylinders)

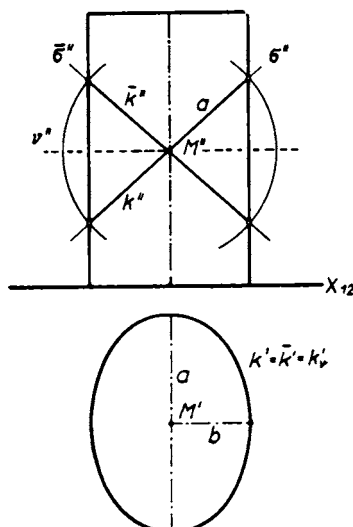


Fig. 138. Konstruktion der Kreisschnitte eines elliptischen Zylinders

parallel annehmen; denn in einem geeigneten Seitenriß läßt sich dieser Fall stets verwirklichen. Durch einen beliebig gewählten Punkt M auf der Zylinderachse lassen sich nun zwei zweitprojizierende Ebenen σ und $\bar{\sigma}$ legen, die aus dem Zylinder Kreise k bzw. \bar{k} ausschneiden. Ihre Neigung gegen die Grundrißebene muß so angenommen werden, daß der Fallinien-durchmesser der Schnittkurve gleich dem großen Durchmesser $2a$ der Basisellipse ist.

49. Der ebene Schnitt eines schiefen Kreiskegels

Gegeben sei ein Kreis k und ein Punkt S , der weder in der Kreisebene noch auf der (im Kreismittelpunkt M zur Kreisebene senkrechten) Kreisachse liege. Die Verbindungsgeraden e des Punktes S mit den Punkten P des Kreises k bilden dann einen *schiefen Kreiskegel*. Der Kreis k ist der *Leitkreis*, die Geraden e sind die *Erzeugenden* oder *Mantellinien*, und S ist die *Spitze* oder der *Scheitel* des schiefen Kreiskegels.

Die Normalebene σ , welche man durch die Gerade $[SM]$ senkrecht zur Ebene π des Kreises k legen kann, ist eine *Symmetrieebene* des Kegels. Sie schneidet den schiefen Kreiskegel in zwei *Scheitelerzeugenden* s_1, s_2 (seiner längsten und kürzesten Mantellinie). Die beiden aufeinander senkrechten Winkelhalbierenden w_1, w_2 der Scheitelerzeugenden s_1, s_2 und das auf sie in S errichtete Lot w_3 sind drei (paarweise senkrechte) *Symmetrieachsen* (*Hauptachsen*) des schiefen Kreiskegels, und ihre drei Verbindungsebenen (also neben $\sigma = [s_1 s_2] = [w_1 w_2]$ auch noch die Ebenen $\sigma_1 = [w_1 w_3]$ und $\sigma_2 = [w_2 w_3]$) sind *drei paarweise aufeinander senkrechte Symmetrieebenen* des schiefen Kreiskegels. Durch Spiegelung an der Symmetrieebene σ geht der Kreisschnitt k des Kegels in sich über, durch Spiegelung an den Symmetrieebenen σ_1 und σ_2 jedoch in zwei neue Kreisschnitte k_1 und k_2 , die in untereinander, aber nicht zu π parallelen Ebenen liegen. *Jeder schiefe Kreiskegel trägt somit zwei verschiedene Scharen von ebenen Kreisschnitten.*

Man kann jeden geraden Kreiskegel (Drehkegel der Höhe h und des Basisradius r) durch eine räumliche Affinität in einen schiefen Kreiskegel verwandeln. Es genügt dazu sogar eine räumliche Scherung, die man als Gegenstück zu (7.4) in der Form

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + pz \\ z' &= z \end{aligned}$$

schreiben kann. Bei dieser Scherung bleibt die Ebene $z = 0$ punktweise fest (*Affinitätsebene*); entsprechende Punkte $P(x, y, z)$ und $P'(x', y', z')$ liegen auf y -parallelen Geraden (*Affinitätsstrahlen*). Der Punkt P wird dabei in y -Richtung um das p -fache seines Abstandes von der Affinitätsebene $z = 0$ nach dem Punkte P' verschoben.

Ist dann

$$(2) \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0$$

der in der Affinitätsebene $z = 0$ liegende Basiskreis k und $S = (0, 0, h)$ der Scheitel des *Drehkegels* mit der Gleichung

$$(3) \quad \frac{x^2 + y^2}{r^2} - \frac{(z - h)^2}{h^2} = 0,$$

so entspricht diesem Drehkegel durch die Scherung (1) der *schiefe Kreiskegel* mit der Gleichung

$$(4) \quad \frac{x'^2 + (y' - pz')^2}{r^2} - \frac{(z' - h)^2}{h^2} = 0,$$

der in der Ebene $z' = 0$ denselben Basiskreis $k' = k$ mit den Gleichungen (2) besitzt, und dessen zu $S = (0, 0, h)$ affiner Scheitel der Raumpunkt

$S' = (0, ph, h)$ ist. Die Ebene $x' = 0$ ist dabei die Symmetrieebene σ des schiefen Kreiskegels. Durch geeignete Wahl von p kann man jeden schiefen Kreiskegel aus dem Drehkegel (3) durch eine räumliche Affinität (Scherung) der Darstellung (1) erzeugen.

Aus diesem einfachen Zusammenhang zwischen Drehkegel und schiefem Kreiskegel folgt der wichtige

Satz 1: *Jeder ebene Schnitt eines schiefen Kreiskegels ist ein Kegelschnitt, im regulären Falle also (wenn die Schnittebene die Kegelspitze nicht enthält) eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel.*

Beweis: Weil in der räumlichen Affinität (1) jeder Ebene stets wieder eine Ebene entspricht, sind den (regulären) ebenen Schnitten des Drehkegels (3), d. s. Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, die (regulären) ebenen Schnitte des schiefen Kreiskegels (4) affin zugeordnet, die daher wieder Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln sind.

Zur Konstruktion des ebenen Schnittes eines schiefen Kreiskegels in irgend-einer Parallelprojektion benutzt man zweckmäßigerweise die zwischen dem Basiskreis und der ebenen Schnittkurve bestehende perspektive Kollineation. Kollineationszentrum O ist dabei die Kegelspitze, Kollineationsachse die Spurgerade e der Schnittebene in der Ebene des Basiskreises, während die Kegelerzeugenden die Kollineationsstrahlen sind.

Dazu benötigen wir, ähnlich wie beim ebenen Schnitt von Pyramide und Drehkegel wieder die Begriffsbildungen der perspektiven Kollineation, an die wir daher etwas ausführlicher erinnern.

Fig. 139 zeigt eine Ebene ε (*Originelebene*) und eine beliebige zu ε nicht parallele Ebene ε^c (*Bildebene*) sowie einen außerhalb dieser Ebenen gelegenen Punkt O . Wählt man O als Zentrum einer räumlichen *Perspektive* (Zentralprojektion, *perspektiven Kollineation*), dann ist jedem Punkt P in ε durch den Projektionsstrahl (*Kollineationsstrahl*) $[OP]$ ein bestimmter Punkt P^c in ε^c als perspektives (perspektiv-kollineares) Bild zugeordnet. Die Schnittgerade e der beiden Ebenen ε und ε^c ist dabei die *Kollineationsachse*, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht. Das perspektiv-kollineare Bild einer Geraden g in ε ist eine Gerade g^c in ε^c , die sich mit g in dem Spurpunkt G auf e trifft.

Der Fernpunkt G_u von g hat als Bild jenen eigentlichen Punkt G_u^c , der von dem zu g parallelen Kollineationsstrahl durch O aus ε^c ausgeschnitten wird. Dieser *Bildpunkt* G_u^c des Fernpunktes G_u von g heißt der *Fluchtpunkt* der Geraden g . Eine beliebige andere zu g parallele Gerade g in ε hat denselben Fernpunkt G_u und folglich auch denselben Fluchtpunkt G_u^c . Ihr

Bild \bar{g}^c ist durch den Spurpunkt $\bar{G} = [\bar{g}, e]$ und den Fluchtpunkt G_u^c eindeutig festgelegt.

Umgekehrt entspricht dem Fernpunkt G_v^c der Bildgeraden g^c ein bestimmter eigentlicher Originalpunkt G_v auf g , nämlich jener Punkt, der von dem zu g^c parallelen Kollineationsstrahl aus ε ausgeschnitten wird. Dieser *Originalpunkt* G_v , dessen Bild der Fernpunkt G_v^c der Bildgeraden g^c ist, heißt der *Verschwindungspunkt* der Geraden g . Fluchtpunkt G_u^c und Verschwindungspunkt G_v einer Geraden g sind die zur Geraden g gehörigen *Gegenpunkte* der perspektiven Kollineation.

Wegen $OG_u^c \parallel g$ und $OG_v \parallel g^c$ ist das Viereck $(OG_v G G_u^c)$ ein *Parallelogramm*, dessen Gegenseiten der Länge und Richtung nach einander gleich sind:

$$(5) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{OG_v} &= \overrightarrow{G_u^c G}; \\ \overrightarrow{OG_u^c} &= \overrightarrow{G_v G}. \end{aligned}$$

Die Fluchtpunkte aller Originalgeraden in ε liegen auf einer Geraden e_u^c , die von der zu ε parallelen Fluchtebene durch O aus ε^c ausgeschnitten wird. Dieser Ort der Fluchtpunkte aller

Geraden in ε ist das Bild der Ferngeraden der Originalenebene ε und heißt die *Fluchtgerade* der perspektiven Kollineation. Entsprechend liegen die Verschwindungspunkte aller Bildgeraden aus ε^c auf einer Geraden e_v in ε , die von der zu ε^c parallelen Verschwindungsebene durch O ausgeschnitten wird. Diese Gerade e_v in ε , deren Bild die Ferngerade der Bildebene ε^c ist, heißt *Verschwindungsgerade* der perspektiven Kollineation. Die Fluchtgerade e_u^c und Verschwindungsgerade e_v werden als die *Gegen-*

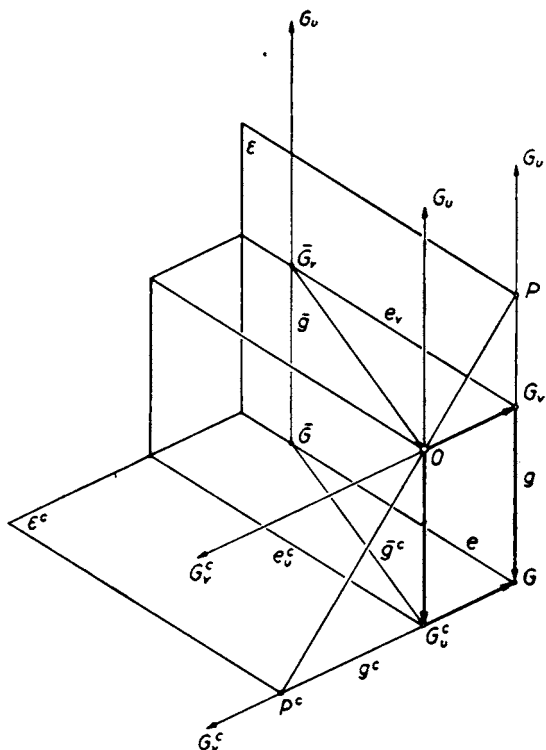


Fig. 139. Perspektive Kollineation zwischen zwei Ebenen $\varepsilon, \varepsilon^c$, die durch Zentralprojektion aus dem Zentrum (Auge) O aufeinander abgebildet sind. Kollineationszentrum O , Kollineationsachse e , Kollineationsstrahlen $[P P^c]$, Verschwindungsgerade e_v in ε , Fluchtgerade e_u^c in ε^c

achsen der perspektiven Kollineation bezeichnet. Sie sind zur *Kollineationsachse* e *parallel*, und es gelten für sie und das Kollineationszentrum O die Vektorgleichungen (Abstände jeweils senkrecht gemessen):

$$(6) \quad \overrightarrow{Oe_v} = e_u^c e; \quad \overrightarrow{Oe_u} = e_v^c e.$$

Projiziert man die in Fig. 139 dargestellte räumliche Figur durch irgendeine Parallelprojektion in eine Ebene π (man denke sich in Fig. 139 die Umrahmungen der Ebenen ε und ε^c entfernt), so entsteht in π eine *ebene perspektive Kollineation*, für die alle genannten Eigenschaften unverändert zutreffen.

Es sei nun in einem *Schrägriß* der Basiskreis k und die Spitze S eines *schiefen Kreiskegels* gegeben (Fig. 140). Der *Basiskreis* k liege dabei in der *Bildebene* $\pi = \varepsilon$. Er deckt sich dann mit seinem Schrägbild, das daher ebenfalls mit k bezeichnet werden kann. Die *Konturerzeugenden* des Kegels sind im Schrägriß die beiden von S an k gelegten Tangenten, die k in den Punkten U und V berühren. Im Raume wird der Kegel längs der Mantellinien $[S, U]$ und $[S, V]$ von Sehebenen (projizierenden Ebenen) berührt. Diese beiden Mantellinien bilden daher im Raum den *wahren Umriß* des Kegels (für die gewählte Sehstrahlrichtung) und in dem Schrägriß der Fig. 140 den *scheinbaren Umriß* des Kegels. Ebenso wie in 41. beweist man, daß eine auf dem Kegel liegende Flächenkurve, welche den wahren Umriß schneidet, im Schrägbild den scheinbaren Umriß berühren muß, ausgenommen den Fall, daß die Kurventangente in diesem Punkte zufällig ein Sehstrahl ist.

Eine beliebige *Schnittebene* ε^c des Kegels sei festgelegt durch ihre Spur e in der Basisebene ε und die (zu e parallele) Spur e_v ihrer Parallelebene durch die Kegelspitze S auf ε . Da diese Parallelebene in Fig. 140 den Basiskreis k nicht trifft, ist die *Schnittkurve* der Ebene ε^c mit dem Kegel im Raum und damit auch im Schrägriß eine *Ellipse*. Das Schrägbild k^c dieser Ellipse ist das *perspektiv-kollineare Bild* des *Basiskreises* k und kann nach den für eine solche Kollineation gültigen Gesetzen rein planimetrisch konstruiert werden. Kollineationsachse ist dabei die Gerade e , Kollineationszentrum der Punkt S und Verschwindungsgerade die Gerade e_v . Die Fluchtgerade e_u^c läßt sich nach (6) sofort auf Grund der Vektorbeziehung

$$(7) \quad \overrightarrow{e_v e} = S \overrightarrow{e_u^c e}.$$

parallel zu e konstruieren.

Um nun das *kollineare Bild* k^c des *Kreises* k zu finden, bilden wir den zur Achse e senkrechten Kreisdurchmesser AB ab. Er liegt auf der Geraden

$g \perp e$, deren Spurpunkt G der Schnittpunkt von g mit e ist, während ihr Fluchtpunkt G_u^c von der Parallelen zu g durch S aus der Fluchtgeraden e_u^c

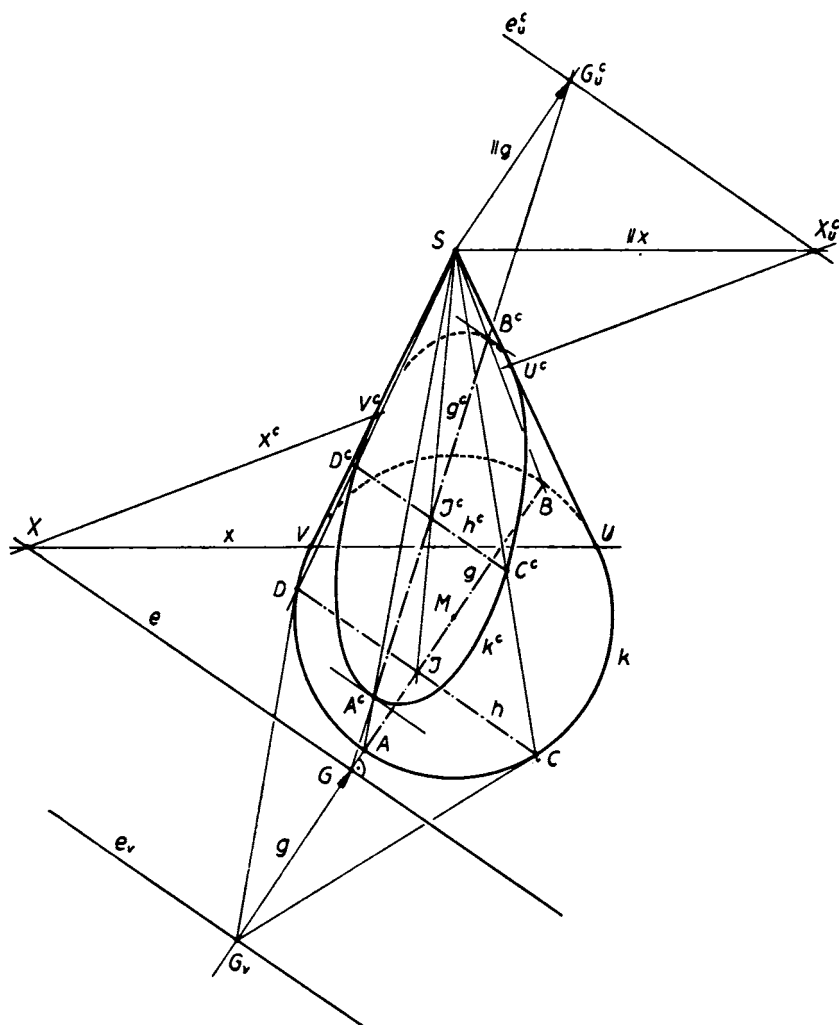


Fig. 140. Der Basiskreis k eines schiefen Kreiskegels ist zu jedem ebenen Schnitt k^c (hier: Ellipse) des Kreiskegels perspektiv kollinear; Kollineationszentrum ist der Kegelscheitel S , Kollineationsachse die Basisspur e der Schnittebene π^c , Kollineationsstrahlen sind die Mantellinien des Kegels. Nach Annahme liegt der Basiskreis k in der Bildebene $\pi = e$ und deckt sich daher mit seinem Schrägbild.

ausgeschnitten wird. Spurpunkt G und Fluchtpunkt G_u^c bestimmen das Bild g^c von g . Die Kollineationsstrahlen $[SA]$ und $[SB]$ schneiden g^c in den Bildpunkten A^c und B^c von A und B . Da die Tangenten in A und B

an den Kreis k zur Achse e parallel sind, sind auch die Tangenten an die Ellipse k^c in A^c und B^c zu e parallel. Das heißt aber, daß A^cB^c ein Durchmesser der Ellipse k^c ist. Um den dazu konjugierten (zu e parallelen) Durchmesser C^cD^c der Ellipse k^c zu finden, legen wir vom Verschwindungspunkt $G_v = [g, e_v]$ der Geraden g die Tangenten an den Kreis k , die den Kreis in den Punkten C und D berühren, wobei $[CD]$ parallel e ist. Diesen Tangenten entsprechen zwei zu g^c parallele Tangenten an die Ellipse k^c . Daher ist das Bild h^c der Berührungssehne $h = CD$ der zu g^c konjugierte Durchmesser der Ellipse k^c . Der Schnittpunkt J von g und h geht in den Ellipsenmittelpunkt J^c über, der von dem Kollineationsstrahl $[SJ]$ auf g^c ausgeschnitten wird. Das Bild h^c der Kreissehne h ist wie diese zur Kollineationsachse e parallel, und die Ellipsenpunkte C^c und D^c auf h^c sind durch die Kollineationsstrahlen $[SC]$ bzw. $[SD]$ bestimmt. Nun kann die Ellipse k^c aus dem konjugierten Durchmesserpaar A^cB^c , C^cD^c nach RYTZ konstruiert werden.

Um die Berührungspunkte U^c und V^c der Ellipse k^c mit den Konturerzeugenden des Kegels zu finden, bildet man die Kreissehne $x = [UV]$ kollinear ab. Ihr Spurpunkt X ist der Schnittpunkt von x mit e , ihr Fluchtpunkt X_u^c liegt auf der Fluchtgeraden e_u^c und wird von der Parallelen zu x durch S ausgeschnitten. Die Gerade $[XX_u^c]$ ist nun das kollineare Bild x^c von x ; auf ihr liegen die gesuchten Umrißpunkte U^c und V^c .

Unter den in Fig. 140 getroffenen Annahmen ist die Schnittkurve k^c eine Ellipse. Allgemein ergibt sich der

Satz 1: *Der Schnitt des schiefen Kreiskegels mit einer Ebene ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, (ein Kreis), eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem die in der Basisebene (Kreisebene) liegende Verschwindungsgerade e_v der Schnittebene den Basiskreis k nicht schneidet, berührt oder schneidet.*

Der Beweis beruht darauf, daß die Verschwindungspunkte des Basiskreises k (Schnittpunkte von k mit der Verschwindungsgeraden e_v) durch die perspektive Kollineation in die Fernpunkte des ebenen Schnittes k^c verwandelt werden, deren Realitätsverhältnisse die Art dieses Kegelschnittes k^c bestimmen.

X

Kugel

50. Die Kugel im Grund- und Aufrißverfahren

Eine *Kugel* ist der Ort aller Punkte im Raum, die von einem festen Punkt, dem *Kugelmittelpunkt* O , einen festen Abstand haben, der gleich dem *Kugelradius* r ist. Eine Ebene durch den Kugelmittelpunkt schneidet die Kugel in einem *Großkreis*, dessen Mittelpunkt mit der Kugelmitte O zusammenfällt und dessen Radius gleich dem Kugelradius r ist. Das Lot im Mittelpunkt auf die Großkreisebene, d. h. die *Achse des Großkreises*, ist ein Kugeldurchmesser, der aus der Kugel die beiden zu dem Großkreis gehörigen *Pole* ausschneidet. Eine beliebige Ebene schneidet die Kugel, wenn überhaupt, in einem *Kleinkreis*, dessen Mittelpunkt M auf dem zur Kleinkreisebene senkrechten Kugeldurchmesser liegt.

Der *Normalriß einer Kugel auf eine Ebene π* bedeckt die Fläche eines Kreises vom Radius der Kugel; denn der in Sehrichtung berührend an die Kugel gelegte Drehzylinder (*Umrißzylinder*, *Konturzylinder*) schneidet jede zur Sehrichtung normale Bildebene in einem solchen Kreis. Der Großkreis der Kugel, längs dessen der berührende Sehstrahlenzylinder die Kugel berührt, heißt der *wahre Umriß*, seine Projektion in die Bildebene der *scheinbare Umriß der Kugel*. Die wahren und scheinbaren Umrißkreise der Kugel bezeichnet man auch als ihre wahren und scheinbaren *Konturkreise*.

Im *Grund- und Aufrißverfahren* ist der wahre Umriß einer Kugel (Mittelpunkt O , Radius r) der Großkreis u_1 , der zur Grundrißebene π_1 , bzw. der Großkreis u_2 , der zur Aufrißebene π_2 parallel ist. Der Grundriß u'_1 des ersten wahren Umrißkreises u_1 , d. h. der *erste scheinbare Umriß der Kugel* ist ein Kreis um O' mit dem Radius r , und entsprechend ist der *zweite scheinbare Umriß der Kugel* im Aufriß ein Kreis u''_2 um O'' vom gleichen Radius. Der Aufriß u'_1 von u_1 und der Grundriß u'_2 von u_2 erscheinen als zur Rißachse parallele Kreisdurchmesser (Fig. 141).

Zum Grundrißpunkt P' (im Innern von u'_1) gehören zwei verschiedene Kugelpunkte P und \bar{P} auf der oberen und unteren Halbkugel, und einem Aufrißpunkt Q'' (im Innern von u''_2) entsprechen ebenfalls zwei verschiedene

Kugelpunkte Q und \bar{Q} auf der vorderen und hinteren Kugelhälfte. Ist beispielsweise der Grundriß P' eines Kugelpunktes P gegeben, so findet man seinen Aufriß P'' nach folgender Konstruktion: P liegt auf einem

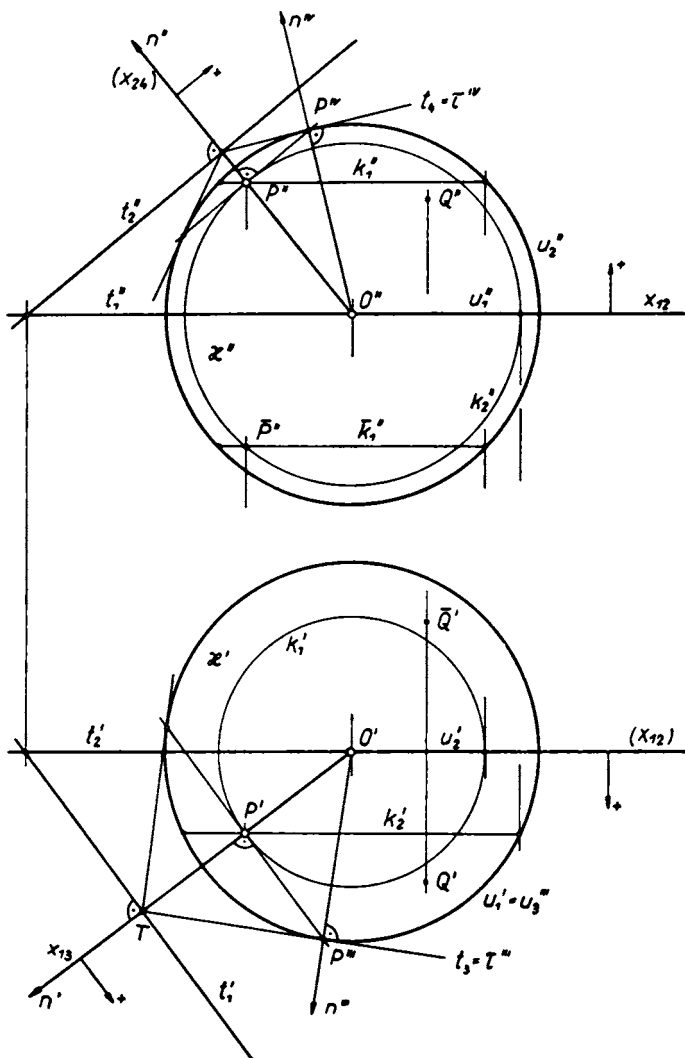


Fig. 141. Darstellung der Kugel κ . Wahre Umriss u_1 und u_2 , scheinbare Umriss u'_1 und u'_2 . Grund- und Aufriß eines Kugelpunktes P . Tangentenebene τ in P .

horizontalen Kleinkreis k_1 , dessen Grundriß k'_1 der Kreis um O' durch P' ist. Sein Aufriß k''_1 ist eine horizontale Sehne des Konturkreises u''_2 , deren Länge gleich dem Durchmesser von k'_1 ist. Da es zwei der-

artige Sehnen k_1'' und \bar{k}_1'' gibt, gibt es auch zwei zu P' gehörige Aufrißpunkte P'' und \bar{P}'' . Andererseits kann man diese Aufrißpunkte auch dadurch gewinnen, daß man den zur Aufrißebene parallelen Kleinkreis k_2 durch P in den Aufriß überträgt, der im Grundriß als horizontale Sehne k_2' des Grundrißkonturkreises u_1' , im Aufriß in wahrer Gestalt als Kreis k_2'' um O'' erscheint.

Bemerkung 1: Die Gleichung der reellen Kugel mit dem Mittelpunkt $O = (0, 0, 0)$ und dem reellen Radius $r > 0$ lautet

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Die Grundrißebene π_1 mit der Gleichung $z = 0$ schneidet aus ihr den *ersten Umrißkreis* u_1 mit den Gleichungen

$$(2) \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0$$

aus. Für *reelle Punkte* $P'(x, y, 0)$ im *Innern* dieses Umrißkreises u_1 ist

$$(3) \quad x^2 + y^2 < r^2 \quad \text{und} \quad z = 0;$$

sie sind die (reellen) Grundrisse P' der beiden reell-verschiedenen Kugelpunkte P und \bar{P} mit den Koordinaten $(x, y, z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ mit den reell-verschiedenen Aufrissen $P''(0, y, +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ und $\bar{P}''(0, y, -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$.

Für die *reellen Punkte* $P'(x, y, 0)$ im *Äußeren* des ersten Bildes u_1' des Umrißkreises u_1 in π_1 ist

$$(4) \quad x^2 + y^2 > r^2 \quad \text{und} \quad z = 0;$$

sie sind die reellen Grundrisse je zweier konjugiert-komplexer (verschiedener) Kugelpunkte P und \bar{P} mit den Koordinaten $(x, y, \pm i\sqrt{x^2 + y^2 - r^2})$ und den konjugiert-komplexen Aufrissen $P''(0, y, +i\sqrt{x^2 + y^2 - r^2})$ und $\bar{P}''(0, y, -i\sqrt{x^2 + y^2 - r^2})$.

Ähnlich sind auch die reellen Punkte $Q''(0, y, z)$ im Äußeren des zweiten Bildes u_2'' des Umrißkreises u_2 , für die $y^2 + z^2 > r^2$ ist, Aufrisse von Paaren konjugiert-komplexer Kugelpunkte Q bzw. \bar{Q} mit den Koordinaten $(\pm i\sqrt{y^2 + z^2 - r^2}, y, z)$, deren Grundrisse Q' bzw. \bar{Q}' die ebenfalls konjugiert-komplexen Koordinaten $(\pm i\sqrt{y^2 + z^2 - r^2}, y, 0)$ haben.

Bemerkung 2: Die reellen (zweitprojizierenden) Ebenen

$$(5) \quad z = z_0 = \text{reelle Konstante}$$

schneiden 1., wenn $|z_0| < r$ ist, die Kugel in einem *Kreis* (Parallelkreis) k_1 mit *reellem Radius* $\varrho = +\sqrt{r^2 - z_0^2}$; sie berühren 2. die Kugel (schneiden sie in einem *Nullkreis* vom Radius $\varrho = 0$), wenn $|z_0| = r$ ist; und sie schneiden 3. die Kugel, wenn $|z_0| > r$ ist, in einem *Kreise* k_1 mit *rein imaginärem Radius* $\varrho = +i\sqrt{z_0^2 - r^2}$, der jedoch als Aufriß k'' die reelle (doppeltüberdeckte) Gerade $z = z_0, x = 0$ hat. Man bezeichnet diese letzten Kreise, die in reellen Ebenen liegen sowie einen reellen Mittelpunkt und rein imaginären Radius haben, auch als *nullteilige Kreise*, weil sie keinen einzigen reellen Punkt enthalten. Auch die zur Aufrißebene π_2 ($x = 0$)

parallelen reellen Ebenen $x = x_0 = \text{const}$ mit $|x_0| > r$ und die zur Kreuzrißebene $\pi_3 (y = 0)$ parallelen reellen Ebenen $y = y_0 = \text{const}$ mit $|y_0| > r$ schneiden die Kugel (1) in nullteiligen Kreisen k_2 bzw. k_3 , deren Grundrisse bzw. Grund- und Aufrisse reelle (doppeltüberdeckte) Geraden sind.

Die *Tangentenebene* τ im *Kugelpunkt* P ist jene Ebene durch P , die auf dem Kugelradius $[OP]$ senkrecht steht. Sie enthält die Tangenten aller durch P gehenden Kurven der Kugel. Um die *Spur* t'_1 dieser Tangentenebene τ in der Horizontalebene durch den Kugelmittelpunkt, d. h. in der *Äquatorebene*, zu konstruieren (Fig. 141), wählen wir diese Äquatorebene zur Grundrißebene π_1 , die Gerade u'_1 also zur Rißachse x_{12} , und führen die erstprojizierende Ebene durch $n = [OP]$ als Seitenrißebene π_3 mit der Rißachse $x_{13} = n'$ ein. Die Seitenrißkontur u'''_3 der Kugel deckt sich dann mit dem Kreise u'_1 , und der Seitenriß P''' des Punktes P liegt auf diesem Kreis u'_1 . Da die Tangentenebene τ der Kugel in P nun drittprojizierend ist, ist ihre dritte Spur $t_3 = \tau'''$ die Tangente an u'''_3 in P''' und ihre erste Spur t'_1 steht im Knoten $T = [t_3, x_{13}]$ auf der Rißachse x_{13} senkrecht.

Der Zusammenhang zwischen dem Grundriß P' des Kugelpunktes P und der Spur t'_1 der Tangentenebene τ im Punkt P auf der Äquatorebene kann rein planimetrisch (d. h. ohne Benutzung des räumlichen Sachverhaltes) folgendermaßen beschrieben werden: Man zeichnet den Radius $n' = [O'P']$, sodann durch P' die auf n' senkrecht stehende Sehne des Umrißkreises u'_1 . In den Sehnenendpunkten konstruiert man die Tangenten an den Kreis, die sich auf n' im Punkte T schneiden. Dann ist t'_1 das Lot auf n' durch T . Man nennt die auf diese Weise gewonnene Gerade t'_1 die *Polargerade* oder *Polare des Punktes* P' und den Punkt P' den *Pol der Geraden* t'_1 bezüglich des Kreises u'_1 .

Also gilt

Satz 1: Die Spur t'_1 der Tangentenebene τ eines Kugelpunktes P auf der zur Grundrißebene parallelen Großkreisebene (Ebene des ersten Umrisses u_1) der Kugel ist die Polare seines Grundrisses P' bezüglich des Grundrisses u'_1 des ersten Umrißkreises u_1 der Kugel.

Entsprechend gilt

Satz 2: Die Spur t''_2 der Tangentenebene τ eines Kugelpunktes P auf der zur Aufrißebene parallelen Großkreisebene (Ebene des zweiten Umrisses u_2) der Kugel ist die Polare seines Aufrisses P'' bezüglich des Aufrisses u''_2 des zweiten Umrißkreises u_2 der Kugel.

Wählt man nämlich als neue Rißachse (x_{12}) die Horizontale durch O' und führt mit (x_{24}) $= [O'P''] = n''$ eine zweitprojizierende Seitenrißebene π_4 ein, so liegt der vierte Riß P^{IV} von P auf dem Umrißkreis

$u_4^{IV} = u_2''$ und auf dem in P'' errichteten Lot zu (x_{24}) . Die Tangentenebene τ in P ist viertprojizierend; deshalb ist $t_4 = \tau^{IV} \perp n^{IV}$. Daher ist die Aufrißspur t_2'' von τ die Polare des Punktes P'' bezüglich des zweiten Umrißkreises u_2'' .

Eine Ebene σ schneide die Kugel κ in einem (reellen) Kleinkreis k (Fig. 142). Da sämtliche Normalen einer Kugel durch deren Mittelpunkt O gehen, erfüllen die Kugelnormalen in den Punkten des Kugelkreises k

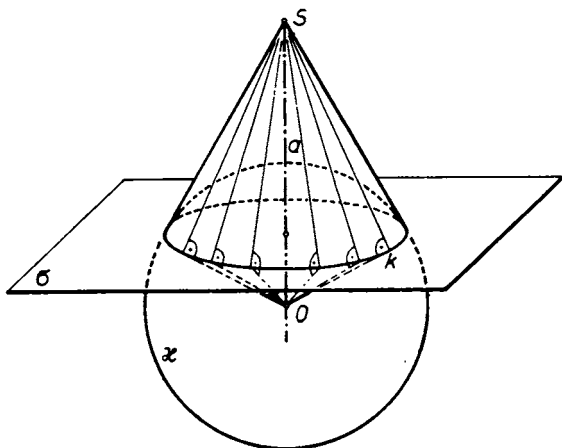


Fig. 142. Tangentenkegel und Normalenkegel längs eines Kleinkreises k der Kugel κ

einen Drehkegel, der seine Spitze in O hat, den *Normalenkegel* der Kugel κ längs des Kleinkreises k . Auf diesen Normalen stehen die Tangentenebenen, die die Kugel längs k berühren, senkrecht. Sie umhüllen einen zweiten Drehkegel, dessen Spitze S auf der Aches a des Kreises k liegt, den *Tangentenkegel* der Kugel κ längs des Kleinkreises k .

Jeder Ebene σ des Raumes ist so durch Vermittlung der Kugel κ ein bestimmter Raumpunkt S zugeordnet. Die Kugel stiftet zwischen den Ebenen und Punkten des Raumes eine *geometrische Verwandtschaft*, die man als das *Polarsystem* oder als die *Polarität der Kugel* bezeichnet. Der Punkt S heißt der *Pol der Ebene* σ , die Ebene σ die *Polarebene des Punktes* S bezüglich der Kugel κ .

Deutet man in Fig. 142 den Punkt S als *Augpunkt einer Zentralprojektion*, so erkennt man, daß der *Kleinkreis* k für sie der *wahre Umriß* der Kugel κ ist. Seine Zentralprojektion aus dem Augpunkt S auf irgendeine Ebene π ergibt dann als *scheinbaren Umriß* der Kugel einen *Kegelschnitt*.

Rückt der Augpunkt S in bestimmter Richtung ins Unendliche, so wird aus der Zentralprojektion eine *Parallelprojektion*. Der wahre Umriß der Kugel wird dann ein *Großkreis* (in der zur Sehrichtung normalen Großkreisebene) und der *scheinbare Umriß* der Kugel auf irgendeine Ebene wird eine *Ellipse* oder ein *Kreis*. Als *Schrägumriß* der Kugel auf irgendeine Ebene π erhält man also eine *Ellipse* oder einen *Kreis*.

Sei schließlich k eine beliebige auf der Kugel κ liegende Flächenkurve (sphärische Linie). Ist dann in irgendeiner Parallelprojektion oder Zentralprojektion k' das Bild der Kugelkurve k und u' der scheinbare Umriß der Kugel (Parallelbild bzw. Zentralbild des wahren Kugelumrisses u), so folgt aus der Überlegung in 41. wieder der

Satz 3: *Überschreitet eine sphärische Linie k den wahren Umriß (Großkreis oder Kleinkreis u) der Kugel κ in einem Punkte U , so berührt ihre Projektion k' den scheinbaren Umriß u' der Kugel (Ellipse, Kreis oder Kegelschnitt) in dem Bilde U' von U , ausgenommen den Fall, daß die Kurventangente in diesem Umrißpunkt U zufällig ein Sehstrahl ist.*

Dieser grundlegende Satz gilt sinngemäß auch für das Parallel- oder Zentralbild einer beliebigen Fläche und die Bilder der auf ihr liegenden Flächenkurven.

Man bestätigt den Satz 3 auch in Fig. 142 für das Bild des Kleinkreises k der Kugel, das in zwei Punkten berührend an den scheinbaren Umrißkreis der Kugel κ herantritt.

51. Der ebene Schnitt einer Kugel

Eine Kugel (Mittelpunkt O , Radius r) sei im Grundriß (erster Konturkreis u_1 , Grundriß u'_1) und im Aufriß (zweiter Konturkreis u_2 , Aufriß u'_2) gegeben. Sie werde von einer Großkreisebene ε geschnitten, die wir erstprojizierend ($e_1 = \varepsilon'$) annehmen. Der von der Ebene ε aus der Kugel ausgeschnittene Großkreis k stellt sich dann (mit seinem reellen Zug) im Grundriß als der auf ε' liegende (doppeltüberdeckte) Durchmesser k' des Konturkreises u'_1 , im Aufriß als eine Ellipse k'' dar (Fig. 143). Die große Achse der Aufrißellipse k'' geht aus dem zur Aufrißebene parallelen Durchmesser NS (Achse des Äquatorkreises u_1) hervor und verbindet den Aufriß N'' des Nordpols N und den Aufriß S'' des Südpols S , während die kleine Achse dem horizontalen Kreisdurchmesser AB entspricht, dessen Aufriß auf u'_1 liegt. Ihre Endpunkte A'' und B'' findet man durch Ordner aus den Punkten A' bzw. B' im Grundriß, in denen ε' den Grundriß u'_1 des Konturkreises u_1 schneidet. Die Brennpunkte F_1, F_2 der Aufrißellipse k''

ergeben sich dadurch, daß man die Länge der großen Halbachse $O''N''$ mit dem Zirkel von A'' aus auf der großen Ellipsenachse $N''S''$ abschlägt.

Die Brennpunkte F_1, F_2 der Aufrißellipse k'' des Großkreises k lassen sich auch mittels seiner beiden Pole finden. Pole des Großkreises k heißen die Schnittpunkte E_1, E_2 seiner (im Kugelmittelpunkt O zur Ebene von k normalen) Achse mit der Kugel, die in Fig. 143 auf dem Umrißkreis u_1 der Kugel liegen. Ihre Aufrisse E_1'', E_2'' auf u_1'' (d. h. auf der kleinen Achse der Aufrißellipse) gelegen, haben vom Ellipsenmittelpunkt O'' die gleiche Entfernung e wie die Brennpunkte F_1, F_2 . Denn aus dem Grundriß entnimmt man, wenn a und b die Längen der Halbachsen der Aufrißellipse sind, die Beziehung:

$$O''E_1'' = \sqrt{a^2 - b^2} = e = O''F_1.$$

Die auf der kleinen Ellipsenachse in der Entfernung e von O'' liegenden Punkte E_1'' und E_2'' heißen die *Antibrennpunkte* der Ellipse k'' . Daher können wir feststellen:

Satz 1: Die Antibrennpunkte der Aufrißellipse k'' sind die Aufrisse der beiden Pole des Großkreises k .

Ist r der Kugelradius und α der Neigungswinkel der erstprojizierenden Großkreisebene ε gegen die Aufrißebene, so gilt nach Fig. 143 für das Aufrißbild k'' des Großkreises k :

$$(1) \quad a = r, \quad b = r \cos \alpha, \quad e = r \sin \alpha.$$

Der Schnitt der Kugel (Mittelpunkt O , Radius r) mit einer beliebigen Ebene ε ist ein Kleinkreis k . Durch Übergang zu Seitenrissen kann man stets erreichen, daß die Schnittebene ε projizierend wird, so daß wir ohne

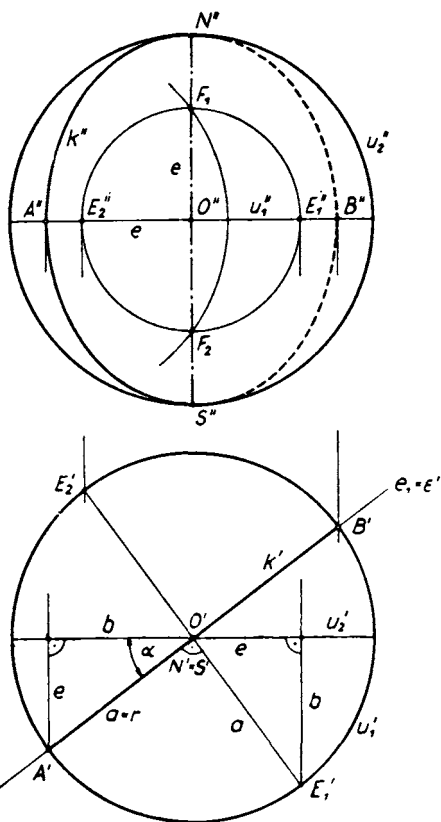


Fig. 143. Schnitt einer Kugel mit einer erstprojizierenden Großkreisebene ε . Die Kugelpole E_1, E_2 des Großkreises k erscheinen im Aufriß als Antibrennpunkte der Aufrißellipse k'' .

Für die Grundrißellipse k' ist $M'A' = a$ die halbe große, $M'C' = b$ die halbe kleine Achse und $M'F_1 = M'F_2 = e$ der halbe Brennpunktsabstand, wobei $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist. Der Abstand d der Kleinkreisebene ε vom Kugelmittelpunkt O tritt im Aufriß als Strecke $d = O''M''$ in wahrer Größe auf, seine Projektion p in die Grundrißebene erscheint als Strecke GO'' auf x_{12} und zugleich im Grundriß als Strecke $p = M'O'$. Ist α der Neigungswinkel der Ebene ε gegen die Grundrißebene, so bestehen die Beziehungen

$$(2) \quad e = M'F_2 = \sqrt{a^2 - b^2} = EC'' = a \sin \alpha, \quad p = M'O' = GO'' = d \sin \alpha.$$

Daraus folgt für den Abstand ϱ der Brennpunkte F_1 und F_2 von O' :

$$(3) \quad \varrho = \sqrt{e^2 + p^2} = \sqrt{a^2 + d^2} \sin \alpha = r \sin \alpha.$$

Dies besagt aber, daß ϱ von d unabhängig ist, d. h. daß ϱ für alle zu ε parallelen Schnittebenen denselben Wert hat. Für den zu ε parallelen Großkreisschnitt insbesondere sind die Grundrisse N', S' der beiden zu der Parallelebenenschar gehörigen Pole N und S die Antibrennpunkte der zugehörigen Grundrißellipse, so daß $O'N' = O'S' = \varrho$ ist. Damit ist gezeigt:

Satz 2: Die Brennpunkte F_1, F_2 aller Ellipsen k' , die die Grundrisse einer Schar paralleler Kugelschnitte sind, liegen auf einem festen Kreis um den Grundriß O' des Kugelmittelpunktes O . Dieser Kreis geht durch die Grundrisse N' und S' der beiden Pole N und S , die zu jenen parallelen Kugelschnitten gehören.

Von dieser Tatsache macht man mit Vorteil Gebrauch, wenn eine größere Anzahl paralleler Schnitte einer Kugel in Grund- und Aufriß zu zeichnen ist.

Sehr oft kommt die Aufgabe vor, auf einer Kugel (Mittelpunkt O , Radius a) jenen Großkreis zu zeichnen, dessen Ebene ε zu einer gegebenen Richtung p normal ist. Beleuchtet man die Kugel mit parallelen Lichtstrahlen (Sonnenlicht) der Richtung p , so trennt der Großkreis k den beleuchteten und den unbeleuchteten Teil der Kugel; k heißt deshalb die zur Lichtrichtung p gehörige Eigenschattengrenze der Kugel.

In Fig. 145 ist die Kugel im Grund- und Aufriß durch ihren Mittelpunkt $O = (O', O'')$ sowie durch ihren ersten Umriß $u_1 = (u'_1, u''_1)$ und zweiten Umriß $u_2 = (u'_2, u''_2)$ dargestellt. Durch O läuft die Gerade $p = (p', p'')$. Der gesuchte Großkreis k erscheint im Grundriß als eine Ellipse k' , deren große Achse (A'_1, B'_1) normal auf p' steht und die Länge $2a$ hat; der Aufriß k'' des Großkreises k ist eine Ellipse k'' , deren große Achse (A'_2, B'_2) normal zu p'' steht und die Länge $2a$ hat. Der im Grundriß in wahrer Größe erscheinende zur Grundrißebene π_1 parallele Durchmesser (A'_1, B'_1) des Kreises k bildet sich im

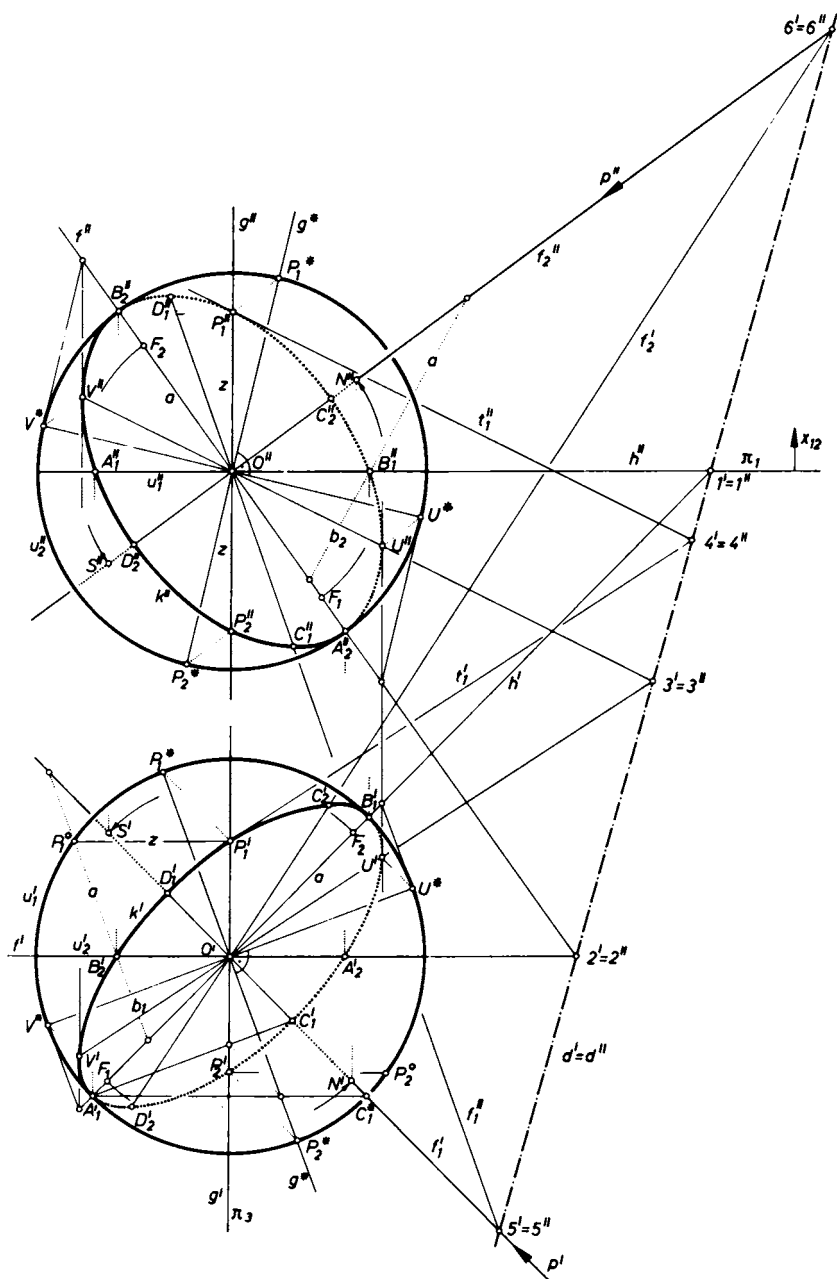


Fig. 145. Kugel mit Großkreis k , dessen Achse p vorgegeben ist.

Aufriß als horizontaler Durchmesser (A'_1, B'_1) der Aufrißellipse k'' ab. Ebenso bildet sich der im Aufriß in wahrer Größe erscheinende frontale Durchmesser (A''_2, B''_2) des Kreises k im Grundriß als horizontaler Durchmesser (A'_2, B'_2) der Ellipse k' ab.

Man kennt also von den beiden *Bildellipsen* k' und k'' des Großkreises k jeweils die Endpunkte der großen Achsen (A'_1, B'_1) und (A''_2, B''_2) sowie je zwei diametrale Punkte A'_2, B'_2 und A''_1, B''_1 ; die Längen der kleinen Halbachsen b_1 und b_2 folgen daraus mit Hilfe der *Papierstreifenkonstruktion* von Fig. 26. Damit kann man den Grundriß k' und den Aufriß k'' des Großkreises k einzeichnen; k' berührt u'_1 in den Scheiteln A'_1, B'_1 und k'' berührt u''_2 in den Scheiteln A''_2, B''_2 . Beim Ausziehen ist noch die *Sichtbarkeit* zu beachten; weil A'_1 vor u'_2 liegt, befindet sich im Aufriß A'_1 auf dem sichtbaren Teil von k'' ; weil ebenso B''_2 über u'_1 liegt, gehört im Grundriß B'_2 dem sichtbaren Teil von k' an.

In Fig. 145 sind auch noch die beiden *Brennpunkte* F_1 bzw. F_2 der Ellipsen k' und k'' eingetragen. Schwenkt man sie um O' bzw. O'' um einen rechten Winkel, so erhält man nach Satz 2 die Grundrisse (N', S') bzw. die Aufrisse (N'', S'') der *Pole* N, S des Großkreises k , d. h. jener beiden *Punkte* N, S , in denen die *Achse* p des Großkreises k die Kugel trifft. Für die Beleuchtung in Richtung p ist N der hellste und S der dunkelste Punkt der Kugel. Natürlich müssen die Punktpaare (N', N'') und (S', S'') jeweils auf einem *Ordner* liegen (*Kontrolle!*).

Es gibt noch verschiedene *weitere Kontrollen* für die Richtigkeit und Genauigkeit der Konstruktion und es ist ratsam, einige dieser Kontrollen zu beachten. Die wichtigste Kontrolle besteht in der Tatsache, daß die beiden *Ellipsen* k' und k'' in der (vertikalen) *Ordnerrichtung* gemeinsame *Tangenten* besitzen müssen. Um die genaue Lage dieser Tangenten und ihrer Berührungspunkte (U', U'') und (V', V'') zu ermitteln, kann man die *orthogonale perspektive Affinität* \mathfrak{A}_1 heranziehen, welche zwischen der *Ellipse* k' und ihrem *Scheitelkreis* u'_1 besteht. In dieser orthogonalen Affinität \mathfrak{A}_1 (Achse $[A'_1, B'_1]$) entspricht dem Punkt C'_1 und der Sehne $[A'_1, C'_1]$ der Ellipse k' der Punkt C^*_1 und die Sehne $[A'_1, C^*_1]$ des Kreises u'_1 ; der vertikalen Geraden g' ist die Gerade g^* zugeordnet. Sind dann U^* und V^* die Berührungspunkte des Kreises u'_1 mit den zu g^* parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte U^*, V^* auf dem zu g^* normalen Kreisdurchmesser liegen, so sind die dazu affinen Punkte U' und V' bereits jene gesuchten Punkte von k' , deren Tangenten zur vertikalen Ordnerrichtung g' parallel sind. Ebenso kann man im *Aufriß* mittels der *orthogonalen perspektiven Affinität* \mathfrak{A}_2 , welche zwischen der *Ellipse* k'' und ihrem *Scheitelkreis* u''_2 besteht (Achse

$[A_2', B_2']$), die Berührungspunkte U'' und V'' der zur vertikalen Ordnerichtung g'' parallelen Tangenten von k'' finden. Die *Kontrolle* besteht nun darin, daß die so im Grundriß und Aufriß entstehenden *vertikalen Tangenten* jeweils *zusammenfallen*.

Mittels der Affinitäten \mathfrak{A}_1 (Grundriß) und \mathfrak{A}_2 (Aufriß) kann man auch die *Schnittpunkte* P_1 und P_2 des Kreises k mit der durch den Mittelpunkt O laufenden *doppeltprojizierenden Ebene* π_3 finden. Diese Ebene π_3 schneidet die Ebene ε des Kreises k in einer O enthaltenden Geraden $g = (g', g'')$, mit vertikalem g' und g'' . Die dazu in den Affinitäten \mathfrak{A}_1 bzw. \mathfrak{A}_2 entsprechenden Geraden g^* schneiden dann die Kreise u_1' bzw. u_2'' in Punkten P_1^* bzw. P_2^* , denen auf g' bzw. g'' die Risse P_1', P_2' bzw. P_1'', P_2'' der gesuchten Schnittpunkte $P_1 = (P_1', P_1'')$ und $P_2 = (P_2', P_2'')$ der doppeltprojizierenden Ebene π_3 mit dem Kreis k entsprechen.

Bemerkung 1: Dreht man den in der doppeltprojizierenden Ebene π_3 liegenden Großkreis der Kugel um seinen zur Aufrißebene normalen Durchmesser in die Grundrißebene, so geht er in den Kreis u_1' über. Aus den Punkten P_1 und P_2 werden dabei die Punkte P_1^* und P_2^* . Man hat nun die *Kontrolle*, daß die *z-Koten* der Punkte P_1 und P_2 im Grundriß als die gleichlangen Strecken $P_1'P_1^*$ und $P_2'P_2^*$ abgelesen werden können.

Die Tangenten t_1'' und t_2'' der Ellipse k'' in den Punkten P_1'' und P_2'' sind parallel zu dem Durchmesser $[U''V'']$ von k'' ; die Durchmesser $[P_1'P_2']$ und $[U''V'']$ sind nämlich in k'' zueinander konjugiert, weil sie in der Affinität \mathfrak{A}_2 den beiden orthogonalen Durchmessern $[P_1^*P_2^*]$ und $[U^*V^*]$ des Kreises u_2'' entsprechen. Analoges gilt im Grundriß für die Tangenten t_1' und t_2' der Ellipse k' in den Punkten P_1' und P_2' . In Fig. 145 ist nur die Tangente t_1 des Punktes P_1 des Großkreises k eingezeichnet.

Man kann sich die doppelte Ausführung solcher Konstruktionen für den Grundriß k' und den Aufriß k'' des Großkreises k zumeist ersparen, wenn man die in 16. gefundene *perspektive Affinität* \mathfrak{A} zwischen dem Grundriß \mathfrak{F}' und dem Aufriß \mathfrak{F}'' einer ebenen Figur \mathfrak{F} (Ebene ε) heranzieht. Deren *Affinitätsrichtung* ist die *Ordnerichtung*, während die *Affinitätsachse* das zusammenfallende Bildpaar $d' = d''$ der *Deckgeraden* d der Ebene ε von \mathfrak{F} ist (d ist die Schnittgerade von ε mit der Deckebene κ). Diese Deckgerade d trägt die Deckpunkte aller Geraden h der Ebene ε , d. h. ihr Grundriß h' und Aufriß h'' schneiden sich immer auf dem zusammenfallenden Bildpaar $d' = d''$ der Deckgeraden d von ε . In Fig. 145 verbindet das Deckgeradenbild $d' = d''$ den Schnittpunkt $1' = 1''$ von Grundriß h' und Aufriß h'' des *horizontalen Kreisdurchmessers* $h = [A_1, B_1]$ mit dem Schnittpunkt $2' = 2''$ von Grundriß f' und Aufriß f'' des *frontalen Kreisdurchmessers* $f = [A_2, B_2]$.

In unserem Fall besteht zwischen den beiden *Ellipsen* k' und k'' die genannte perspektive Affinität \mathfrak{A} . Hat man dann z.B. im Grundriß die beiden Berührungspunkte U', V' der vertikalen Tangenten der Ellipse k' gefunden, so sind deren Aufrisse U'', V'' zu U', V' in \mathfrak{A} affin entsprechend. Der (bekannte) Durchmesser $[U', V']$ von k' und der (noch unbekannte) Durchmesser $[U'', V'']$ von k'' schneiden sich dabei in einem Punkt $3' = 3''$ des zusammenfallenden Bildpaares $d' = d''$ der Deckgeraden d . Damit ist die Gerade $[U'', V'']$ gefunden und mittels der Ordner auch U'' und V'' . Ähnlich kann man mittels ihres Deckpunktbildes $4' = 4''$ aus der Tangente t'_1 an k' im Punkt P'_1 sofort den Aufriß t''_1 (Tangente an k'' in P''_1) finden.

Um die Aufrisse C'_1 und D'_1 des *tiefsten und höchsten Punktes* C_1 und D_1 des *Großkreises* k zu finden, die im Grundriß als die Endpunkte C'_1 und D'_1 der kleinen Achse der Ellipse k' erscheinen, hat man nur für die *erste Fallinie* $f_1 = [C_1, D_1]$ zum Grundriß $f'_1 = [C'_1, D'_1]$ mittels des Deckpunktbildes $5' = 5''$ den Aufriß f''_1 zu zeichnen. Damit ist f''_1 und durch Ordner auch C'_1 und D'_1 gefunden. Weil C_1 der tiefste und D_1 der höchste Punkt des Großkreises k sind, müssen die *Tangenten an k'' in C'_1 und D'_1 horizontal* sein.

Analog liegen der *hinterste Punkt* C_2 und der *vorderste Punkt* D_2 des *Großkreises* k auf der durch O gehenden *zweiten Fallinie* f_2 der Ebene ε . Die Geraden $f''_2 = [C'_2, D'_2]$ und f'_2 schneiden sich im Punkt $6' = 6''$ des Deckgeradenbildes $d' = d''$. Damit ist f'_2 und durch Ordner auch C'_2 und D'_2 gefunden. Die *Tangenten von k' in C'_2 und D'_2 sind wieder horizontal*.

52. Umriß der Kugel im Schrägriß und Schnellriß

Der scheinbare Umriß einer Kugel ist bei Normalprojektion auf eine Bildebene π ein Kreis vom Radius der Kugel. Dies trifft bei schiefer Parallelprojektion nicht mehr zu. Wird nämlich eine Kugel κ in der schiefen Richtung p auf die Bildebene π projiziert, dann ist zwar der berührende Sehstrahlenzylinder stets ein Drehzylinder vom Radius der Kugel und der *wahre Umriß* u jener *Großkreis* der Kugel, der *auf der Sehrichtung p senkrecht* steht. Der *scheinbare Umriß* der Kugel, ihr *Schrägumriß* u^s jedoch, den der Umrißzylinder aus der Bildebene π ausschneidet, ist als schiefer Schnitt eines Drehzylinders eine *Ellipse*. Der *Mittelpunkt* O^s der Schrägumrißellipse u^s ist das Schrägbild der Kugelmittle O . Ihre *kleine Achse* geht aus dem zu π parallelen Durchmesser des wahren Umrißkreises u hervor und ist *gleich dem Kugeldurchmesser*, ihre *große Achse* $A^s B^s$ entspringt aus dem Falliniendurchmesser AB von u bezüglich der Bildebene

π (Fig. 146). Den *Brennpunkten* F_1, F_2 des Schrägumrisses u^s der Kugel schließlich entsprechen jene Punkte N und S der Kugel, die auf dem zur Bildebene π senkrechten Kugeldurchmesser liegen und den größten und kleinsten Abstand von π haben. Denn verschiebt man die Kugel κ um eine beliebige Strecke in Richtung der Sehstrahlen, dann ändert sich ihr

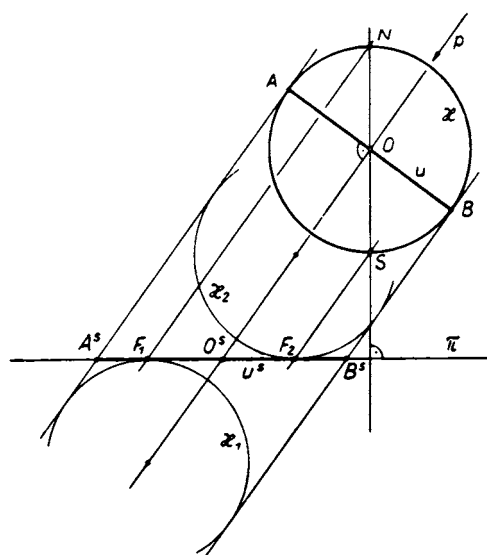


Fig. 146. Der Schrägumriß einer Kugel für die Sehrichtung p auf die Ebene π ist eine Ellipse, deren kleine Halbachse b gleich dem Radius r der Kugel ist und deren Brennpunkte F_1, F_2 die Bilder der Endpunkte des bildnormalen Kugeldurchmessers NS sind ($F_1 = N^s, F_2 = S^s$)

scheinbarer Schrägumriß u^s nicht. Insbesondere liefern auch die beiden Kugeln κ_1 und κ_2 , die dem Sehstrahlenzylinder einbeschrieben sind und die Bildebene π von der einen bzw. anderen Seite berühren, den gleichen scheinbaren Schrägumriß u^s . Ihre Berührungspunkte F_1 bzw. F_2 mit der Bildebene π sind aber nach dem Satz von Dandelin, der auch für den Drehzylinder (als Sonderfall eines Drehkegels) gilt, gerade die *Brennpunkte* des ebenen Schnittes u^s des Drehzylinders mit π .

Daraus folgt

Satz 1: *Der scheinbare Umriß u^s einer Kugel bei schiefer Parallelprojektion auf eine*

Ebene π ist eine Ellipse. Ihre kleine Achse ist gleich dem Kugeldurchmesser. Ihre Brennpunkte sind die Projektionen der Endpunkte N und S des zu π normalen Kugeldurchmessers.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun leicht der *Schrägumriß einer Kugel κ im Schrägrißverfahren* konstruieren (Fig. 147). Die Kugel (Mittelpunkt O , Radius r) sei durch ihren Grundriß κ' und Aufriß κ'' gegeben, ebenso die Projektionsrichtung p , die zum Schrägbild κ^s der Kugel in der Bildebene π (Aufrißebene) führt. Mit Hilfe von p' und p'' verschaffen wir uns das zu einem Punkt P der Grundrißebene gehörige *Projektionsdreieck* ($P'P''P^s$). Der Schrägriß O^s der Kugelmittelpunkte ergibt sich über den Schräggrundriß O'^s und das Projektionsdreieck ($O'O_{12}O'^s$) in bekannter Weise ($O'O'^s \parallel P'P^s$, $O''O'^s \parallel P''P^s$ und $O'^sO^s \parallel P'P''$). Der zur Aufrißebene parallele Durchmesser CD des wahren Kugelumrisses u geht bei der schiefen Parallel-

projektion in die *kleine Achse der Schrägumrißellipse* u^s über und erscheint als jener Durchmesser $C''D''$ der Aufrißkontur u_2'' , der zum Aufriß p'' der Projektionsrichtung senkrecht steht. Damit ist von der Umrißellipse

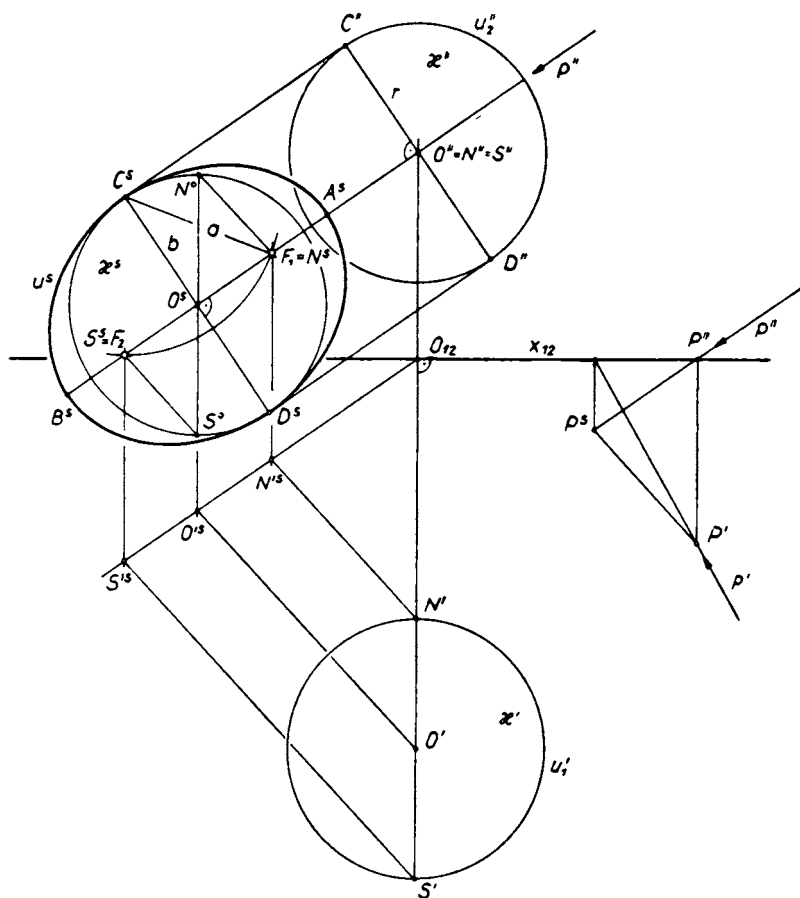


Fig. 147. Darstellung einer Kugel (Mitte O , Radius r) im Schrägrißverfahren.
Projektionsdreieck ($P' P'' P^s$)

u^s die Lage der kleinen Achse $D^s C^s \perp p''$ und zugleich ihre Länge $C^s D^s = 2b = 2r$ gefunden. Der zur Aufrißebene normale Kugeldurchmesser schneidet die Kugel in den Punkten N und S , deren Grundrisse N' und S' der hinterste bzw. vorderste Punkt der Grundrißkontur u_1' sind, während ihre Aufrisse N'' und S'' sich mit O'' decken. Ihre Schrägrisse $N^s = F_1$ und $S^s = F_2$, die sich so wie O^s konstruieren lassen, sind die *Brennpunkte*

der *Schrägumrißellipse* u^s . Aus der kleinen Achse $C^s D^s$ und den Brennpunkten F_1, F_2 läßt sich nun sofort die Lage und Länge der *großen Achse* $A^s B^s$ finden.

Die Konstruktion der Brennpunkte F_1, F_2 des Schrägumrisses u^s läßt sich durch die folgende Überlegung wesentlich vereinfachen: Verschiebt man die Kugel κ in Projektionsrichtung, bis ihr Mittelpunkt O in der Aufrißebene π_2 (= Bildebene für den Schrägriß) liegt, bis er sich also mit O^s deckt, dann liefert diese verschobene Kugel den gleichen Schrägumriß u^s wie die Kugel κ . Der Aufriß der verschobenen Kugel ist ein Kreis um O^s vom Radius r . Legen wir den zu π_2 normalen Kugeldurchmesser mit einer Vierteldrehung um den zu x_{12} parallelen (horizontalen) Kugeldurchmesser um, dann erhalten wir seine Durchstoßpunkte N und S in der Umlegung als höchsten und tiefsten Punkt N^0 und S^0 auf dem Umrißkreis der verschobenen Kugel. Die Parallelen zu $[P'P^s]$ durch N^0 und S^0 schneiden auf der großen Achse $[O''O^s]$ der Umrißellipse u^s die Brennpunkte F_1 bzw. F_2 von u^s aus.

Auch bei der Darstellung des Raumes nach dem ECKHARTSchen *Einschneideverfahren* (*Schnellrißverfahren*), das nach 40. zu einem *axonomtrischen Bild*, also zu einer bestimmten (i. a. schiefen) *Parallelprojektion* führt, ergibt sich als *scheinbarer Umriß der Kugel* eine *Ellipse*. Das ist ein gewisser Nachteil des sonst überaus einfachen und anschaulichen Schnellrißverfahrens, der aber nicht allzu schwer wiegt, weil es möglich ist, den elliptischen Kugelumriß schnell und bequem zu konstruieren, wenn man die beiden zum Einschneiden verwendeten *Normalrisse* (meist Grundriß und Aufriß) *im gleichen Maßstab* annimmt. In Fig. 148 ist nach 40. der *Schnellriß* (O^s, X^s, Y^s, Z^s) eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen *Achsenkreuzes* (O, X, Y, Z) unter der *Annahme gleicher Maßstäbe* für den Grundriß (O', X', Y', Z') und Aufriß (O'', X'', Y'', Z'') gezeichnet. Es gilt also

$$(1) \quad O'X' = O'Y' = O''Y'' = O''Z''.$$

Die *Einschneiderichtungen* p' und p'' sind dabei mit dem *Grundriß* und *Aufriß der Projektionsrichtung* p identisch; das folgt sofort aus der Tatsache, daß der Schnellriß z^s der z -Achse die Richtung von p' und der Schnellriß x^s der x -Achse die Richtung von p'' hat, oder noch einfacher daraus, daß der *Schnellriß* p^s der Geraden $p = (p', p'')$ der Punkt O^s ist.

Wir wollen nun den *Schnellriß der Kugel* gewinnen, deren *Mittelpunkt* O ist und welche die Ecken X, Y, Z des gegebenen Dreiecks enthält. Der wirkliche *Radius* dieser Kugel spielt vorerst keine Rolle; wir werden ihn aber später (ebenso wie die genaue Lage des Sehstrahls p zur Bildebene π)

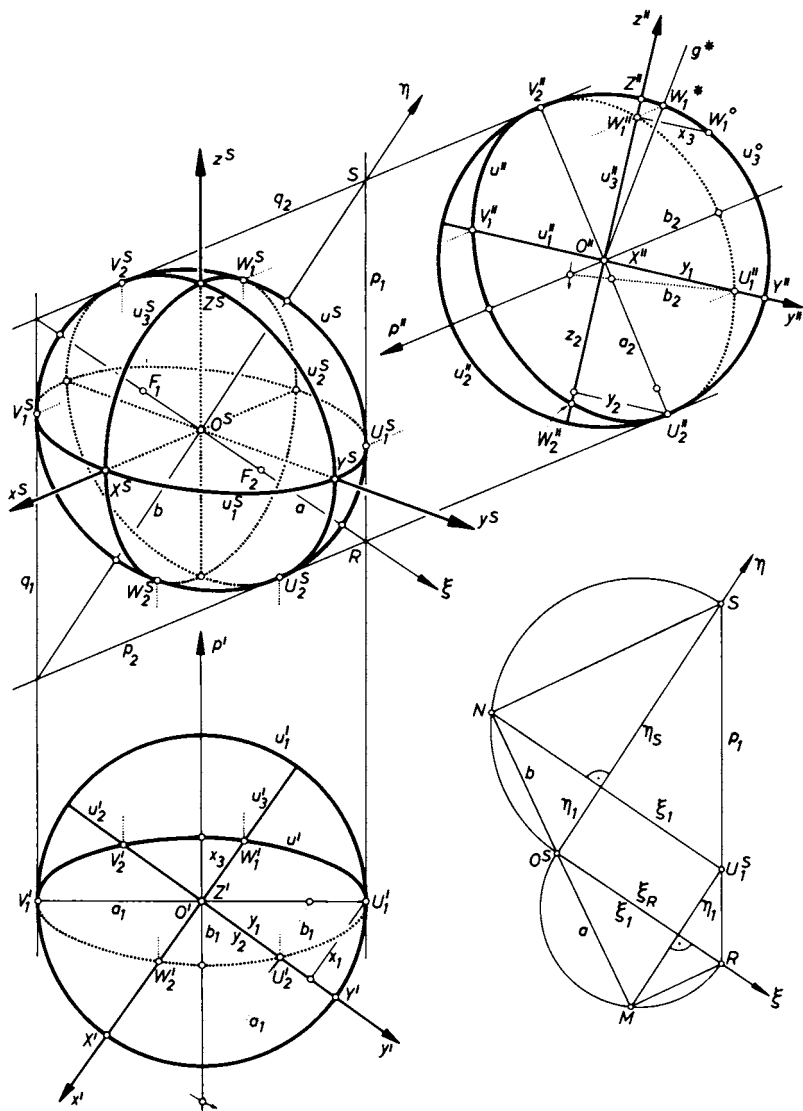


Fig. 148. Darstellung einer Kugel (Mittelpunkt O , Kugelpunkte X, Y, Z) nach dem Einschneldeverfahren (im Schnellriß). Konstruktion des scheinbaren Kugelumrisses u^s nach E. J. NYSTRÖM. Schnitt der Kugel mit den drei Koordinatenebenen und Ermittlung der Konturpunkte der drei entstehenden orthogonalen Großkreise u_1, u_2, u_3 . Konstruktion der wahren Größe der Einheitsstrecke $\epsilon = OX = OY = OZ$ und der möglichen Schrägrichtungen p des Schnellrisses.

aus dem Schnellbild u^s des Kugelumrisses u ermitteln können. Man beachte dabei, daß das Schnellrißverfahren (wie jedes axonometrische Bild) aus gegebenem Grund- und Aufriß den *Schrägriß* einer *Raumfigur* erzeugt, die

zu der durch diese beiden Normalrisse festgelegten Figur i.a. nicht kongruent, sondern zu ihr nur *ähnlich* ist.

Wir zeichnen zuerst für den Grund- und Aufriß die *scheinbaren Umrisse* u_1 und u_2 der Kugel: u'_1 ist der Kreis um O' durch X' und Y' , während u''_1 sich mit y'' deckt; u'_2 ist der Kreis um O'' durch Y'' und Z'' , während u''_2 sich mit y' deckt. Der *wahre Umriß* u der Kugel für den *Schnellriß* ist dann jener *Großkreis*, dessen *Ebene* ε auf dem durch die beiden Einschniederichtungen p' und p'' des Schnellrisses festgelegten *Projektionsstrahl* $p = (p', p'')$ *normal* steht. Der Schnellriß u^s dieses Kreises u ist dann eine *Ellipse*, welche den *scheinbaren Umriß der Kugel im Schnellbild* darstellt. Nur wenn der Projektionsstrahl p zur Bildebene normal ist, ergibt sich für u^s ein *Kreis*. Die Lage der Projektionsrichtung p gegen die Bildebene ist aber von vornherein nicht bekannt und kann erst nach Ermittlung des Schnellbildes u^s der Kugel angegeben werden.

Die *Umrißellipse* u^s der Kugel kann nun nach dem folgenden sehr einfachen Verfahren gefunden werden, das 1942 von dem Finnen EVERT JOHANNES NYSTRÖM (1895—1960) angegeben wurde. Vom *Schnellumriß* u^s der Kugel kennt man von vornherein *vier Tangenten*, nämlich die beiden zu p' parallelen Tangenten p_1 und q_1 an den Umrißkreis u'_1 des Grundrisses (Berührungspunkte U'_1 und V'_1) sowie die beiden zu p'' parallelen Tangenten p_2 und q_2 an den Umrißkreis u'_2 des Aufrisses (Berührungspunkte U'_2 und V'_2). Diese vier Tangenten bilden (wegen der *gleichen Radien der Kreise* u'_1 und u'_2) einen *Rhombus* \mathcal{R}^s mit dem *Mittelpunkt* O^s , welcher der gesuchten Umrißellipse u^s des Kugelschnellrisses umschrieben ist. Wir behaupten nun, daß auf den beiden (zueinander normalen) *Diagonalen* ξ und η dieses Rhombus \mathcal{R}^s bereits die *Hauptachsen der Umrißellipse* liegen.

Beweis: Das folgt erstens schon daraus, daß diese *Diagonalen* ξ, η sowohl für den Rhombus \mathcal{R}^s als auch für alle ihm eingeschriebenen Ellipsen *Symmetrieachsen* sind. Es folgt aber zweitens auch daraus, daß in der *perspektiven Affinität*, welche zwischen der Ellipse u^s des Schnellumrisses der Kugel und deren wahren Umrißkreis u besteht (u^s ist ein Schrägbild von u in der Projektionsrichtung p), dem Tangentenrhombus \mathcal{R}^s von u^s ein Tangentenparallelogramm des Kreises u (also wieder ein *Rhombus* \mathcal{R}) entspricht. Weil die Diagonalen dieses Rhombus \mathcal{R} aufeinander senkrecht stehen, also konjugierte Durchmesserrichtungen des Kreises u sind, müssen auch die *Diagonalen* ξ, η des *Tangentenrhombus* \mathcal{R}^s der *Ellipse* u^s konjugierte Durchmesserrichtungen von u^s sein; weil ihr Winkel ein rechter ist, sind es sogar die *Richtungen der Hauptachsen der Umrißellipse* u^s .

Um die Umrißellipse u^s der Kugel zeichnen zu können, brauchen wir noch die *Längen* a und b der *Halbachsen der Ellipse* u^s . Dazu benötigen wir auf einer der vier Seiten des Rhombus \mathcal{R}^s den *Berührungspunkt mit* u^s .

Um z. B. in Fig. 148 die Berührungspunkte der zu p' parallelen Rhombusseiten p_1 und q_1 zu finden, bemerken wir mit E. J. NYSTRÖM, daß dem wahren Umrißkreis u der Kugel genau zwei Punkte U_1, V_1 ihres ersten wahren Umrißkreises u_1 angehören. Ihre Grundrisse U'_1, V'_1 sind gerade jene beiden Punkte des ersten scheinbaren Umrißkreises u'_1 , deren Tangenten p_1, q_1 die zu p' parallelen Seiten des Rhombus \mathfrak{R} sind. Hat nun U'_1 in dem Achsenkreuz (x', y') der Grundrißebene π_1 die Koordinaten $U'_1 = (x_1, y_1)$, so ist sein Aufriß U''_1 jener Punkt des Aufrisses u''_1 von u_1 , dessen Ordinate y_1 ist. Man hat also, um U''_1 zu finden, nur den (vorzeichenbegabten) Abstand y_1 des Punktes U'_1 von der x' -Achse vom Punkt O'' aus (im richtigen Sinn) auf y'' abzutragen. Der Aufriß V''_1 des Umrißpunktes V_1 der Kugel ist dann zu U''_1 bezüglich O'' diametral. Aus U''_1 und V''_1 findet man dann durch *Einschneiden in der Richtung p''* auf den zu p' parallelen Seiten p_1 und q_1 des Rhombus \mathfrak{R} (den Einschneiderichtungen von U'_1 und V'_1), die (zueinander bezüglich O diametralen) *Schnellrisse U''_1 und V''_1 der Umrißpunkte U_1 und V_1 der Kugel*; sie stimmen mit den gesuchten *Berührungspunkten* der beiden (zu p' parallelen) Seiten p_1 und q_1 des Rhombus \mathfrak{R} überein.

Mittels derselben Überlegung kann man übrigens auch die Berührungspunkte der beiden zu p'' parallelen Seiten p_2 und q_2 des Rhombus \mathfrak{R} mit der Umrißellipse u finden. Der wahre Umrißkreis u der Kugel enthält nämlich auch genau zwei Punkte U_2, V_2 ihres zweiten wahren Umrißkreises u_2 . Ihre Aufrisssse U''_2, V''_2 sind gerade jene beiden Punkte des zweiten scheinbaren Umrißkreises u'_2 , deren Tangenten p_2 und q_2 die zu p'' parallelen Seiten des Rhombus \mathfrak{R} sind. Hat nun U''_2 in dem Achsenkreuz (y'', z'') der Aufrißebene π_2 die Koordinaten $U''_2 = (y_2, z_2)$, so ist sein Grundriß U'_2 jener Punkt von u'_1 , dessen Ordinate y_2 ist. Man hat also, um U'_2 zu finden, nur den (vorzeichenbegabten) Abstand y_2 des Punktes U''_2 von der z'' -Achse vom Punkt O' aus (im richtigen Sinn) auf y' abzutragen. Der Grundriß V'_2 des Umrißpunktes V_2 der Kugel ist dann zu U'_2 bezüglich O' diametral. Aus U'_2 und V'_2 findet man dann durch *Einschneiden in der Richtung p'* auf den zu p'' parallelen Seiten p_2 und q_2 des Rhombus \mathfrak{R} (den Einschneiderichtungen von U''_2 und V''_2) die (zueinander bezüglich O diametralen) *Schnellrisse U''_2 und V''_2 der Umrißpunkte U_2 und V_2 der Kugel*; sie stimmen mit den gesuchten *Berührungspunkten* der beiden (zu p'' parallelen) Seiten p_2 und q_2 des Rhombus \mathfrak{R} überein. Wegen der Symmetrie der Ellipse u und des Rhombus \mathfrak{R} bezüglich der beiden Hauptachsen ξ und η liegen die Umrißpunkte U_1^s und U_2^s bzw. V_1^s und V_2^s bezüglich der einen Hauptachse (ξ), die Umrißpunkte U_1^a und V_2^s bzw. U_2^s und V_1^a bezüglich der anderen Hauptachse (η) symmetrisch. Die vier Umrißpunkte $U_1^s, U_2^s, V_1^s, V_2^s$ bilden also ein der

Ellipse u^s eingeschriebenes zu den Achsen ξ und η seitenparalleles Rechteck. Sind also durch die erste der obigen Konstruktionen die Umrißpunkte U_1^s und U_2^s gefunden, so kann man daraus die Umrißpunkte U_1^s und U_2^s durch Spiegelung an den beiden Hauptachsen ξ und η finden.

Wir kennen jetzt von der *Umrißellipse* u^s der Kugel die beiden *Hauptachsen* ξ und η (Diagonalen des umschriebenen Rhombus $\mathfrak{R}^s = (p_1, q_1, p_2, q_2)$) ferner den Punkt U_1^s mit seiner *Tangente* p_1 (sowie die drei dazu symmetrisch liegenden Punkte von u^s samt Tangenten). Hat dann in dem auf die Hauptachsen ξ, η gestützten *cartesischen Koordinatensystem* der Punkt U_1^s die Koordinaten $U_1^s = (\xi_1, \eta_1)$, haben ferner die *Halbachsen* der Ellipse u^s die (noch unbekannten) *Längen* a und b , so besitzt die *Tangente* p_1 der Ellipse u^s in U_1^s die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\xi_1 \xi}{a^2} + \frac{\eta_1 \eta}{b^2} = 1.$$

Ihre Schnittpunkte mit den Hauptachsen sind auf der ξ -Achse: $R = (\xi_R, 0) = \left(\frac{a^2}{\xi_1}, 0\right)$ und auf der η -Achse: $S = (0, \eta_S) = \left(0, \frac{b^2}{\eta_1}\right)$. Daraus folgen die Formeln

$$(3) \quad \xi_1 \xi_R = a^2, \quad \eta_1 \eta_S = b^2.$$

Damit kann man die *Längen* a und b der *Halbachsen* der Umrißellipse u^s in einer Nebenfigur leicht konstruieren. 1. Die zur ξ -Achse gehörende *Länge* a ist das *geometrische Mittel* aus der Abszisse ξ_1 des Umrißpunktes U_1^s und der Abszisse ξ_R des Schnittpunktes R seiner Tangente p_1 mit der ξ -Achse. 2. Die zur η -Achse gehörende *Länge* b ist das *geometrische Mittel* aus der Ordinate η_1 des Umrißpunktes U_1^s und der Ordinate η_S des Schnittpunktes S seiner Tangente p_1 mit der η -Achse. Die Strecken a und b sind somit elementar mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke $(O^s R M)$ und $(O^s S N)$ konstruierbar. Damit ist die *Umrißellipse* u^s der Kugel für den gegebenen Schnellriß vollkommen bestimmt.

In Fig. 148 sind auch noch der Grundriß u' und der Aufriß u'' des wahren Umrißkreises u der Kugel für die Sehrichtung p eingezeichnet. Weil u jener Großkreis der Kugel ist, dessen Ebene ε zu p normal ist, sind die zu p' bzw. p'' normalen Durchmesser $U'_1 V'_1$ bzw. $U''_2 V''_2$ der Umrißkreise u'_1 bzw. u''_2 die *großen Achsen* der Ellipsen u' und u'' . Weil wir durch die Nystroömsche Konstruktion auch noch die Grundrisse U'_2 und V'_2 der Punkte U_2 und V_2 des Umrißkreises u kennen und ebenso auch die Aufrisse U''_1 und V''_1 der Punkte U_1 und V_1 von u , liefert die *Papierstreifenkonstruktion* die noch fehlenden Längen der Nebenachsen der Ellipsen u' und u'' . Damit

sind auch der Grundriß u' und der Aufriß u'' des wahren Umrisses u der Kugel für die Sehrichtung p gefunden.

Auch die von den drei Koordinatenebenen, nämlich der *Grundrißebene* $\pi_1(z=0)$, der *Aufrißebene* $\pi_2(x=0)$, und der *Kreuzrißebene* $\pi_3(y=0)$, aus der Kugel ausgeschnittenen *Großkreise* u_1, u_2 und u_3 finden sich in Fig. 148 dargestellt. Es ergeben sich im Schnellriß die *Ellipsen* u_1^s, u_2^s und u_3^s , deren jede das Bild eines Achsenpaares des Koordinatendreiecks (O, X, Y, Z) als konjugierte Durchmesser besitzt. Z. B. sind für die *Bildellipse* u_1^s des in der Ebene $z=0$ liegenden *Großkreises* u_1 der Kugel die *Strecken* $O^s X^s$ und $O^s Y^s$ *konjugierte Halbmesser*. Jede der drei Ellipsen u_1^s, u_2^s und u_3^s berührt den scheinbaren Umriß der Kugel (die Ellipse u^s) in zwei diametralen Punkten, nämlich in den Schnellrissen jener Punkte der Kugel, in denen die Ebene ε des wahren Kugelummrisses u die drei Großkreise u_1, u_2 und u_3 schneidet. Das sind auf dem Großkreis u_1 der Grundrißebene π_1 die schon bekannten Punkte U_1 und V_1 , ferner auf dem Großkreis u_2 der Aufrißebene π_2 die ebenfalls schon bekannten Punkte U_2 und V_2 . Die Schnellrisse u_1^s bzw. u_2^s dieser beiden Großkreise berühren daher die Umrißellipse u^s der Kugel genau in den beiden schon bekannten Punkten U_1^s und V_1^s , deren Tangenten p_1 und q_1 zu p' und z^s parallel sind, bzw. in den ebenfalls schon bekannten Punkten U_2^s und V_2^s , deren Tangenten p_2 und q_2 zu p'' und x^s parallel sind.

Um schließlich auch noch die beiden *Berührungspunkte* W_1^s und W_2^s des Bildes u_3^s des *Großkreises* u_3 von π_3 mit der Umrißellipse u^s zu ermitteln, kann man erstens nach dem Verfahren von Fig. 117 den Grund- und Aufriß des Dreiecks (O, X, Y, Z) und seiner umschriebenen Kugel durch den zugehörigen *Kreuzriß* ergänzen, dessen Maßstab allerdings i. a. von dem gemeinsamen Maßstab des Grund- und Aufrisses verschieden sein wird. Der *Kreuzriß* p''' der Projektionsrichtung p ist dann zum Schnellriß y^s der y -Achse parallel. Wird der *Kreuzriß* u_3''' des dritten Umrißkreises u_3 der Kugel von den zu p''' parallelen Tangenten (die auch u^s tangieren) in den Punkten W_1''' und W_2''' berührt, so liefert das Verfahren von NYSTRÖM leicht die Schnellrisse W_1^s und W_2^s dieser Umrißpunkte der Kugel, welche zugleich die gesuchten Berührungspunkte des Großkreisbildes u_3^s mit der Umrißellipse u^s sind. Aus Raumgründen wurde diese Konstruktion in die Fig. 148 nicht eingezeichnet.

Zweitens kann man bemerken, daß die Umrißpunkte W_1 und W_2 in der Kreuzrißebene $\pi_3(y=0)$ liegen, also ihren Grundriß auf x' und ihren Aufriß auf z'' haben. Die Punkte W_1 und W_2 haben daher als *Grundrisse* W_1' und W_2' die beiden Schnittpunkte von x' mit der Ellipse u' und als *Aufrisse* die Schnittpunkte W_1'' und W_2'' von z'' mit u'' , die allesamt auch

leicht genau konstruiert werden können. Man kann dazu die beiden perspektiven Affinitäten \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 der Ellipsen u' und u'' zu den Kreisen u'_1 und u'_2 verwenden. In der Affinität \mathfrak{A}_2 entspricht der Geraden z'' die Gerade g^* und dem Schnittpunkte W_1^* von g^* mit u'_2 ist der gesuchte Schnittpunkt W_1'' von z'' mit u'' zugeordnet. W_2'' liegt dazu diametral. Die zugehörigen Grundrisse W_1' und W_2' kann man ohne die Affinität \mathfrak{A}_1 finden, weil man aus dem Aufriß W_1'' durch eine Umlegung des Kreises u_3 , bei der $u_3^0 = u_2''$ ist und W_1 nach W_1^0 gelangt, die x -Kote x_3 von W_1 gewinnt; W_2' ist dann zu W_1' diametral. Durch Einschneiden in den Richtungen p' und p'' findet man dann aus (W_1', W_1'') und (W_2', W_2'') die gesuchten Konturpunkte W_1^s und W_2^s des Großkreises u_3 , und zwar diesmal ohne Verwendung des Kreuzrisses.

Bemerkung 1: Es ist bemerkenswert, daß man den Schnellumriß einer Kugel (ähnlich auch den scheinbaren Umriß einer Kugel für eine beliebige schiefe Axonometrie) konstruieren kann, 1. ohne den wahren Radius r der Kugel zu kennen und 2. ohne die genaue Lage der Sehstrahlrichtung p der zugrunde liegenden Parallelprojektion gegen die Bildebene π zu kennen.

Hat man jedoch einmal in der Bildebene π (Zeichenebene) den scheinbaren Umriß der Kugel (die Umrißellipse u^s) konstruiert, so kann man sowohl den Radius r der dargestellten Kugel als auch die richtige Lage der Projektionsstrahlen p gegen die Bildebene π angeben. Beides kann man nämlich aus der Umrißellipse u^s mit Hilfe von Satz 1 ablesen. Nach Satz 1 ist nämlich der wirkliche Radius r der im Schnellriß (Fig. 148) dargestellten Kugel gleich der Länge der kleinen Halbachse b der Umrißellipse u^s , also $r = b$.

Ferner sind nach Satz 1 die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 der Umrißellipse u^s die Projektionen jener beiden Kugelpunkte A und B , welche auf dem zur Bildebene π normalen Kugeldurchmesser liegen. Man kann sich dabei die Kugel in der Richtung der Sehstrahlen p so lange verschoben denken, bis ihr Mittelpunkt O in der Zeichenebene π liegt. Der Kreis über der kleinen Achse der Ellipse u^s ist dann der Äquatorkreis dieser Kugel κ ; die Endpunkte A, B des zu π normalen Kugeldurchmessers sollen als ihr Nord- und Südpol bezeichnet werden. Die möglichen Projektionen gehören dann zu einer der beiden, diese Pole mit den Brennpunkten von u^s verbindenden, (reellen) Projektionsrichtungen

$$(4) \quad p = [A F_1] = [B F_2] \quad \text{oder} \quad p = [A F_2] = [B F_1],$$

deren Lage gegen die Bildebene π damit vollkommen bestimmt ist. Nur bei Betrachtung in einer dieser Richtungen p (mit unendlich fernem Auge) erscheint die Kugel auf der Bildebene π als Ellipse von der besonderen Gestalt u^s .

Übrigens ist auch die genaue Lage des in Fig. 148 dargestellten Raumobjekts [Dreibein (O, X, Y, Z)] gegen die Bildebene π beim Schnellrißverfahren von vornherein unbekannt. Man könnte diese Lage nun leicht ermitteln, indem man in der gefundenen Sehrichtung p die Bilder X^s, Y^s, Z^s der Ecken X, Y, Z des Dreibeins auf die genannte Kugel κ (Mittelpunkt O) zurückführt und die entstehenden sechs Punkte zu orthogonal-normierten Dreibeinen (O, X, Y, Z) zusammenfaßt. Nach den Ergebnissen von 38. gibt es dafür

genau zwei *Möglichkeiten*. Die beiden entstehenden Dreibeine (O, X_1, Y_1, Z_1) und (O, X_2, Y_2, Z_2) sind zueinander bezüglich der zu p normalen Ebene ε (Ebene des wahren Kugelumrisses u für die Sehrichtung p) symmetrisch. Wegen der beiden Möglichkeiten des Sehstrahls p existieren also (wenn man $O = O^s$ annimmt) insgesamt *vier* mögliche räumliche *Lagen* des Dreibeins (O, X, Y, Z) welche das ebene Dreibein (O^s, X^s, Y^s, Z^s) als *Parallelprojektion* (Schnellriß) besitzen.

Bemerkung 2: Sonderfall des orthogonalen Schnellrisses. Nach dem Ergebnis von Bem. 1 steht der *Projektionsstrahl* p des Schnellrisses dann und nur dann *auf der Bildebene* π *normal* (ist der *Schnellriß* genau dann eine *orthogonale Axonometrie*), wenn in Fig. 148 die beiden Brennpunkte F_1, F_2 der Ellipse des Kugelumrisses u^s mit O^s identisch sind, d. h. *wenn der Kugelumriß* u^s *ein Kreis* ist. Dieser Fall tritt in Fig. 148 und ihrer Wiederholung in Fig. 149 *genau dann* ein, wenn die auf den Seiten p_1, q_1, p_2, q_2 des Rhombus \mathcal{R}^s liegenden *Umrißpunkte* $U_1^s, V_1^s, U_2^s, V_2^s$ die *Fußpunkte* der aus O^s *gefallten Lote* sind; wegen der vorhandenen Symmetrien bezüglich der Rhombusdiagonalen ξ und η genügt es, daß z. B. $[O^s, U_1^s]$ zu p_1 *normal* ist.

Man kann dieser Bedingung nach E. J. NYSTRÖM auch eine einfache analytische Gestalt geben. Bezeichnet man nämlich in Fig. 149 mit $\omega = \sphericalangle(p' p'')$ den *spitzen* Winkel der beiden Einschneiderichtungen p' und p'' , mit $\varphi = \sphericalangle(x' p')$ den *spitzen*

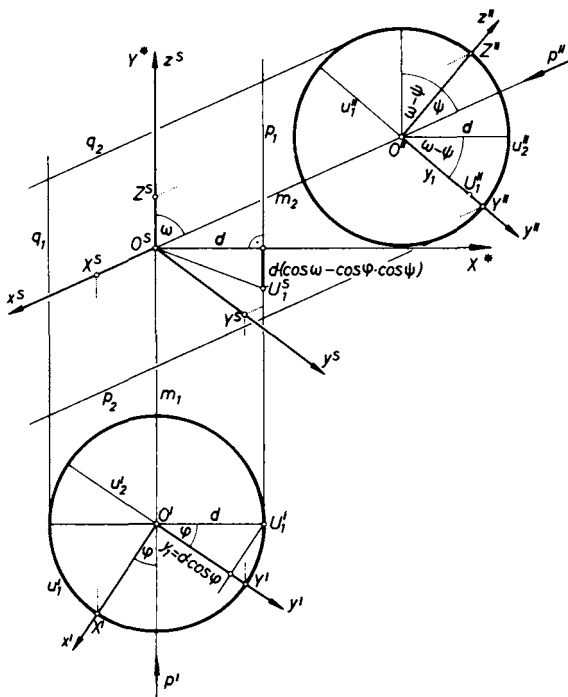


Fig. 149. Ermittlung der NYSTRÖMSchen Bedingung für orthogonale Schnellrisse (Projektionsrichtung p zur Bildebene normal)

Winkel der Richtungen x' und p' und mit $\psi = \angle(z''p'')$ den spitzen Winkel der Richtungen z'' und p'' , so lautet die NYSTRÖMSche Bedingung für orthogonale Schnellrisse

$$(5) \quad \cos \omega = \cos \varphi \cdot \cos \psi.$$

Man kann diese Formel leicht geometrisch gewinnen. Einfacher ist es, sich zu ihrem Beweis der Hilfsmittel der *analytischen Geometrie* zu bedienen. Legt man durch O^* eine horizontale X^* -Achse und eine vertikale Y^* -Achse, sind ferner $m_1 = O^*O'$, $m_2 = O^*O''$ die Abstände der Punkte O' und O'' von O^* und ist schließlich $d = O'U'_1$ der gemeinsame Radius der Kreise u'_1 und u''_2 , dann haben (Fig. 149) der Grundriß U'_1 , der Aufriß U''_1 und der Schnellriß U_1^s des Punktes U_1 des Kugelumrisses u die in der folgenden Tafel angegebenen Koordinaten:

	X^*	Y^*
U'_1	d	$-m_1$
U''_1	$-m_2 \cdot \sin \omega + d \cdot \cos \varphi \cos (\omega - \varphi)$	$m_2 \cdot \cos \omega - d \cdot \cos \varphi \sin (\omega - \varphi)$
U_1^s	d	$d \cdot (\cos \omega - \cos \varphi \cos \psi)$

Im Falle eines *orthogonalen Schnellrisses* liegt U_1^s auf der X^* -Achse; das ist dann und nur dann der Fall, wenn $\cos \omega - \cos \varphi \cos \psi = 0$ ist, also (5) gilt. W. z. b. w.

Der Vorteil eines solchen orthogonalen Schnellrisses (Fig. 150) liegt vor allem darin, daß der Schnellriß u^s der Kugel ein Kreis ist. Dieser Kreis u^s ist dem Rhombus \mathfrak{R}^s der Einschneidetangenten p_1, q_1, p_2, q_2 eingeschrieben. Man erkennt, daß die Kreise u^s, u'_1 und u''_2 alle den gleichen Radius d besitzen, der gleich dem Radius r der dargestellten Kugel ($r = d$) ist. Natürlich würde sich auch im Kreuzriß als Kugelumriß ein Kreis u''_3 vom gleichen Radius $r = d$ ergeben.

Man kann nach beliebiger Wahl der beiden Einschneiderichtungen p' und p'' und des Grundrisses x', y' der x - und y -Achse stets den Aufriß y'', z'' der y - und z -Achse so bestimmen, daß der zugehörige Schnellriß orthogonal wird. Die vier Punkte (O^s, O', U'_1, U_1^s) müssen dann ein Rechteck bilden. Nach beliebiger Wahl von O'' auf der durch O^s laufenden Geraden p'' kann dann nämlich der Punkt U''_1 auf y'' (zweideutig!) als Schnittpunkt der zu p'' parallelen Einschneidegeraden durch U'_1 mit dem Kreis um O'' vom Radius y_1 konstruiert werden. Damit sind auch y'' und z'' gefunden. Der dabei entstehende Schnellriß ist orthogonal; der Kugelumriß u^s ist ein zu den Umrißkreisen u'_1 und u''_2 der Kugel kongruenter Kreis vom Radius $r = d$.

Bemerkung 3: Das Verfahren von NYSTRÖM zur Ermittlung des Schnellumrisses u^s einer Kugel setzt voraus, daß der zum Schnellriß gehörige Grundriß und Aufriß gleiche Maßstäbe besitzen. Nur dann ist nämlich das von den vier Geraden ($p_1, q_1; p_2, q_2$) gebildete Parallelogramm ein Rhombus \mathfrak{R}^s und seine Diagonalen ξ, η sind die Hauptachsen der Umrißellipse u^s der Kugel.

Wenn dagegen der Grund- und Aufriß in verschiedenen Maßstäben gezeichnet sind, haben die Kreise u'_1 und u''_2 verschiedene Radien und ihre zu p' und p'' parallelen

Tangenten p_1, q_1 ; p_2, q_2 bilden ein *allgemeines Parallelogramm* \mathfrak{P}^s . Man überlegt sich dann mittels obiger Schlußkette leicht, daß *jetzt die Diagonalen ξ, η des Parallelogramms konjugierte Durchmesser der Umrißellipse u^s sind*. Bei der Ermittlung des auf p_1 liegenden Umrißpunktes U_1^s (Berührungspunkt von p_1 mit der Umrißellipse u^s) kann wieder

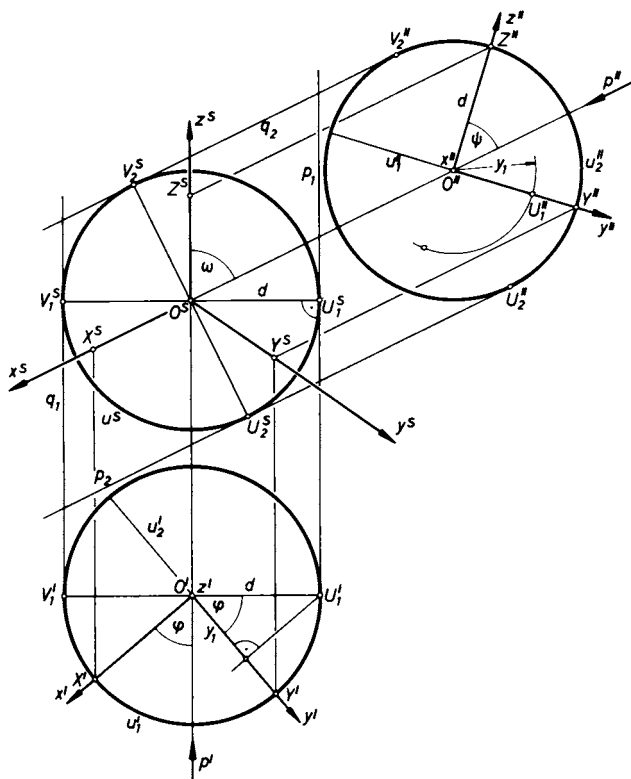


Fig. 150. Einrichtung eines orthogonalen Schnellrisses, wenn die beiden Einschniederichtungen p', p'' und der Grundriß (O', X', Y', Z') des Achsenkreuzes (O, X, Y, Z) gegeben sind.

das NYSTRÖMSCHE Verfahren angewandt werden; man muß jetzt nur bei der Ermittlung von $U_1^{l'}$ aus U_1^l die Maßstabänderung beim Übertragen der Ordinate y_1 von U_1 von y' nach y'' beachten. Die Längen a, b der halben, auf den Diagonalen ξ und η von \mathfrak{P}^s liegenden, konjugierten Durchmesser kann man sodann durch affine Übertragung der alten Ermittlung der Halbachsen gewinnen. Hat in einem auf die Geraden ξ und η gestützten affinen Koordinatensystem der Umrißpunkt U_1^s die affinen Koordinaten $U_1^s = (\xi_1, \eta_1)$ und haben die Schnittpunkte R und S der Tangente p_1 mit ξ und η die affinen Koordinaten $R = (\xi_R, 0)$ sowie $S = (0, \eta_S)$ dann gilt wieder

$$(6) \quad a^2 = \xi_1 \xi_R, \quad b^2 = \eta_1 \eta_S.$$

Damit sind die Längen a und b der beiden konjugierten Halbmesser auf ξ und η gewonnen und die Umrißellipse u^s kann in bekannter Weise (RYTZSCHE Achsenkonstruktion) gezeichnet werden.

XI

Algebraische Kurven und Flächen

53. Algebraische Kurven in der Ebene

Die (reellen oder komplexen) Punkte $P(x, y)$ der Ebene, deren cartesische Koordinaten einer *algebraischen Gleichung*

$$(1) \quad f(x, y) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k = 0$$

mit reellen konstanten Vorzahlen a_{ik} und ganzen positiven Exponenten i und k (einschließlich der Null) genügen, bilden in der (x, y) -Ebene eine *reelle algebraische Kurve* c_n . Der Größtwert der Exponentensummen $i + k$, die dabei in den einzelnen Gliedern $a_{ik} x^i y^k$ mit $a_{ik} \neq 0$ vorkommen, d. h. $\text{Max}(i + k) = n$, heißt die *Ordnung der algebraischen Kurve* c_n . Die Ordnung n von c_n ist gegenüber affinen Abbildungen (7.5), insbesondere Bewegungen, invariant: sie ist daher auch unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

Eine reelle algebraische Kurve braucht keine reellen Punkte zu enthalten, wie man am Beispiel des Kreises $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (Mitte = Nullpunkt, Radius $r = \sqrt{-1}$) sieht. Eine solche „reelle“ algebraische Kurve, deren Punkte sämtlich komplex sind, heißt eine *nullteilige algebraische Kurve*.

Jede reelle algebraische Kurve enthält neben jedem komplexen Punkt $P(x, y)$ von selbst auch den konjugiert komplexen Punkt $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, dessen Koordinaten (\bar{x}, \bar{y}) zu denen von $P(x, y)$ konjugiert komplex sind.

Es ist zweckmäßig, sich auch bei der Entwicklung der Theorie der ebenen algebraischen Kurven, von der hier nur ein kurzer Überblick gegeben werden kann, auf den *Standpunkt der projektiven Geometrie* zu stellen und die Ebene durch Hinzunahme der Fernpunkte ihrer Geraden zur *projektiven Ebene* π zu erweitern. Der Inbegriff der Fernpunkte von π wird als die *Ferngerade* von π bezeichnet. Analytisch geschieht diese Erweiterung, indem man von den gewöhnlichen (inhomogenen) cartesischen Koordinaten (x, y) der Ebene zu den *homogenen cartesischen Koordinaten* $(x_0 : x_1 : x_2)$ übergeht, wobei gilt

$$(2) \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Für *eigentliche Punkte* $P(x, y)$ ist dann

$$(3) \quad x_0 : x_1 : x_2 = 1 : x : y,$$

für *Fernpunkte*, festgelegt durch die Richtung eines Vektors $\xi = (x, y)$, gilt

$$(4) \quad x_0 : x_1 : x_2 = 0 : x : y.$$

Die lineare Gleichung einer *Geraden*

$$(5) \quad u_0 + u_1 x + u_2 y = 0$$

der projektiven Ebene π nimmt dann in homogenen Koordinaten die lineare homogene Gestalt

$$(6) \quad u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$$

an. Die lineare Gleichung der *Ferngeraden* lautet

$$(7) \quad x_0 = 0.$$

Die Gleichung der algebraischen Kurve n -ter Ordnung (1) nimmt in homogenen Koordinaten die in x_0, x_1, x_2 homogene Gestalt

$$(8) \quad f(x_0, x_1, x_2) \equiv \sum_{i,k} a_{i,k} x_0^{n-i-k} x_1^i x_2^k = 0$$

an, in der alle auftretenden Glieder denselben Grad n aufweisen.

Die reelle algebraische Kurve n . Ordnung c_n heißt *zerfallend* (reduzibel) oder *nicht zerfallend* (irreduzibel), je nachdem das reelle Polynom n . Grades $f(x, y)$ in (1) bzw. die reelle ternäre Form n . Grades $f(x_0, x_1, x_2)$ in (8) in ein Produkt von (reellen oder komplexen) Polynomen bzw. Formen niedrigeren Grades zerfällt werden können oder nicht. Ist etwa

$$(9) \quad f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \cdots f_r(x, y)$$

und sind die Grade dieser Polynome n bzw. n_1, n_2, \dots, n_r , so zerfällt die reelle algebraische Kurve

$$(10) \quad f(x, y) = 0$$

der Ordnung n in die r (reellen oder komplexen) algebraischen Teilkurven

$$(11) \quad f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad \dots, \quad f_r(x, y) = 0$$

der Ordnungen n_1, n_2, \dots, n_r , wobei

$$(12) \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

ist, d. h. *die Summe der Ordnungen der Teilkurven ist gleich der Ordnung n der Gesamtkurve c_n .*

Die *Ordnung n* einer reellen algebraischen Kurve c_n mit der Gleichung (1) hat eine einfache geometrische Bedeutung: Sie *gibt die Anzahl der Schnittpunkte der algebraischen Kurve c_n mit einer beliebigen (reellen oder komplexen) Geraden g mit der Gleichung*

$$(13) \quad y = \alpha x + \beta$$

(α, β beliebige reelle oder komplexe Konstanten) an. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Gerade g kein (einfacher oder mehrfacher) Bestandteil der Kurve c_n ist; andernfalls zerfällt c_n in die einfache oder k -fache Gerade g und in eine Restkurve c_{n-1} bzw. c_{n-k} der Ordnung $n-1$ bzw. $n-k$, wobei c_n alle Punkte von g einfach bzw. k -fach enthält.

Zur Bestimmung der Abszissen x der Schnittpunkte $P(x, y)$ der Geraden (13) mit der (reellen) algebraischen Kurve (1) hat man die algebraische Gleichung n -ten Grades

$$(14) \quad f(x, \alpha x + \beta) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x^i (\alpha x + \beta)^k = 0$$

nach x aufzulösen, die nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n besitzt. Diese Abszissen liefern genau n Schnittpunkte

$$(15) \quad P_i(x_i, y_i = \alpha x_i + \beta) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

der algebraischen Kurve c_n mit der Geraden g (Fig. 151).

Diese Schnittpunkte brauchen dabei keineswegs alle reell zu sein. Ein Teil von ihnen, oder sogar alle, können komplexe Punkte, d. h. Punkte mit komplexen Koordinaten sein. Ist die Schnittgerade (13) jedoch reell (d. h. α und β reell), dann ist mit jedem komplexen Punkt $P(x, y)$ auch der konjugiert komplexe Punkt $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, d. h. der Punkt mit den konjugiert komplexen Koordinaten, ein Schnittpunkt. Einzelne Schnittpunkte können auch zusammenfallen, nämlich dann, wenn die Gerade g die Kurve

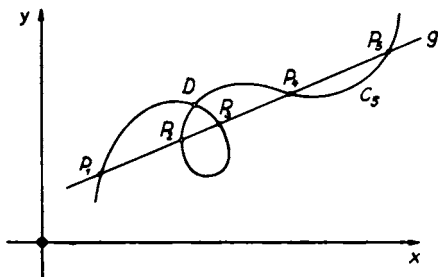


Fig. 51. Schnittpunkte einer Geraden g mit einer ebenen algebraischen Kurve 5. Ordnung c_5

berührt oder durch einen mehrfachen Punkt (Doppelpunkt, dreifachen Punkt usw.) der Kurve geht. Die Schnittpunkte müssen auch nicht alle eigentlich sein, sie können vielmehr für besondere Lagen von g , für die sich der Grad von (14) erniedrigt, auch (einfach oder mehrfach) in den Fernpunkt der Geraden g fallen. Ist g z. B. eine Asymptote von c_n , so berührt sie c_n zweipunktig in ihrem Fernpunkte. Eine Wendasymptote g berührt c_n in ihrem Fernpunkte sogar dreipunktig. Insgesamt folgt

Satz 1: Die Ordnung n einer ebenen (reellen) algebraischen Kurve c_n ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen (reellen oder komplexen) Geraden g . Die Schnittpunkte können reell oder komplex, eigentlich

oder uneigentlich, einfach oder mehrfach sein. Mehrfache Schnittpunkte sind entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit zu zählen.

Daraus folgt, wieder nach dem Fundamentalsatz der Algebra¹⁾,

Satz 2: Hat eine Gerade g mit einer ebenen algebraischen Kurve c_n der Ordnung n mehr als n Punkte gemeinsam, so muß sie unendlich viele Punkte mit der Kurve gemeinsam haben. Die Gerade g gehört dann ganz der c_n an, sie ist ein Bestandteil von ihr. Die Kurve c_n zerfällt dann in die Gerade g (algebraische Kurve 1. Ordnung) und eine algebraische Restkurve c_{n-1} der Ordnung $n - 1$.

Beispiel 1: Ein Kegelschnitt, d. h. eine ebene algebraische Kurve zweiter Ordnung c_2 mit der Gleichung

$$(16) \quad a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) = 0,$$

ist durch 5 verschiedene Punkte P_1, \dots, P_5 der Ebene eindeutig bestimmt, sofern keine 4 Punkte auf einer Geraden liegen. Liegen davon 3 Punkte, z. B. die Punkte P_1, P_2, P_3 , auf einer Geraden g_1 , dann gehört diese Gerade ganz dem Kegelschnitt an. Die Restkurve ist eine Kurve erster Ordnung, d. h. eine zweite Gerade g_2 , nämlich die Gerade durch P_4 und P_5 . Der Kegelschnitt c_2 zerfällt dann also in zwei Geraden g_1 und g_2 (Fig. 152).

In der Gleichung (1) einer allgemeinen algebraischen Kurve c_n kommen $s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ reelle Vorzeichen vor, von denen aber nur

$$(17) \quad s_n = s - 1 = \frac{1}{2}n(n + 3)$$

wesentlich sind. Daraus folgt der

Satz 3: Durch $s_n = \frac{1}{2}n(n + 3)$ reelle Punkte kann stets eine reelle algebraische Kurve n . Ordnung c_n gelegt werden, die im allgemeinen durch diese Punkte eindeutig bestimmt ist.

Fig. 152. Fünf Punkte bestimmen einen Kegelschnitt. Liegen drei davon auf einer Geraden, so zerfällt der Kegelschnitt in ein Geradenpaar

Beispiel 2: Ein Kegelschnitt c_2 ist daher, wie oben erwähnt, durch $s_2 = 5$ Punkte allgemeiner Lage, eine algebraische Kurve 3. Ordnung c_3 ist durch $s_3 = 9$ Punkte allgemeiner Lage, eine algebraische Kurve 4. Ordnung c_4 ist durch $s_4 = 14$ Punkte allgemeiner Lage eindeutig bestimmt.

Projiziert man eine ebene algebraische Kurve c_n , die mit einer (beliebigen) Geraden g genau n Schnittpunkte gemeinsam hat, durch Parallel-

¹⁾ Vgl. dazu K. STRUBECKER, Einführung in die höhere Mathematik, Band I (Grundlagen) Nr. 46, 2. Aufl., München 1966.

oder Zentralprojektion aus einem nicht der Kurvenebene π angehörenden (uneigentlichen oder eigentlichen) Punkte O in eine andere Ebene π' , so geht die algebraische Kurve c_n in eine Bildkurve c'_n , die Gerade g in eine Bildgerade g' über. Den n Schnittpunkten von c_n und g entsprechen dann n Schnittpunkte von c'_n und g' (wobei ein eigentlicher Schnittpunkt in einen uneigentlichen verwandelt werden kann und umgekehrt). Daraus folgt aber nach den Lehren der Funktionentheorie, daß c'_n gleichfalls eine algebraische Kurve n -ter Ordnung ist. Also gilt

Satz 4: *Der Parallelriß und der Zentralriß einer ebenen algebraischen Kurve n -ter Ordnung ist wieder eine algebraische Kurve gleicher Ordnung. Die Ordnung einer ebenen algebraischen Kurve ist also gegen Parallelprojektion und gegen Zentralprojektion invariant.*

Für die Anzahl der Doppelpunkte einer irreduziblen, d. h. nicht zerfallenden algebraischen Kurve n -ter Ordnung c_n der projektiven Ebene gilt der

Satz von Mac-Laurin (1720): *Eine irreduzible ebene algebraische Kurve n -ter Ordnung c_n der projektiven Ebene hat höchstens $d_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte. Dieser Satz gilt, wenn mehrfache Punkte vorhanden sind, mit der Maßgabe, daß ein s -facher Punkt dabei $d_s = \frac{s(s-1)}{2}$ Doppelpunkten äquivalent ist.*

Hat eine c_n mehr als d_n Doppelpunkte, so muß sie in Kurven niedriger Ordnung zerfallen, wobei die Summe der Ordnungen der Teilkurven gleich n ist.

Beispiel 3: Für $n = 2$ ist $d_2 = 0$. Ein nicht zerfallender Kegelschnitt hat keinen Doppelpunkt.

Beispiel 4: Für $n = 3$ ist $d_3 = 1$. Eine nicht zerfallende algebraische Kurve 3. Ordnung hat höchstens einen Doppelpunkt. Bei 2 Doppelpunkten zerfällt sie in einen Kegelschnitt und eine Gerade, bei 3 Doppelpunkten in 3 Geraden.

Fig. 153a zeigt eine nicht zerfallende algebraische Kurve 3. Ordnung ohne Doppelpunkt. Ihre Gleichung ist

$$(18) \quad (x^2 + y^2 - 1)y + \lambda = 0,$$

wobei λ eine beliebige reelle Konstante ist (für die gezeichnete Kurve ist $\lambda = -1/10$). Die x -Achse ($y = 0$) ist eine Wendearsymptote der Kurve.

Fig. 153b zeigt eine nicht zerfallende algebraische Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt D . Sie hat die Parameterdarstellung

$$(19) \quad \begin{cases} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \lambda \cdot \frac{t^3}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{2t}{t^2 + 1}. \end{cases} \quad \lambda = \text{reell, konstant,}$$

woraus durch Elimination des Parameters t die parameterfreie Darstellung

$$(20) \quad (x^2 + y^2 - 1)y + \lambda \left\{ \frac{\lambda}{4} y^3 + (x+2)y^2 - 2(x+1)y \right\} = 0$$

folgt. Für die gezeichnete Kurve ist $\lambda = 1/10$ gewählt. Die x -Achse ($y = 0$) ist eine Asymptote der Kurve.

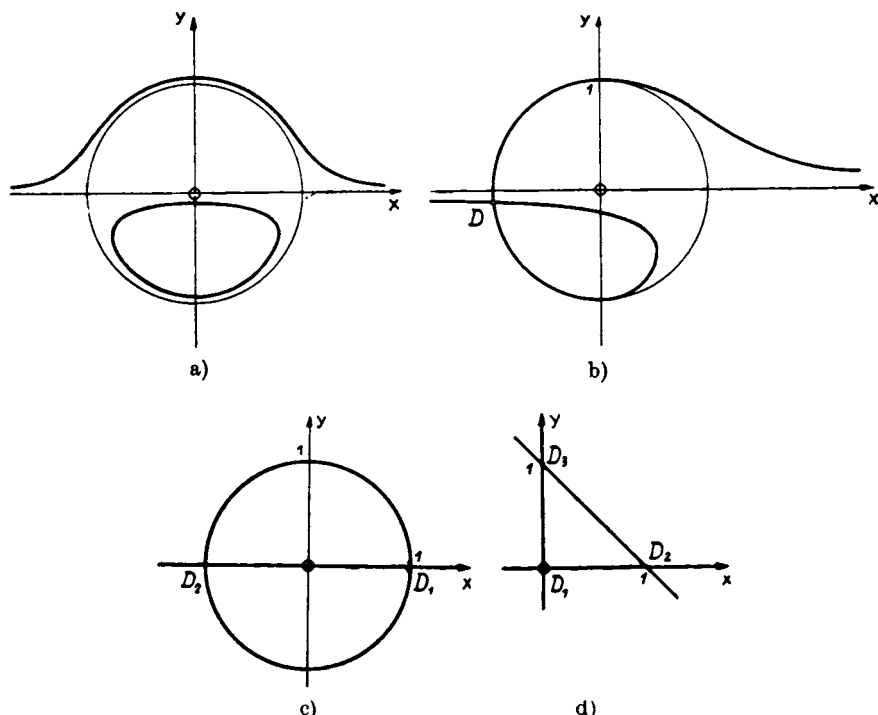


Fig. 153. Ebene algebraische Kurven 3. Ordnung

- a) ohne Doppelpunkt, b) mit einem Doppelpunkt.
 c) ebene algebraische Kurve 3. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, die in einen Kreis und eine Gerade zerfällt,
 d) ebene algebraische Kurve 3. Ordnung mit 3 Doppelpunkten, die in drei Geraden zerfällt

Für den Wert $\lambda = 0$ erhält man aus (18) und (20) die *algebraische Kurve 3. Ordnung*

$$(21) \quad (x^2 + y^2 - 1)y = 0,$$

die in einen Kegelschnitt (Kreis $x^2 + y^2 - 1 = 0$) und in eine Gerade ($y = 0$) zerfällt (Fig. 153c). Sie hat zwei Doppelpunkte, nämlich die beiden Schnittpunkte D_1, D_2 des Kreises und der Geraden. Umgekehrt kann man die nicht zerfallenden algebraischen Kurven in Fig. 153a und Fig. 153b aus der zerfallenden in Fig. 153c dadurch gewinnen, daß man durch eine geringe Abwandlung des Kurvenverlaufes den einen oder beide Doppelpunkte „auflöst“.

Fig. 153d schließlich zeigt eine algebraische Kurve 3. Ordnung mit drei Doppelpunkten mit der Gleichung

$$(22) \quad xy(x+y-1) = 0,$$

die in drei Geraden mit den Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ und $x + y - 1 = 0$ zerfällt.

Beispiel 5: $n = 4$. Nach dem Satz von MAC-LAURIN ist dann $d_4 = 3$. Eine nicht zerfallende algebraische Kurve 4. Ordnung hat höchstens 3 Doppelpunkte.

Für die Anzahl der Schnittpunkte zweier nicht zerfallender ebener algebraischer Kurven gilt, wie die Algebra lehrt, der nach ÉTIENNE BEZOUT (1730–1783, Paris) benannte

Satz von Bezout (1764): Zwei nicht zerfallende ebene algebraische Kurven c_m und c_n von m -ter bzw. n -ter Ordnung haben genau $m \cdot n$ Schnittpunkte. Die Schnittpunkte können dabei eigentlich oder uneigentlich, reell oder komplex, einfach oder mehrfach sein. Mehrfache Schnittpunkte sind entsprechend ihrer Vielfachheit zu zählen.

Daraus folgt wieder

Satz 5: Haben die beiden ebenen algebraischen Kurven c_m und c_n mehr als $m \cdot n$ Schnittpunkte, so haben sie unendlich viele Schnittpunkte. Dieser Fall tritt nur ein, wenn entweder die beiden Kurven überhaupt identisch sind, oder wenn wenigstens eine von ihnen zerfällt und eine ihrer Teilkurven ganz der anderen Kurve angehört.

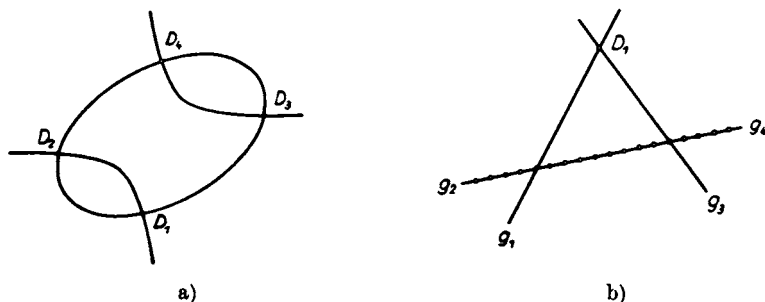


Fig. 154. a) Zwei nicht identische Kegelschnitte haben vier Schnittpunkte.

b) Existieren mehr als vier Schnittpunkte, so zerfallen die beiden Kegelschnitte in zwei Geradenpaare (g_1, g_2) , (g_3, g_4) mit einer gemeinsamen Teilgeraden $g_1 = g_3$.

Beispiel 6: Zwei Kegelschnitte schneiden sich in $2 \cdot 2 = 4$ Punkten (Fig. 154a). Haben sie 5 Punkte gemeinsam, dann sind sie entweder identisch oder beide zerfallen in je 2 Geraden g_1, g_2 bzw. g_3, g_4 , wobei etwa g_1 mit g_3 zusammenfällt (Fig. 154b).

Beispiel 7: Ein nicht zerfallender Kegelschnitt c_2 und eine ebene algebraische Kurve c_4 der Ordnung vier schneiden sich wegen $2 \cdot 4 = 8$ in acht Punkten. Haben sie 9 Punkte gemeinsam, dann ist die c_2 ein Teil der c_4 , d. h. die c_4 zerfällt in den Kegel-

schnitt c_2 und eine Restkurve, die ein zweiter (irreduzibler oder reduzibler) Kegelschnitt c'_2 ist.

Beispiel 8: Nach dem Satz von MAC-LAURIN hat eine nicht zerfallende algebraische Kurve 4. Ordnung höchstens drei Doppelpunkte.

Eine algebraische Kurve 4. Ordnung mit vier Doppelpunkten zerfällt daher, und zwar in zwei Kegelschnitte (Fig. 155a); denn ein beliebiger fünfter Punkt P bestimmt zu-

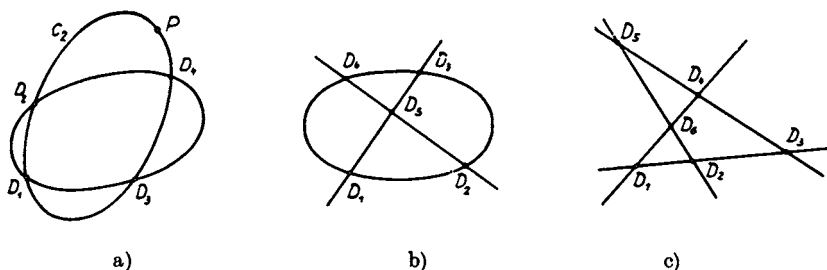


Fig. 155. Zerfallende ebene algebraische Kurven 4. Ordnung mit
a) genau 4 Doppelpunkten,
b) genau 5 Doppelpunkten (Kegelschnitt und Geradenpaar),
c) genau 6 Doppelpunkten (zwei Geradenpaare)

sammen mit den vier Doppelpunkten eindeutig einen Kegelschnitt c_2 , der mit der Kurve c_4 insgesamt neun Punkte gemeinsam hat, nämlich den Punkt P und die vier doppeltzählenden Doppelpunkte. Daher ist der Kegelschnitt c_2 eine Teilkurve der c_4 .

Bei fünf Doppelpunkten ist das Zerfallsprodukt ein Kegelschnitt und zwei Geraden (Fig. 155b), bei sechs Doppelpunkten sind es vier Geraden (Fig. 155c).

54. Algebraische Flächen im Raum

Die (reellen oder komplexen) Raumpunkte $P(x, y, z)$, deren (inhomogene) cartesische Koordinaten einer algebraischen Gleichung

$$(1) \quad f(x, y, z) \equiv \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

mit reellen konstanten Vorzahlen a_{ijk} und ganzen positiven Exponenten i, j, k (einschließlich der Null) genügen, bilden im Raum eine *reelle algebraische Fläche*. Der Größtwert der Exponentensumme in den einzelnen Gliedern $a_{ijk} \neq 0$, d. h. $\text{Max}(i+j+k) = n$, ist die vom Koordinatensystem wieder unabhängige *Ordnung* der algebraischen Fläche Φ_n .

Eine reelle algebraische Fläche (1) muß nicht unbedingt reelle Punkte enthalten. So ist z. B. die Fläche 2. Ordnung $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ (*nullteilige Kugel* vom Radius $r = \sqrt{-1}$ mit dem Nullpunkt als reellem Mittelpunkt) eine reelle algebraische Fläche, die keinen reellen Punkt trägt.

Beispiel 1: Eine reelle *algebraische Fläche 2. Ordnung* Φ_2 wird von allen (reellen und komplexen) Punkten $P(x, y, z)$ gebildet, deren Koordinaten einer reellen Gleichung der Form

$$(2) \quad \begin{aligned} & a_{000} + (a_{100} x + a_{010} y + a_{001} z) + \\ & + (a_{200} x^2 + a_{020} y^2 + a_{002} z^2 + a_{011} y z + a_{101} z x + a_{110} x y) = 0 \end{aligned}$$

genügen.

Die algebraische Fläche n . Ordnung (1) heißt *zerfallend* (reduzibel) oder *nicht zerfallend* (irreduzibel), je nachdem das Polynom n . Grades $f(x, y, z)$ in (1) in ein Produkt von Polynomen niedrigeren Grades zerfällt werden kann oder nicht. Ist etwa

$$(3) \quad f(x, y, z) = f_1(x, y, z) \cdot f_2(x, y, z) \cdots f_r(x, y, z),$$

und sind die Grade dieser (reellen oder komplexen) Polynome n bzw. n_1, n_2, \dots, n_r , so zerfällt die algebraische Fläche (1) der Ordnung n in die r (reellen oder komplexen) algebraischen Teilflächen

$$(4) \quad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad \dots, \quad f_r(x, y, z) = 0$$

der Ordnungen n_1, n_2, \dots, n_r , wobei wieder

$$(5) \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

ist.

Die *Ordnung* n einer reellen algebraischen Fläche Φ_n der Gleichung (1) hat eine einfache *geometrische Bedeutung*.

Schneidet man die reelle algebraische Fläche Φ_n mit einer beliebigen reellen oder komplexen Geraden g , dargestellt durch das Gleichungspaar

$$(6) \quad \begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \gamma x + \delta, \end{aligned}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige reelle oder komplexe Konstanten), so erhält man die x -Koordinaten der Schnittpunkte aus der algebraischen Gleichung n -ten Grades

$$(7) \quad \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i (\alpha x + \beta)^j (\gamma x + \delta)^k = 0.$$

Diese hat aber, algebraisch gezählt, genau n Wurzeln, denen n Schnittpunkte entsprechen. Es folgt

Satz 1: Eine beliebige (reelle oder komplexe) Gerade im Raum schneidet eine reelle algebraische Fläche n -ter Ordnung, algebraisch gezählt, in genau n Schnittpunkten. Die Schnittpunkte können dabei wieder reell oder komplex, einfach oder mehrfach, eigentlich oder uneigentlich (unendlichfern) sein.

Schneidet eine reelle Gerade die reelle Fläche in einem komplexen Punkt P , dann enthält sie auch den dazu konjugiert komplexen Flächenpunkt \bar{P} .

Um die unendlichfernen Punkte der Fläche analytisch zu erfassen, muß man wieder von den inhomogenen Koordinaten (x, y, z) zu homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (1 : x : y : z)$ übergehen. Die Gleichung $x_0 = 0$ kennzeichnet dann den Inbegriff der Fernpunkte des Raumes, die sogenannte Fernebene, welche den eigentlichen Punktraum zu dem projektiven Raum ergänzt.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt weiter

Satz 2: *Hat eine (reelle oder komplexe) Gerade g mit einer algebraischen Fläche n -ter Ordnung mehr als n Punkte gemeinsam, so hat sie mit ihr alle ihre Punkte gemeinsam; sie gehört dann ganz dieser Fläche an.*

Beispiel 2: Ein Drehzylinder

$$(8) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

vom Radius $r > 0$ ist eine Fläche 2. Ordnung und wird daher von einer reellen Geraden g in $n = 2$ Punkten geschnitten. Diese Punkte können, je nach der Lage der Geraden, reell-verschieden, reell-zusammenfallend oder konjugiert-komplex sein, oder schließlich, wie das z. B. bei der Drehachse ($x = 0, y = 0$) zutrifft, in dem (doppeltzählenden) unendlich fernen Scheitel des Drehzylinders (8), d. h. im Fernpunkt der z -Achse zusammenfallen. Hat die Gerade g , wie das z. B. bei der Geraden ($x = r, y = 0$) zutrifft, mit dem Drehzylinder (8) mehr als zwei Punkte gemeinsam, so liegt sie ganz auf ihm und ist eine Erzeugende (Mantellinie) der Fläche.

Aus Satz 1 folgt unmittelbar

Satz 3: *Eine (nicht zerfallende) reelle algebraische Fläche Φ_n der Ordnung n wird von jeder Ebene ε in einer ebenen algebraischen Kurve n . Ordnung c_n geschnitten. (Zerfällt Φ_n , so kann die Ebene ε ein Bestandteil von Φ_n sein.)*

Jede beliebige Gerade g von ε trifft nämlich, wenn sie nicht ganz auf Φ_n liegt, den Schnitt von Φ_n und ε in genau n (reellen oder komplexen, eigentlichen oder uneigentlichen, einfachen oder mehrfachen) Punkten.

Umgekehrt gilt

Satz 4: *Eine algebraische Fläche Φ , welche von einer (einzigen) Ebene (insgesamt) in einer ebenen algebraischen Kurve n . Ordnung c_n geschnitten wird, besitzt die Ordnung n .*

Daraus folgt sofort der

Satz 5: *Besitzt eine reelle ebene algebraische Kurve c_n der Ordnung n eine Symmetrieachse a , so erzeugt sie bei Drehung um a eine reelle algebraische Drehfläche Φ_n der gleichen Ordnung n .*

Beweis: Die Ebene von c_n und jede andere (die Drehachse a enthaltende) *Meridianebene* ε schneiden die Drehfläche in einer zu c_n kongruenten algebraischen Meridiankurve n . Ordnung.

Allgemeiner folgt

Satz 6: *Ist die reelle algebraische Meridiankurve c_n bezüglich der reellen Drehachse a nicht symmetrisch, so erzeugt sie bei Drehung um a eine reelle algebraische Drehfläche Φ_{2n} der Ordnung $2n$.*

Beweis: Der Halbmeridian c_n bildet zusammen mit seinem Spiegelbild c'_n an a den (bezüglich a symmetrischen) Vollmeridian $2n$ -ter Ordnung der algebraischen Drehfläche, deren Ordnung daher nach Satz 4 gleichfalls $2n$ ist.

Daraus folgt als Beispiel

Satz 7: *Durch Drehung eines Kegelschnittes c_2 um eine seiner Hauptachsen entsteht stets eine algebraische Drehfläche 2. Ordnung. Umgekehrt kann jede algebraische Drehfläche 2. Ordnung auf diese Weise erzeugt werden.*

Beweis der Umkehrung: Jeder Meridianschnitt der Drehfläche Φ_2 muß nämlich ein Kegelschnitt sein, der (weil die Ordnung der Fläche 2 ist) die Drehachse als Symmetrieachse (Hauptachse) besitzt.

Beispiel 8: *Durch Drehung eines Kreises um eine in der Kreisebene gelegene Achse, die den Kreismittelpunkt nicht enthält, entsteht eine Ringfläche oder ein Torus. Die Ringfläche ist eine algebraische Fläche 4. Ordnung.*

Als *Schnitt (Durchdringungskurve)* zweier reeller algebraischer Flächen entsteht eine *reelle algebraische Raumkurve* k . Unter ihrer *Ordnung* versteht man die (algebraisch gezählte) Anzahl ihrer *Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene*. Diese Schnittpunkte können dabei wieder reell oder komplex, eigentlich oder uneigentlich, einfach oder mehrfach sein. Sind die beiden reellen algebraischen Flächen Φ_m und Φ_n , deren Schnittgebilde die Raumkurve k ist, von m -ter bzw. n -ter Ordnung, so werden sie von einer beliebigen Ebene ε in einer ebenen algebraischen Kurve c_m bzw. c_n der Ordnung m bzw. n geschnitten. Diese Kurven schneiden sich, algebraisch gezählt, nach dem Satz von BÉZOUT in genau $m \cdot n$ Schnittpunkten, welche beiden Flächen Φ_m und Φ_n und somit auch ihrer Durchdringungskurve k angehören. Daraus folgt

Satz 8: *Eine reelle algebraische Fläche m -ter Ordnung Φ_m und eine reelle algebraische Fläche n -ter Ordnung Φ_n schneiden sich in einer reellen algebraischen Raumkurve (mn) -ter Ordnung k_{mn} .*

Trifft eine besondere Schnittebene σ die Raumkurve k_{mn} in mehr als mn Punkten, so ist dies nur dadurch möglich, daß die Raumkurve k entweder ganz in dieser Ebene σ liegt, also eine *ebene algebraische Kurve* in σ ist, oder daß eine oder mehrere algebraische Teilkurven der Raumkurve k in dieser Ebene σ liegen. Die Raumkurve k zerfällt dann in diese ebenen

algebraischen Teilkurven und in eine gewisse algebraische Restkurve k' .

Wir erwähnen schließlich noch den

Satz 9: *Berühren sich zwei algebraische (allgemeiner: zwei stetig gekrümmte) Flächen Φ und Ψ in einem Punkte P , dann hat ihre Durchdringungskurve k im Berührungspunkt P einen Doppelpunkt.*

Durchdringen sich dabei die beiden Flächen in der Umgebung des Berührungspunktes P in zwei reellen Kurvenzügen, dann durchläuft ihre Durchdringungskurve k den Doppelpunkt P in zwei reell verschiedenen Richtungen (*Doppelpunktstangenten*) oder in zwei zusammenfallenden Richtungen (*Rückkehrtangente*). Findet jedoch in P nur eine Berührung ohne reelle Durchdringung der Flächen Φ und Ψ statt, dann ist der Berührungspunkt ein *Einsiedlerpunkt* der Durchdringungskurve k , d. h. ein *Doppelpunkt* von k mit zwei konjugiert komplexen Tangentenrichtungen.

Beispiel 4: Zwei algebraische Flächen 2. Ordnung Φ_2 und Ψ_2 durchdringen sich in einer algebraischen Raumkurve 4. Ordnung k_4 , d. h. in einer Kurve, die von einer beliebigen Ebene in 4 Punkten geschnitten wird. Die Schnittkurve k_4 kann dabei auch in zwei oder mehr algebraische Teilkurven zerfallen. Dabei bestehen die folgenden vier Zerfallsmöglichkeiten:

1. $k_4 = k_1 + k_3$;
2. $k_4 = k_1 + k'_1 + k_2$;
3. $k_4 = k_1 + k'_1 + k''_1 + k'''_1$;
4. $k_4 = k_2 + k'_2$,

wobei k_1, k_2, k_3 der Reihe nach eine Gerade, einen (nicht zerfallenden) Kegelschnitt und eine (nicht zerfallende) algebraische Raumkurve 3. Ordnung bezeichnen.

Berühren sich die beiden Flächen Φ_2 und Ψ_2 in zwei Punkten D_1 und D_2 , ohne eine Erzeugende gemeinsam zu haben, dann sind diese beiden Punkte Doppelpunkte der Durchdringungskurve k_4 . Über eine solche Raumkurve

4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten, die keine Gerade als Teil enthält, läßt sich nun die wichtige Tatsache feststellen, daß sie stets in zwei Kegelschnitte zerfällt.

Beweis: Ein beliebiger Punkt P der k_4 bestimmt nämlich mit den beiden Doppelpunkten D_1, D_2 eine Ebene ε , die mit der Raumkurve k_4 , algebraisch gezählt, fünf Punkte gemeinsam hat (Fig. 156). Dann haben aber ε und k_4 unendlich viele Punkte gemeinsam, d. h. die Ebene ε enthält

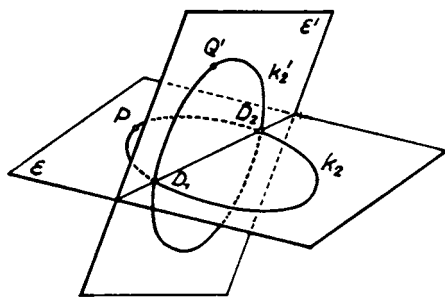


Fig. 156. Eine algebraische Raumkurve 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten D_1, D_2 zerfällt in zwei sich in D_1 und D_2 schneidende Kegelschnitte (k_1, k_2)

eine ebene Teilkurve der Raumkurve k_4 . Die Fläche Φ_2 (ebenso Ψ_2) wird aber von ε in einer algebraischen Kurve 2. Ordnung geschnitten, die keine Gerade als Teil enthält.

so daß jene ebene Teilkurve von k_4 ein nicht zerfallender Kegelschnitt k_2 ist. Die in k_4 noch enthaltene Restkurve ist dann ein zweiter nicht zerfallender Kegelschnitt k'_2 . Er liegt in einer zweiten Ebene ε' , die ebenso von den beiden Doppelpunkten D_1, D_2 und einem nicht in ε gelegenen weiteren Punkt Q' der k_4 aufgespannt wird. Diese zweite Teilkurve k'_2 ist der Schnitt von ε' mit der Fläche Φ_2 (oder Ψ_2). Da k_2 und k'_2 zusammen eine (zerfallende) k_4 ergeben, kann die Durchdringungskurve 4. Ordnung der Flächen Φ_2 und Ψ_2 außer diesen beiden keine weiteren Teilkurven besitzen. Somit folgt

Satz 10: *Berühren sich zwei algebraische Flächen 2. Ordnung, welche keine Gerade gemeinsam haben, in zwei Punkten D_1, D_2 , so zerfällt ihre Schnittkurve k_4 in zwei reguläre Kegelschnitte k_2, k'_2 , deren Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ sich in der Verbindungsgeraden $[D_1, D_2]$ der beiden Berührungspunkte schneiden.*

Eine algebraische Raumkurve n -ter Ordnung k_n wird per definitionem von einer Ebene ε in n (algebraisch gezählten) Punkten geschnitten. Projiziert man nun diese Raumkurve durch Parallel- oder durch Zentralprojektion (aus einem der k_n nicht angehörenden Zentrum) in eine Bildebene π , so entsteht in π eine ebene algebraische Kurve k'_n . Auch jede zur Projektionsrichtung parallele Ebene ε , bzw. auch jede durch das Projektionszentrum gelegte Ebene ε schneidet die Raumkurve k_n in genau n Punkten. Der Riß einer solchen (projizierenden) Ebene ε in der Bildebene π ist aber eine Gerade $g = \varepsilon'$, die den ebenen Riß k'_n der Raumkurve ebenfalls in n Punkten trifft. Für den Riß k'_n von k_n gilt daher nach den Lehren der Funktionentheorie

Satz 11: *Der Parallelriß und der Zentralriß einer algebraischen Raumkurve n -ter Ordnung ist eine ebene algebraische Kurve n -ter Ordnung.*

Bemerkung 1: Ist das (eigentliche oder uneigentliche) Projektionszentrum O ein (einfacher) Punkt der algebraischen Raumkurve n . Ordnung, so erniedrigt sich die Ordnung der Projektion von n auf $n-1$ (bei Projektion aus einem Doppelpunkt O von n auf $n-2$).

Bemerkung 2: Es ist möglich, daß alle aus dem (eigentlichen oder uneigentlichen) Projektionszentrum O an die algebraische Raumkurve k_n gelegten Projektionsstrahlen *Bisekanten* der Kurve k_n sind, d. h. die Kurve k_n jeweils in zwei Punkten P_1 und P_2 treffen. Deren Projektionen auf die Bildebene π fallen dann in denselben Punkt $P'_1 = P'_2 = P'$ zusammen. Die Projektion k' von k_n auf π ist in diesem Falle eine *doppeltüberdeckte ebene algebraische Kurve*, deren Ordnung (falls O kein Punkt von k_n ist) daher bloß $n/2$ ist; die Kurvenordnung n muß in diesem Falle also eine gerade Zahl sein.

Beispiel 5: Wie die algebraische Geometrie lehrt, kann man durch die algebraische Schnittkurve k_4 vierter Ordnung zweier allgemeiner algebraischer Flächen 2. Ordnung vier Kegel legen; drei davon können Zylinder 2. Ordnung (mit elliptischem, hyperbolischem oder parabolischem Querschnitt) sein. Die Mantellinien dieser Kegel (Zylinder) sind dann *Bisekanten* der Raumkurve k_4 . Projiziert man die Raumkurve k_4 aus einem dieser vier Kegelscheitel (Zylinderscheitel) auf eine beliebige Bildebene π , so erhält man einen *doppeltüberdeckten Kegelschnitt*.

XII

Drehflächen

55. Die Drehflächen zweiter Ordnung

Aus 54. wissen wir, daß jede *reelle algebraische Drehfläche 2. Ordnung* dadurch entsteht, daß man einen reellen Kegelschnitt um eine seiner Symmetrieachsen (Hauptachsen) rotieren läßt.

Eine beliebige reelle Gerade g schneidet eine solche reelle algebraische Drehfläche zweiter Ordnung in zwei (reellen oder konjugiert-komplexen, eigentlichen oder uneigentlichen, einfachen oder zusammenfallenden) Punkten. Jede reelle Ebene ε schneidet sie in einem reellen Kegelschnitt, insbesondere jede achsennormale Ebene in einem Kreis (*Parallelkreis*).

Jede *Berührebene* schneidet die Drehfläche in einem *in zwei Geraden* e_1, e_2 zerfallenden Kegelschnitt, die sich im Berührungspunkt P von ε kreuzen.

Daraus folgt

Satz 1: *Jede reelle algebraische Drehfläche 2. Ordnung trägt zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden, die entweder 1. reell getrennt oder 2. reell zusammenfallend oder 3. konjugiert-komplex sind.*

Zu diesen algebraischen Drehflächen zweiter Ordnung zählen die folgenden bereits behandelten Flächen:

1. Der Drehzylinder. Er wird erzeugt durch Drehung einer zur Drehachse parallelen Geraden.
2. Der Drehkegel. Er wird erzeugt durch Drehung einer Geraden, welche die Drehachse schneidet.
3. Die Kugel. Sie wird erzeugt durch Drehung eines Kreises um einen Durchmesser als Achse.

Alle übrigen algebraischen Drehflächen zweiter Ordnung entstehen, wie in 54. bewiesen, dadurch, daß ein nicht zerfallender Kegelschnitt um eine seiner Hauptachsen gedreht wird.

4. Das eiförmige (oder verlängerte) Drehellipsoid entsteht bei Rotation einer Ellipse um ihre große Achse (Fig. 157).

5. Das linsenförmige (oder abgeplattete) Drehellipsoid entsteht bei Rotation einer Ellipse um ihre kleine Achse (Fig. 158).

Jeder ebene Schnitt eines Drehellipsoids ist ein Kegelschnitt ohne reelle Fernpunkte, d. h. im allgemeinen eine Ellipse, im Sonderfall, wenn die Schnittebene zur Drehachse normal ist, ein Kreis. Parallele Ebenen schneiden ein Drehellipsoid nach ähnlichen Ellipsen.

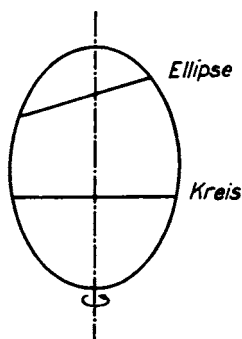


Fig. 157.

Verlängertes (elförmiges) Drehellipsoid

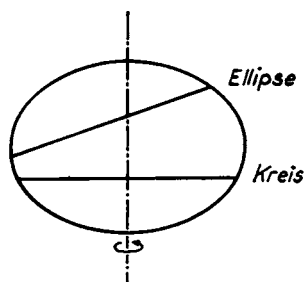


Fig. 158.

Abgeplattetes (linsenförmiges) Drehellipsoid

6. Das zweischalige Drehhyperboloid entsteht bei Rotation einer Hyperbel um ihre, die reellen Scheitel verbindende *Hauptachse* (Fig. 159).

Die Asymptoten der Meridianhyperbel beschreiben dabei einen Drehkegel, der die Fläche in ihren Fernpunkten von außen berührt, den *Asymptotenkegel*.

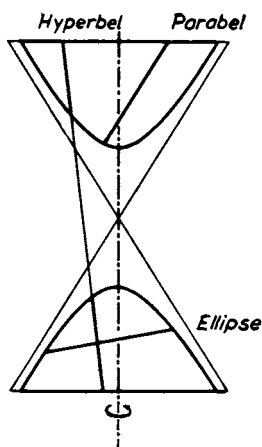


Fig. 159. Zweischaliges Drehhyperboloid

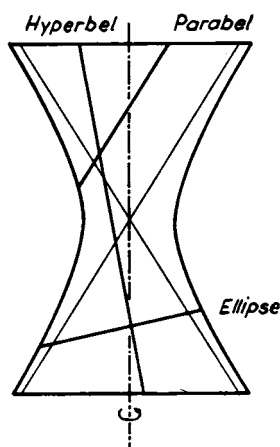


Fig. 160. Einschaliges Drehhyperboloid

ptotenkegel des zweischaligen Drehhyperboloids. Der ebene Schnitt der Drehfläche ist dabei ein Kegelschnitt vom gleichen Typ wie jener Kegelschnitt, den die Schnittebene aus dem Asymptotenkegel ausschneidet. Das heißt,

er ist eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel, je nachdem die Parallelebene durch die Spitze des Asymptotenkegels (= Mittelpunkt der Fläche) den Kegel, reell gesehen, in einem Punkt oder in zwei verschiedenen Geraden schneidet oder ihn längs einer Erzeugenden berührt.

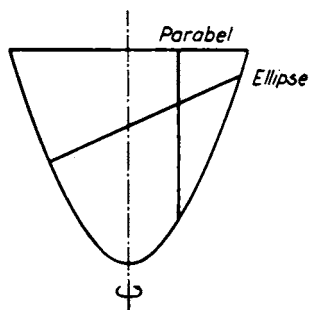


Fig. 161. Drehparaboloid

7. Das einschalige Drehhyperboloid entsteht bei Rotation einer Hyperbel um ihre Nebenachse (Fig. 160).

Der von den Asymptoten der Meridianhyperbel erzeugte *Asymptotenkegel* der Fläche ist ein Drehkegel und berührt das einschalige Drehhyperboloid im Unendlichen von innen. Über den Typ des Kegelschnitts, den eine Ebene aus der Fläche ausschneidet, entscheidet genau wie beim zweischaligen Drehhyperboloid die Parallelebene durch die Spitze des

Asymptotenkegels. Das einschalige Drehhyperboloid trägt daher ebenfalls Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Weitere Eigenschaften dieser Fläche werden in 56. behandelt.

8. Das Drehparaboloid entsteht bei Rotation einer Parabel um ihre Achse (Fig. 161). Jeder ebene Schnitt schräg zur Achse liefert einen Kegelschnitt ohne reelle Fernpunkte, d. h. eine Ellipse (oder einen Kreis), ein zur Achse paralleler Schnitt einen Kegelschnitt mit genau einem Fernpunkt, d. h. eine Parabel. Alle Parabelschnitte sind sogar untereinander kongruent. Das Drehparaboloid entsteht daher auch durch Schiebung zweier kongruenter, gleichgestellter Parabeln in normalen Ebenen aneinander; es ist ein Beispiel einer Schiebfläche.

56. Das einschalige Drehhyperboloid

Gegeben sei in der Aufrißebene π_2 eine *Hyperbel* durch ihren Mittelpunkt O und ihre Halbachsen a und b . Ihre Asymptoten sind die Geraden durch O mit der Steigung $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$, ihre Brennpunkte F_1, F_2 haben von O die Entfernung $e = \sqrt{a^2 + b^2}$. Mit Hilfe der Brennpunkte lassen sich beliebige Hyperbelpunkte konstruieren, wobei die Kurve in der Gegend der Scheitel durch die Scheitelschmiegekreise (Mittelpunkte M_1, M_2) angenähert werden kann (Fig. 162).

Bei Rotation um ihre Nebenachse erzeugen die Hyperbel ein *einschaliges Drehhyperboloid*, ihre Asymptoten den zugehörigen *Asymptotenkegel*. Jeder Hyperbelpunkt beschreibt dabei einen zur Drehachse normalen

Die *Tangentenebene* in einem beliebigen Punkt des Drehhyperboloids wird aufgespannt von der Tangente an die Meridianhyperbel und der Tangente an den Parallelkreis des betreffenden Flächenpunktes.

Insbesondere ist die Tangentenebene ε im vordersten Punkt E des Kehlkreises k zur Aufrißebene parallel, so daß ihr Grundriß ε' die Tangente im Punkte E' an den Grundriß k' des Kehlkreises k ist (Fig. 158). Diese Tangentenebene ε soll nun mit der Fläche geschnitten werden.

Führen wir ein räumliches cartesisches Koordinatensystem $O(x, y, z)$ ein, dessen Nullpunkt O im Mittelpunkt der Hauptmeridianhyperbel (= Mittelpunkt des Drehhyperboloids) liegt und dessen z -Achse mit der Drehachse zusammenfällt, während die x -Achse in der Kehlkreisebene nach vorn, die y -Achse nach rechts gerichtet ist, dann lautet die Gleichung der *Hauptmeridianhyperbel* in der (y, z) -Ebene $x = 0$:

$$(1) \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Bei der Drehung um die z -Achse ist y durch den Polarradius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu ersetzen, so daß

$$(2) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung des einschaligen Drehhyperboloids ist. Die Tangentenebene ε im Punkt $E(a, 0, 0)$ des Kehlkreises hat die Gleichung $x = a$, so daß das Gleichungspaar

$$(3) \quad \begin{cases} x = a \\ \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

oder

$$(4) \quad \begin{cases} x = a \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \end{cases}$$

die Schnittkurve der Tangentenebene ε mit der Fläche darstellt. Da die zweite Gleichung in (4) sich zerlegen läßt in

$$(5) \quad \left(\frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right)\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right) = 0,$$

zerfällt die Schnittkurve zweiter Ordnung in ein Geradenpaar e_1, e_2

$$(6) \quad e_1 \begin{cases} x = a \\ \frac{z}{b} = +\frac{y}{a} \end{cases}, \quad e_2 \begin{cases} x = a \\ \frac{z}{b} = -\frac{y}{a} \end{cases},$$

d. h. es gilt

Satz 1: Die Tangentenebene ε im Punkte E des Kehlkreises k schneidet das einschalige Drehhyperboloid in zwei Geraden (Erzeugenden) e_1, e_2 , die sich im Berührungspunkt E schneiden.

Die Aufrisse e_1'', e_2'' dieser beiden Geraden decken sich mit den Asymptoten der Hauptmeridianhyperbel h .

Die Erzeugenden e_1, e_2 , haben gegen die Grundrißebene die feste Neigung $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$.

Dreht man die Tangentenebene ε samt den erzeugenden Geraden e_1 und e_2 um die Drehachse z des einschaligen Drehhyperboloids, dann bleibt diese Ebene stets Tangentenebene in einem Kehlkreisepunkt dieser Fläche, und die mitgedrehten Geraden e_1 und e_2 verbleiben stets auf der Fläche. Man kann daher das einschalige Drehhyperboloid auch dadurch erzeugen, daß man die Gerade e_1 oder die Gerade e_2 um die z -Achse rotieren läßt. Damit gilt der von CHRISTOPHER WREN (1632–1723), dem Erbauer der St. Paul's Kathedrale in London, entdeckte

Satz von Wren (1669): Eine Gerade e , die um eine feste, zu e windschiefe Achse z rotiert, erzeugt ein einschaliges Drehhyperboloid.

Auf dem einschaligen Drehhyperboloid liegen somit zwei Scharen von Geraden. Da die Fläche durch Bewegung einer Geraden der einen oder der anderen Schar erzeugt werden kann, nennt man diese Geraden die *Erzeugenden* der Fläche. Durch jeden Punkt P der Fläche gehen genau eine Erzeugende e_1 der einen Schar und eine Erzeugende e_2 der anderen Schar, nämlich jene Geraden, welche die Tangentenebene τ dieses Flächenpunktes P aus der Fläche ausschneidet. Da zwei derselben Erzeugendenschar angehörende Geraden durch Drehung um die (zu ihnen windschiefe) z -Achse auseinander hervorgehen, können sie sich nicht schneiden und auch nicht zueinander parallel sein. Durch Spiegelung an einer Meridianebene oder an der Kehlkreisebene geht jede Erzeugende e_1 der ersten Schar in eine Erzeugende e_2 der zweiten Schar über (und umgekehrt). Also gilt

Satz 2: Das einschalige Drehhyperboloid trägt zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden. Je zwei Erzeugende derselben Schar sind zueinander windschief, während jede Erzeugende der einen Schar jede Erzeugende der anderen Schar in einem Punkt der Fläche trifft.

Ein anschauliches Bild des einschaligen Drehhyperboloids und seiner beiden Erzeugendenscharen zeigt die Fig. 163, welche einen Schrägriß der Fläche darstellt. Drehachse ist wieder die z -Achse, die (x, y) -Ebene enthält den Kehlkreis der Fläche.

Man nennt jede *Fläche*, die durch *stetige Bewegung einer Geraden e* (bei der e nicht bloß in sich selbst verschoben wird) erzeugt werden kann, die also (wenigstens) eine stetige Schar von Geraden enthält, eine *Regelfläche*. Einfache Beispiele von Regelflächen sind der Kreiskegel und der Kreiszylinder; bei ihnen schneiden sich alle Erzeugenden in einem eigentlichen bzw. uneigentlichen Punkte. Diese beiden Flächen können daher in die Ebene abgewickelt werden und sind Beispiele abwickelbarer Regelflächen. Im Gegensatz dazu ist jedoch *das einschalige Drehhyperboloid eine windschiefe oder nicht abwickelbare Regelfläche*, da bei ihm zwei benachbarte Erzeugenden zueinander windschief sind.

Wandert man beim Zylinder oder beim Kegel eine Erzeugenden e entlang, dann bleibt dabei die Tangentenebene τ längs der ganzen Erzeugen-

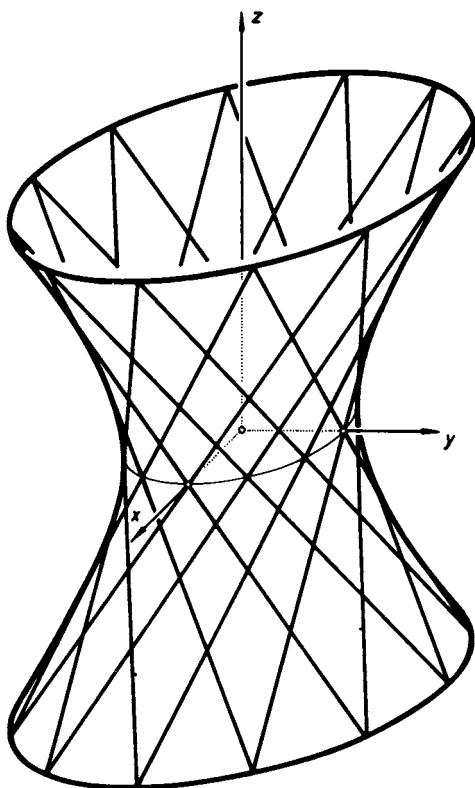


Fig. 163. Schrägriß eines einschaligen Drehhyperboloids, seines Kehlkreises und seiner beiden Scharen von Erzeugenden.

den ungeändert. Anders beim einschaligen Hyperboloid. In den einzelnen Punkten einer festen Erzeugenden, z. B. der ersten Schar, werden die Tangentenebenen τ von dieser (festen) Erzeugenden e_1 und den (veränderlichen) Erzeugenden e_2 der zweiten Schar aufgespannt. Da diese aber zueinander windschief sind, sind die Tangentenebenen τ längs einer festen Erzeugenden alle voneinander verschieden. *Die Tangentenebene τ des einschaligen Drehhyperboloids dreht sich also um die feste Erzeugende, wenn man dieser entlang geht.* Aus diesem Grunde ist das einschalige Hyperboloid (im Gegensatz zum Kegel und Zylinder) *nicht in die Ebene abwickelbar.*

Jede durch eine Erzeugende g_1 des Drehhyperboloids gelegte Ebene τ ist eine Tangentenebene der Fläche und berührt sie in einem Punkte von g_1 . Insbesondere berührt die durch g_1 gelegte erstprojizierende Ebene τ_1 das Drehhyperboloid in einem Punkte G des *Kehlkreises* k , der somit den *ersten wahren Umriß* des Drehhyperboloids darstellt. Ähnlich berührt die durch g_1 gelegte zweitprojizierende Ebene τ_2 die Fläche in einem Punkte T ihres *zweiten wahren Umrisses*, der von der Ebene $x = 0$ ausgeschnittenen *Hauptmeridianhyperbel* h . *Jede Erzeugende g der Fläche berührt daher mit ihrem Grundriß g' den Grundriß k' des Kehlkreises k und mit ihrem Aufriß g'' den Aufriß h'' der Hauptmeridianhyperbel h .*

Die Erzeugenden \bar{e}_1, \bar{e}_2 in dem hintersten Punkt \bar{E} des Kehlkreises k fallen (unter Vertauschung der Rollen) im Aufriß gleichfalls mit den Asymptoten der Meridianhyperbel h zusammen (Fig. 162). Die zur ersten Schar gehörige Erzeugende g_1 , die durch den Punkt G des Kehlkreises k geht, erscheint im Grundriß als Tangente g'_1 in G' an den Grundriß k' des Kehlkreises k . Ihr Aufriß g''_1 ist die Verbindungsgerade der Aufrisse U'' und \bar{U}'' jener Flächenpunkte U, \bar{U} , in denen g_1 die Erzeugenden e_2 bzw. \bar{e}_2 der zweiten Schar trifft. Deren Grundrisse $U' = [g'_1, e'_2]$ und $\bar{U}' = [g'_1, \bar{e}'_2]$ sind unmittelbar zu ersehen, ihre Aufrisse $U'' = [g''_1, e''_2]$ und $\bar{U}'' = [g''_1, \bar{e}''_2]$ liegen auf den Asymptoten der Meridianhyperbel $h = h''$. Die Erzeugende g_1 berührt mit ihrem Aufriß g''_1 die Meridianhyperbel $h = h''$ in einem Punkt T'' , dessen Grundriß T' auf $y' = h'$ liegt. Dieser Punkt T liegt im Grundriß wie auch im Raum und damit auch im Aufriß in der Mitte zwischen den Punkten U und \bar{U} . Damit ist die folgende planimetrische Eigenschaft der Hyperbel bewiesen (Fig. 164):

Satz 3: *Der Berührungspunkt P einer Hyperbeltangente t ist die Mitte der von den Asymptoten e_1, e_2 auf der Tangente t ausgeschnittenen Strecke U_1U_2 .*

Eine beliebige Normalebene σ zur Achse des Drehhyperboloids schneidet die Erzeugenden e_1 und e_2 in zwei Punkten P_1 und P_2 (Fig. 162). Ihre Aufrisse P'_1 und P'_2 liegen auf den Asymptoten e'_1 bzw. e'_2 der Umrißhyperbel h'' , ihre Grundrisse P'_1 , P'_2 auf den Ordnern und auf $e'_1 = e'_2$, d. h. auf der Horizontalen, die von O' den Abstand a hat. Die Ebene σ schneidet das Hyperboloid in einem horizontalen Kreis (Parallelkreis), dessen Grundriß ein Kreis um O' durch P'_1 und P'_2 ist, und die Meridianhyperbel h in zwei Punkten P und Q . Der Grundriß P' bzw. Q' dieser beiden Punkte ist der äußerste rechte bzw. linke Punkt jenes Parallelkreises. Sie liefern, in den Aufriß übertragen, die Punkte P'' und Q'' der auf σ'' gelegenen Punkte der Umrißhyperbel h .

Damit ist eine neue Punktkonstruktion der Hyperbel gewonnen (Fig. 165). Sind von einer Hyperbel der Mittelpunkt O , die Asymptoten e_1 und e_2 sowie ein Scheitel A gegeben, wobei $OA = a$ ihre halbe Hauptachse ist, so findet man beliebige weitere Hyperbelpunkte P durch folgende Konstruktion: Man legt an beliebiger Stelle eine Parallele σ zur Hauptachse der Hyperbel, schneidet sie mit der Nebenachse im Punkte M und mit einer Asymptote im Punkte P_1 . In P_1 errichtet man das Lot auf σ und trägt auf ihm die Strecke $P_1P'_1 = a$ an. Dann schneidet der Kreis um M durch P'_1 auf σ die Hyperbelpunkte P und \bar{P} aus.

Sind von der Hyperbel der Mittelpunkt O , die Asymptoten e_1 und e_2 sowie ein Punkt P gegeben, dann kann man umgekehrt nach dieser Konstruktion auch ihre halbe Hauptachse a und ihren Scheitel A finden.

In der Technik spielt das einschalige Drehhyperboloid eine Rolle bei der Aufgabe, eine *gleichförmige Drehbewegung um eine Achse in eine gleichförmige Drehbewegung um eine zweite Achse zu verwandeln*. Sind die beiden

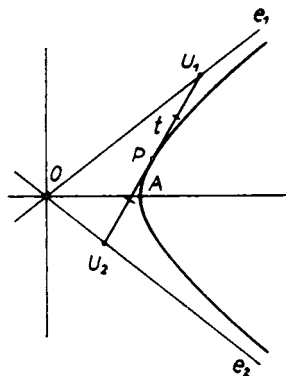


Fig. 164. Der Berührungspunkt P einer Hyperbeltangente t halft den Tangentenabschnitt $U_1 U_2$ zwischen den beiden Hyperbelasymptoten e_1, e_2 .

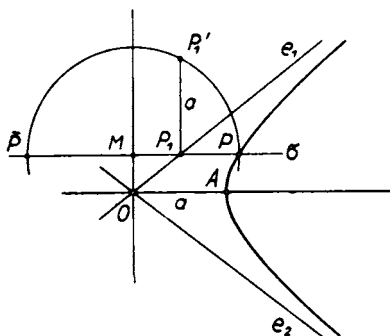


Fig. 165. Konstruktion der reellen Halb-achse a einer Hyperbel aus ihren beiden Asymptoten e_1, e_2 und einem Hyperbelpunkt P .

Achsen parallel, so lösen zwei sich berührende Drehzylinder (*zylindrische Reibräder*, *Zylinderräder*) die Aufgabe. *Schneiden sich die Achsen* (bzw. ihre Verlängerungen), dann sind zwei sich berührende Drehkegel (*Kegelläder*) zu verwenden. Sind die *Achsen* jedoch *windschief*, so erfolgt die Übertragung der Drehbewegung durch zwei *Hyperboloidräder*, d. h. durch zwei einschalige Drehhyperboloide, die sich in jedem Augenblick längs einer Erzeugenden berühren. Die Gleichförmigkeit der Drehbewegung bleibt dabei erhalten, und durch geeignete Wahl der Kehlkreisradien der beiden Hyperboloide kann jedes gewünschte Übersetzungsverhältnis erzielt werden. Während jedoch bei der Übertragung der Drehbewegung durch Zylinder- oder Kegelläder ein reines *Abwälzen* der einen Fläche auf der anderen erfolgt (längs der gemeinsamen Erzeugenden haben beide Flächen ein- und dieselbe Tangentenebene), handelt es sich bei den Hyperboloidrädern um ein *Schroten* der beiden Drehhyperboloide aufeinander (die Tangentenebene längs der gemeinsamen Erzeugenden ist dabei von Punkt zu Punkt eine andere). Bei dem Schroten der beiden Drehhyperboloide aufeinander fallen in jedem Augenblick die *Kehlpunkte* der gemeinsamen Erzeugenden aufeinander, und wegen der Berührung der beiden Flächen in den Kehlpunkten decken sich auch deren Tangentenebenen und Flächennormalen, die mit dem Gemeinlot der beiden windschiefen Hyperboloidachsen übereinstimmen.

Im Falle der *Zylinder- und Kegelläder* ist die *relative Bewegung* der beiden Drehzylinder und Drehkegel in jedem Augenblick ein bloßes *Abrollen* dieser „Achsenflächen“ aufeinander, *ohne* daß dabei diese Flächen aneinander *gleiten* (d. h. in Richtung der jeweiligen Berührungserzeugenden verschoben werden); man sagt darum, daß die beiden Zylinder bzw. Kegel sich aufeinander *abwälzen* (= ohne Gleiten aufeinander abrollen). *Im Falle der Hyperboloidräder dagegen schroten die beiden Achsenflächen (Drehhyperboloide) in jedem Augenblick aufeinander, d. h. sie rollen und gleiten in jedem Augenblick um bzw. längs der jeweiligen Berührungserzeugenden aneinander.*

57. Die allgemeine Drehfläche

Eine beliebige ebene Kurve m beschreibt bei Rotation um eine in der Kurvenebene gelegene Achse z eine *Drehfläche*. Die erzeugende Kurve m und jede von ihr bei der Rotation um die *Drehachse* z eingenommene Lage heißt ein *Meridian* der Drehfläche, während die Bahnkurve eines beliebigen Punktes P auf m ein *Parallelkreis* p der Drehfläche ist.

Fig. 166 zeigt die Achse z senkrecht zur Grundrißebene und den zur Aufrißebene parallelen beliebigen Meridian m_0 (*Hauptmeridian*) einer Drehfläche φ . Der Hauptmeridian m_0 und der durch eine halbe Umdrehung daraus entstehende Meridian \bar{m}_0 bilden den *wahren Umriß* der Drehfläche

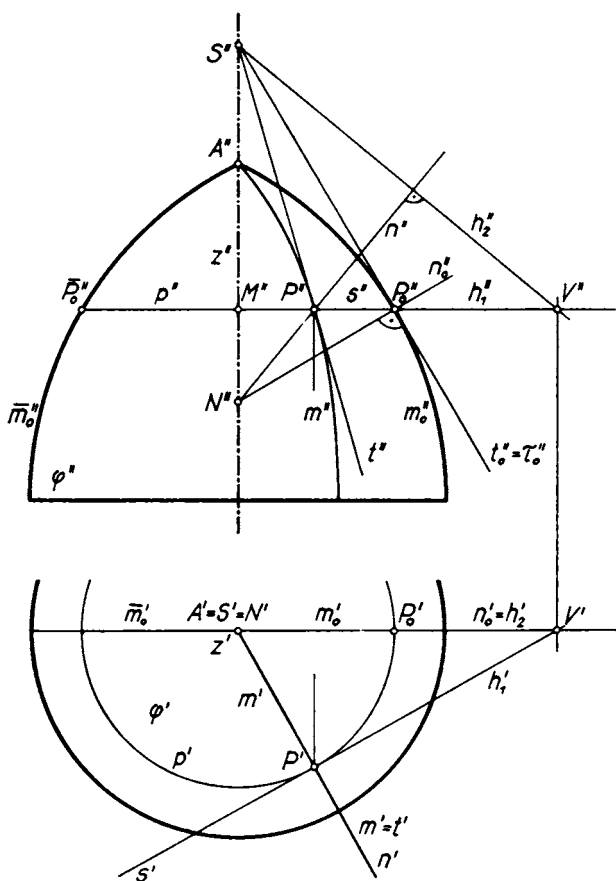


Fig. 166.. Darstellung der allgemeinen Drehfläche mit dem Hauptmeridian m_0 . Konstruktion der Risse P' , P'' eines Flächenpunktes P und seiner Tangentenebene τ an die Drehfläche

bezüglich des Aufrisses, ihre Aufrisse m'_0 und \bar{m}_0'' bilden den *zweiten scheinbaren Umriß* der Drehfläche φ . Trifft der Meridian, wie in Fig. 161 angenommen, die Drehachse z in einem Punkte A , und ist sein Winkel mit der Drehachse in A kein rechter Winkel, so ist dieser Punkt A ein *singulärer Punkt* der Drehfläche, da in ihm keine eindeutige Tangentenebene vorhanden ist. Die Fläche zeigt in A ein ähnliches Verhalten wie ein Kegel in seiner Spitze, weshalb A ein *konischer Knotenpunkt* der Fläche heißt.

Ein Parallelkreis p der Drehfläche erscheint im Grundriß als Kreis p' mit dem Mittelpunkt z' , im Aufriß als doppeltüberdeckte horizontale Strecke $p'' = P_0'' \bar{P}_0''$ zwischen m_0'' und \bar{m}_0'' . Die Meridiane der Drehfläche sind im Grundriß Radien m' der Parallelkreise, im Aufriß Kurven m'' , die zum Aufriß m_0'' des Hauptmeridians m_0 orthogonal affin sind mit z'' als Affinitätsachse.

Ist der Aufriß P'' eines beliebigen Punktes P der Drehfläche gegeben, so liegt sein Grundriß 1. auf dem Ordner durch P'' und 2. auf dem Grundriß p' des zu P gehörigen Parallelkreises p , dessen Radius $M''P_0''$ dem Aufriß zu entnehmen ist. Durch Umkehren des Konstruktionsganges gewinnt man aus dem Grundriß P' den Aufriß P'' des Punktes P der Drehfläche. Zu einem im Grundriß als Radius beliebig gewählten Meridian m' findet man den Aufriß m'' dadurch, daß man eine genügende Anzahl Punkte P des Meridians aus dem Grundriß in den Aufriß nimmt.

Die Meridiantangente t im Punkte P fällt im Grundriß mit dem Meridianbild zusammen ($t' = m'$), da der Meridian m in einer erstprojizierenden Ebene liegt. Um ihren Aufriß t'' zu erhalten, denken wir uns die Drehfläche um die Drehachse gedreht, bis der Meridian m zum Hauptmeridian (Umrißmeridian) m_0 wird. Dabei geht die Tangente t in die Tangente t_0 im gedrehten Berührungspunkt P_0 auf m_0 über, die im Aufriß eingezeichnet werden kann. Alle Meridiantangenten, die die Drehfläche längs desselben Parallelkreises p berühren, sind die Mantellinien eines Drehkegels, des zu dem Parallelkreis p gehörigen Tangentenkegels der Drehfläche. Seine auf der Drehachse z liegende Spitze S ist als Schnittpunkt von t_0 mit z bestimmt, und durch sie geht auch die Meridiantangente t des Punktes P . Daraus ergibt sich ihr Aufriß t'' als Verbindungsgerade von P'' mit S'' .

Die Parallelkreistangente s der Drehfläche im Punkte P fällt im Aufriß mit dem Aufriß p'' des Parallelkreises p von P zusammen ($s'' = p''$). Ihr Grundriß s' ist die Tangente an p' im Punkte P' .

Die Tangentenebene τ der Drehfläche im Punkte P wird aufgespannt von zwei beliebigen Flächentangenten in P , z. B. von der Meridiantangente t und der Parallelkreistangente s . Ihre Spur h_1 auf der Ebene des Parallelkreises p von P ist mit der Tangente s an den Parallelkreis p identisch, so daß $h_1' = s'$ und $h_1'' = s''$ ist. Ihre Spur h_2 in der durch die Drehachse z gelegten Parallelebene zur Aufrißebene (Hauptmeridianebene) deckt sich im Grundriß mit m_0' . Der Aufriß h_2'' dieser Spur h_2 geht durch den Aufriß S'' der Spitze S des Tangentenkegels längs p und durch den Aufriß V'' des Spurpunktes V der Parallelkreistangente s auf der Ebene

des Hauptmeridians m_0 . Durch die beiden Hauptlinien h_1 und h_2 ist aber die Tangentenebene τ der Drehfläche in P festgelegt.

Die Normale n der Drehfläche im Punkte P ist das Lot auf die Tangentenebene τ im Punkte P . Aus Symmetriegründen ist die Flächennormale n zugleich die Normale der Meridiankurve m in P und schneidet daher die Drehachse z in einem Punkte N . Ihr Grundriß n' steht auf dem Grundriß h'_1 der ersten Hauptlinie h_1 , ihr Aufriß n'' auf dem Aufriß h''_2 der zweiten Hauptlinie h_2 der Tangentenebene senkrecht. Beide lassen sich auch unmittelbar ohne Benutzung der Hauptlinie konstruieren. Der Grundriß n' der Normalen fällt mit dem Radius $[S'P']$ zusammen. Um ihren Aufriß n'' zu finden, dreht man die Fläche um ihre Achse, bis der Flächenpunkt P auf den Punkt P_0 des Hauptmeridians m_0 fällt. Da in dieser Lage die Tangentenebene τ_0 zweitprojizierend ist, ist die mitgedrehte Flächennormale n_0 zur Aufrißebene parallel, so daß ihr Aufriß n''_0 das Lot auf $\tau''_0 = t''_0$ im Punkte P''_0 ist. Bei der Drehung beschreibt die Flächennormale n einen Drehkegel um die z -Achse, den zu dem Parallelkreis p gehörigen Normalenkegel, dessen Spitze N von der gedrehten Normalen n_0 aus der Drehachse z ausgeschnitten wird. Die Erzeugende $[NP]$ des Normalenkegels ist die Normale n des Flächenpunktes P , und $[N''P''] = n''$ ist ihr Aufriß.

XIII

Ebene Schnitte von Drehflächen

58. Der achsenparallele Schnitt einer Drehfläche

Eine *Drehfläche* (Achse z senkrecht zu π_1 , Hauptmeridian m_0) werde von einer zur Drehachse parallelen, also von einer *erstprojizierenden Ebene* ε geschnitten, die gegen die Aufrißebene geneigt sei. In Fig. 167 wurde als

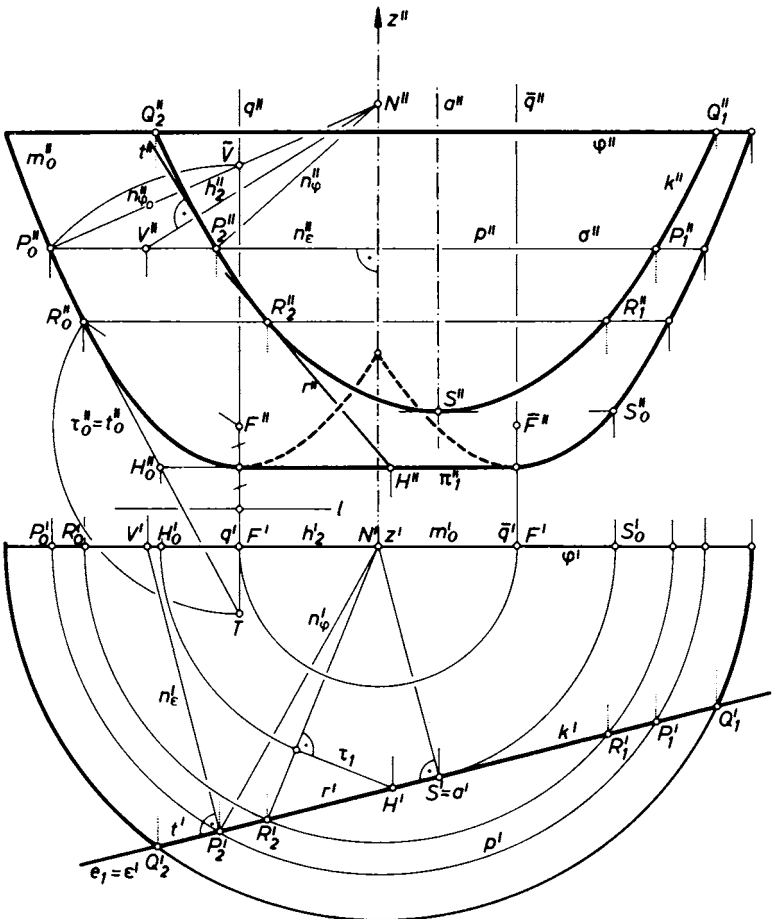


Fig. 167. Schnitt einer Drehfläche (Hauptmeridian m_0 = Parabel) mit einer vertikalen Ebene ε

Meridian der Drehfläche eine *Parabel* m_0 angenommen, deren Achse nicht mit der Drehachse zusammenfällt (Brennpunkt F , Leitgerade l). Die Drehfläche ist dann nach (54. Satz 5) eine *algebraische Fläche 4. Ordnung*. Jeder *ebene Schnitt* k und damit auch sein *Aufriß* k'' ist daher eine *ebene algebraische Kurve 4. Ordnung*.

Zur *Punktkonstruktion des Aufrisses* k'' der *Schnittkurve* k (der Grundriß k' deckt sich mit ε') legt man *achsennormale*, also *horizontale Hilfsebenen* σ . Jede derartige Ebene schneidet die Drehfläche in einem oder mehreren *Parallelkreisen* p und die *Schnittebene* ε in einer ersten *Hauptlinie*. Beide Kurven fallen im *Aufriß* auf σ'' . Im Grundriß dagegen erscheint der *Parallelkreis* als *Kreis* p' um z' , wobei der *Radius* dem *Aufriß* zu entnehmen ist, während die erste *Hauptlinie* der Ebene ε sich mit $\varepsilon' = e_1$ deckt. Die *Schnittpunkte* P'_1 und P'_2 von p' und ε' sind daher *Punkte des Grundrisses* k' der *Schnittkurve* k . Sie legen auf σ'' die zugehörigen *Punkte* P''_1 und P''_2 der *Aufrißkurve* k'' fest. Bei *schleifenden Schnitten* von p' und ε' kehrt man den *Konstruktionsgang* um, d. h. man wählt z. B. den *Punkt* R'_1 auf ε' beliebig, schlägt um z' den *Kreis* durch R'_1 und überträgt den *Punkt* R'_0 , in dem dieser *Kreis* den *Grundriß* m'_0 des *Hauptmeridians* m_0 schneidet, in den *Aufriß* auf m''_0 nach R''_0 . Dadurch ist die *achsennormale Hilfsebene* festgelegt, auf der der *Punkt* R'_1 der *Aufrißkurve* k'' liegt. Insbesondere liefert jener *Kreis* um z' , der ε' ge-

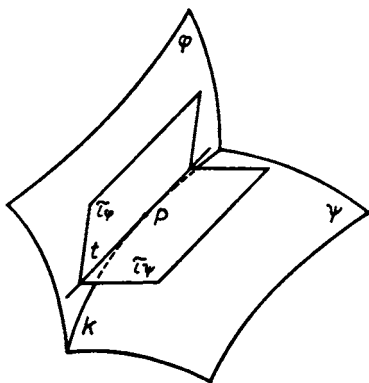


Fig. 168. Konstruktion der Tangente t an die Schnittkurve k zweier Flächen φ, ψ im Schnittpunkt P als Schnittgerade der Tangentenebenen τ_φ und τ_ψ von φ und ψ in P
(Methode der Tangentenebenen)

rade (in S') berührt, den *Grundriß* des tiefsten Punktes S der *Schnittkurve* k , dessen *Aufriß* S'' , auf dem Wege über die Punkte S'_0 und S''_0 konstruiert, der tiefste Punkt von k'' ist. In S'' hat k'' eine *horizontale Tangente*. Die *vertikale Gerade* a durch S ist *Symmetrieachse* von k , da jeweils zwei in gleicher Höhe liegende Punkte von k , wie P_1 und P_2 , von dieser Geraden a gleichweit entfernt liegen. Der *Punkt* S'' ist daher ein *Scheitel* der *Aufrißkurve* k'' , und $a'' \parallel z''$ ist *Symmetrieachse* von k'' .

Der *Tangentenkonstruktion* in einem beliebigen Punkt der *Schnittkurve* stellen wir die folgenden allgemeinen Überlegungen voran.

1. Es sei k die Durchdringungskurve der beiden Flächen φ und ψ und der Punkt P auf k sei für beide Flächen ein regulärer Punkt, d. h. ein Punkt mit eindeutig bestimmter Tangentenebene (Fig. 168). Dann ist die *Tangente* t im Punkte P an die Schnittkurve k die *Schnittgerade der Tangentenebenen* τ_φ und τ_ψ der beiden Flächen im Berührungspunkt P , d. h. $t = [\tau_\varphi, \tau_\psi]$. Sofern die Tangentenebenen τ_φ und τ_ψ verschieden sind, d. h. die Flächen φ und ψ sich im Punkte P nicht berühren, ist die Tangente t somit eindeutig bestimmt. Dieses Verfahren zur Tangentenkonstruktion der Durchdringungskurve heißt die **Methode der Tangentenebenen**.

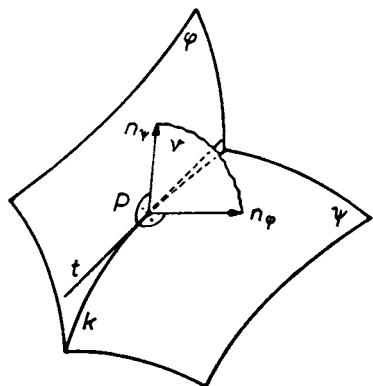


Fig. 169. Konstruktion der Tangente t an die Schnittkurve k zweier Flächen φ, ψ im Schnittpunkt P als Normale auf die Verbindungsebene v der beiden Flächennormalen n_φ und n_ψ von φ und ψ in P (Normalenmethode)

2. Ein zweites Verfahren bedient sich der *Flächennormalen* (Fig. 169). Es seien n_φ die Flächennormale der Fläche φ und n_ψ die Flächennormale der Fläche ψ im Punkte P der Schnittkurve k , d. h. jene Geraden durch P , die auf der Tangentenebene τ_φ bzw. auf der Tangentenebene τ_ψ senkrecht stehen: $n_\varphi \perp \tau_\varphi$, $n_\psi \perp \tau_\psi$. Wenn die Tangentenebenen τ_φ und τ_ψ verschieden sind, d. h. wenn sich die Flächen φ und ψ im Punkte P nicht berühren, sind auch die *Normalen* n_φ und n_ψ verschiedene Geraden durch P und *spannen* eine Ebene, die *Normalebene* $v = [n_\varphi, n_\psi]$ im Punkte P auf. Da die gesuchte Tangente t an die Schnittkurve k sowohl der Tangentenebene τ_φ als auch der

Tangentenebene τ_ψ angehört, *steht die Tangente* t der Schnittkurve k in P zugleich auf n_φ und auf n_ψ , d. h. *auf der Normalebene* v *senkrecht*: $t \perp v$. Dieses Verfahren zur Tangentenkonstruktion heißt **Normalenmethode**.

Während die Methode der Tangentenebenen stets anwendbar ist, ist die Normalenmethode als das bequemere Verfahren dann empfehlenswert, wenn die Flächennormalen leicht konstruierbar sind. Dies trifft vor allem bei Drehflächen zu.

In Fig. 167 ist im Punkte P_2'' die Tangente t'' an die Aufrißkurve k'' nach der Normalenmethode konstruiert. Die Normale n_e auf die erstprojizierende Schnittebene ε steht auf dieser Ebene senkrecht und ist folglich zur Grundrißebene parallel. Ihr Aufriß n_e'' ist also horizontal, ihr Grundriß n_e' zu ε' senkrecht. Die Normale n_φ auf die Drehfläche φ ist die durch P_2 gehende Erzeugende des Normalenkegels. Seine Spitze N deckt sich im Grund-

riß mit z' . Der Aufriß N'' der Normalenkegelspitze N auf z'' wird dadurch bestimmt, daß man den Punkt P_2 auf den Umrißmeridian m_0 in die Lage P_0 dreht; dabei rückt P_2'' nach P_0'' , und die mitgedrehte Normale $n_{\varphi 0}'' \perp m_0''$ schneidet z'' in N'' . Es ist dann $n_{\varphi}' = [N'P_2']$, $n_{\varphi}'' = [N''P_2'']$. Die beiden Normalen n_s und n_{φ} spannen die Normalebene ν auf, auf der die Tangente t von k senkrecht steht. Der Aufriß t'' der Tangente im Punkte P_2'' an die Aufrißkurve steht daher auf dem Aufriß h_2'' einer beliebigen zweiten Hauptlinie h_2 der Normalebene ν senkrecht. Eine beliebige Parallele zur Rißachse im Grundriß (z. B. durch N') kann als Grundriß h_2' einer zweiten Hauptlinie h_2 der Normalebene ν aufgefaßt werden. Sie schneidet n_s' und n_{φ}' in zwei Punkten V' bzw. N' , deren Aufrisse V'' auf n_s'' und N'' auf n_{φ}'' den Aufriß $h_2'' = [V''N'']$ dieser zweiten Hauptlinie h_2 festlegen. Auf dieser Geraden h_2'' steht t'' senkrecht.

Schließlich ist in Fig. 167 noch im Punkte R_2'' an k'' die Tangente r nach der Methode der Tangentenebenen konstruiert. Weil ε selbst eine Ebene ist, muß man nur die Spur der Tangentenebene der Drehfläche im Punkte R_2 auf der Ebene ε zeichnen. Dazu wurde die Ebene des tiefsten Parallelkreises der Fläche als Grundrißebene π_1 gewählt und der Punkt R_2 um die Drehachse z in den Hauptmeridian m_0 nach R_0 gedreht. Die Meridiantangente t_0'' in R_0'' deckt sich dann mit der zweiten Spur und dem Aufriß τ_0'' der Tangentenebene τ_0 in R_0 ($\tau_0'' = t_0''$). Deren durch H_0' gehende lotrechte erste Spur geht bei der Rückdrehung von R_0 nach R_2 in die erste Spur τ_1 der Tangentenebene τ des Punktes R_2 über. Die Spur τ_1 schneidet bereits in dem Horizontalspurpunkt H' der gesuchten Tangente r an k in R_2 , deren Aufriß r'' dann die Gerade $[R_2'', H'']$ ist.

59. Der schiefe Schnitt einer Drehfläche

Als Drehfläche werde eine Ringfläche (ein Torus) gewählt. Ihre Meridiankurve (*Hauptmeridian* m_0) ist ein *Kreis*, dessen Mittelpunkt M_0 nicht auf der Drehachse liegt. Der Kreis m_0 liegt in der Hauptmeridianebene π_2 . Ist die Drehachse z zur Grundrißebene senkrecht, so besteht der scheinbare Umriß des Torus im Aufriß aus den beiden (symmetrisch zu z'' gelegenen) Meridiankreisen, und den beiden zur Rißachse parallelen Tangenten an diese Kreise (Fig. 170). Der Kreis, der die Mittelpunkte aller Meridiankreise trägt, heißt *Mitttenkreis* des Torus. Er hat z als Achse und liegt zusammen mit dem *Kehlkreis* (= kleinster Parallelkreis) und dem *Wulstkreis* (= größter Parallelkreis) in der *Mittenebene* μ (*Äquatorebene*) des

Torus. Der *höchste* und der *tiefste* *Parallelkreis*, die beide zum *Mittlenkreis* kongruent sind und sich im Grundriß mit ihm decken, trennen die *Kehle* (= innerer Teil) von dem *Wulst* (= äußerer Teil) der Ringfläche.

Die Ringfläche entsteht auch durch *Drehung einer Kugel* um die Ringachse z , wobei der Kugelmittelpunkt den Mittlenkreis des Torus beschreibt.

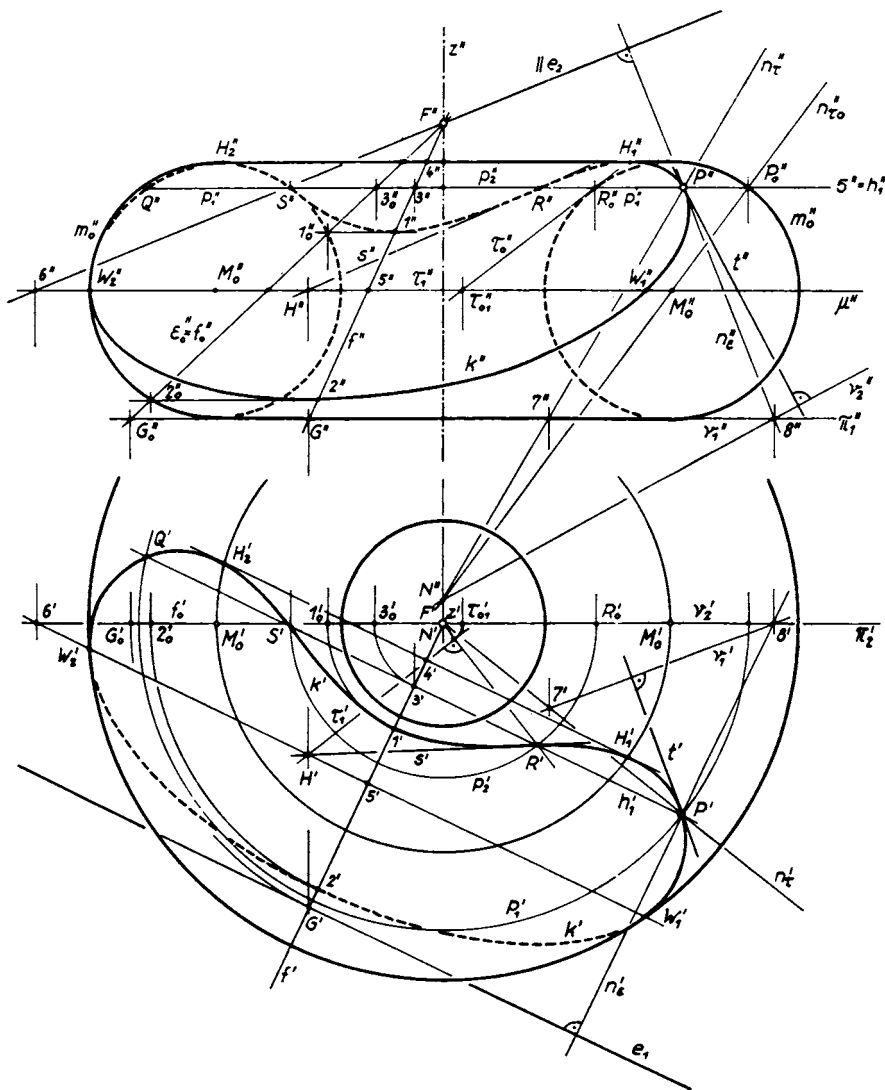


Fig. 170. Schiefer ebener Schnitt k einer Ringfläche (Torus) samt Tangenten t und s an die Schnittkurve k in den Punkten P (Normalenmethode) und R (Methode der Tangentenebenen)

Die *Ringfläche* ist dabei die *Hüllfläche* dieser *Kugelschar*. Jede Kugel dieser Drehschar berührt die Ringfläche längs eines Meridiankreises.

Der *Torus* soll nun mit einer gegen die *z*-Achse geneigten Ebene ε geschnitten werden. Die Schnittebene ε legen wir fest durch ihre Spurgerade e_1 auf der Grundrißebene π_1 (= Ebene des tiefsten Parallelkreises) und ihren Schnittpunkt F mit der *z*-Achse (Fig. 170).

Der *Torus* ist nach (54. Beisp. 3) eine *algebraische Fläche 4. Ordnung*, da er durch Rotation einer Kurve 2. Ordnung entsteht. Daher sind der *ebene Schnitt* k und seine beiden Risse k' und k'' *ebene algebraische Kurven 4. Ordnung*. Die Schnittkurve k ist bezüglich jener erstprojizierenden Ebene, die durch die Drehachse z geht und auf der Schnittebene ε senkrecht steht, d. h. bezüglich der durch F gehenden Fallinie f der Ebene ε , symmetrisch. Daher zeigt ihr Grundriß k' gerade Symmetrie bezüglich des Grundrisses f' dieser Fallinie. Der Aufriß k'' ist bezüglich f'' schief symmetrisch (mit horizontalen Symmetriestrahlen).

Zur *Konstruktion der Schnittkurve* k in den beiden Rissen kann man einen Seitenriß einführen, in dem ε projizierend wird. Zeichnerisch ist es jedoch bequemer, den *Torus* samt Schnittebene ε um die *z*-Achse zu drehen, bis die gedrehte Schnittebene ε_0 zur Aufrißebene senkrecht steht. Bei dieser Drehung gelangt die durch den Punkt F gehende erste Fallinie f der Ebene ε (ihr Grundriß $f' = [F'G']$ steht auf e_1 senkrecht, ihr Aufriß $f'' = [F''G'']$ wird über den Grund- und Aufriß des Horizontalspurpunktes G von f gewonnen) in die Lage $f_0 = [FG_0]$, die zunächst im Grundriß $f'_0 = [F'G'_0]$ und damit auch im Aufriß $f''_0 = [F''G''_0]$ bestimmt ist.

In der gedrehten Lage sind die Punkte 1 und 2, in denen die Fallinie f den *Torus* trifft, als Schnittpunkte 1_0 und 2_0 zwischen f_0 und dem Hauptmeridian m_0 im Aufriß unmittelbar zu ersehen. Beim Zurückdrehen wandern sie auf horizontalen Kreisen nach den Punkten 1 und 2 auf f . Wegen der Symmetrie der Schnittkurve k bezüglich der Fallinie f , die im Grundriß k' als Symmetrie bezüglich f' erscheint, hat k in den Raumpunkten 1 und 2 horizontale Tangenten, die sich im Aufriß als Horizontale, im Grundriß als zu e_1 parallele Tangenten darstellen. Um beliebige weitere *Punkte der Schnittkurve* zu erhalten, legt man achsennormale, d. h. *horizontale Hilfsebenen* σ . Jede solche Ebene schneidet den *Torus* in zwei Parallelkreisen p_1 und p_2 , die Ebene ε in einer ersten Hauptlinie h_1 . Im Aufriß decken sie sich mit σ'' . Im Grundriß erscheinen die Parallelkreise als Kreise p'_1 und p'_2 um z' , deren Radien aus dem Aufriß zu entnehmen sind. Der Grundriß h'_1 der ersten Spurparallelen h_1 ist zu e_1 parallel und geht durch den Punkt $3'$ auf f' , der mit dem Punkt $3'' = [h''_1, f'']$ auf einem Ordner liegt. (Bei

schleifendem Schnitt bedient man sich des parallelgedrehten Punktes 3_0 auf f_0 .) Die Schnittpunkte P', Q', R', S' von h'_1 und p'_1 bzw. p'_2 sind Punkte der Schnittkurve k' im Grundriß; ihre auf $h'_1 = \sigma''$ liegenden Aufrisse P'', Q'', R'', S'' sind die entsprechenden Punkte der Aufrißkurve k'' . Insbesondere werden durch die höchste Hilfsebene, die den Torus längs des höchsten Parallelkreises berührt, die *höchsten Punkte* H_1 und H_2 der Schnittkurve k festgelegt. Zugleich erkennt man, daß in Fig. 170 die tiefste Hilfsebene keine Schnittpunkte liefert. Der Punkt 2 auf der Fallinie f ist *tiefster Punkt* von k . Wählt man die Äquatorebene (Mittenebene μ) des Torus als Hilfsebene, so erhält man auf dem Wulstkreis die Punkte W_1 und W_2 , während der Kehlkreis in Fig. 170 keine Schnittpunkte trägt. Der Punkt 1 auf der Fallinie f ist der tiefste Punkt des Kehltes von k .

Die Punkte W'_1 und W'_2 sind die *Konturpunkte* der Schnittkurve k' im Grundriß. Die Punkte H'_1 und H'_2 und zwei weitere (in Fig. 170 nicht besonders bezeichnete) Punkte (Schnittpunkte der Aufrißspur $[F''6'']$ von ε mit dem linken Umrißmeridian m''_0) sind die Konturpunkte der Schnittkurve k'' im Aufriß. Diese Punkte klären die *Sichtbarkeitsverhältnisse*: Im Grundriß ist jener Teil der Schnittkurve k' zwischen W'_1 und W'_2 sichtbar, der auf der oberen Torushälfte liegt, im Aufriß jener Teil von k'' , der auf dem vorderen Wulstteil des Torus verläuft.

Die *Tangentenkonstruktion* an die Schnittkurve k kann wieder nach zwei Methoden durchgeführt werden. Für die Tangente t im Punkte P ist die Normalenmethode, für die Tangente s im Punkte R die Methode der Tangentenebenen angewandt.

Bei der *Normalenmethode* benötigt man die Normale n_τ der Ringfläche und die Normale n_ε der Schnittebene. n_τ ist die durch P gehende Erzeugende des Normalenkegels der Ringfläche. Die Spitze N dieses Normalenkegels liegt auf der Drehachse z . Ihr Grundriß N' deckt sich daher mit z' , und der Grundriß n'_τ der Torusnormalen n_τ ist die Gerade $[N'P']$. Um den Aufriß N'' zu erhalten, dreht man den Punkt P auf den Hauptmeridian m_0 in die Lage P_0 , für die die Torusnormale n_{τ_0} mit dem Radius $[M_0P_0]$ des Umrißkreises zusammenfällt. Ihr Aufriß $n''_{\tau_0} = [M''_0P''_0]$ schneidet auf z'' den Punkt N'' aus, durch den der Aufriß $n''_\tau = [N''P'']$ der Torusnormalen n_τ von P geht. Der Grundriß n'_ε der Normalen n_ε auf die Schnittebene ε steht auf der Grundrißspur e_1 senkrecht, ihr Aufriß n''_ε auf der Aufrißspur e_2 oder auf irgendeiner, z. B. auf der durch den Punkt F gelegten zweiten Spurparallelen. Die beiden Normalen n_τ und n_ε spannen die Normalebene ν auf, auf der die gesuchte *Tangente* t der Kurve k in P senkrecht steht. Der Grundriß t' der Tangente steht daher auf dem Grund-

riß ν'_1 jeder ersten Spurparallelen ν_1 , der Aufriß t'' auf dem Aufriß ν''_2 jeder zweiten Spurparallelen ν_2 der Normalebene ν senkrecht. Um ν_1 zu erhalten, legt man im Aufriß eine beliebige Parallele ν''_1 zur Rißachse, z. B. in der Höhe des (in π_1 liegenden) tiefsten Parallelkreises ($\nu''_1 = \pi''_1$), und schneidet sie mit n''_τ und n''_ϵ in $7''$ und $8''$. Die Grundrisse $7'$ und $8'$ dieser Punkte 7 und 8 auf n'_τ und n'_ϵ (erste Spurpunkte von n_τ und n_ϵ auf π_1) legen den Grundriß $\nu'_1 = [7', 8']$ der ersten Spurparallelen ν_1 fest, womit der Grundriß $t' \perp \nu'_1$ der Tangente t in P gefunden ist. Entsprechend verfährt man, um ihren Aufriß t'' zu erhalten. Der Grundriß ν'_2 einer beliebigen zweiten Spurparallelen ν_2 (etwa die in π_2 liegende Parallele zur Rißachse durch N') schneidet n'_τ und n'_ϵ in den Punkten N' und $8'$, deren Aufrisse N'' auf n''_τ und $8''$ auf n''_ϵ den Aufriß $\nu''_2 = [N'', 8'']$ dieser zweiten Spurparallelen festlegen. Auf ν''_2 steht dann der Aufriß t'' der Tangente t von k in P senkrecht.

Um im Punkte R nach der *Methode der Tangentenebenen* die Tangente s an die Schnittkurve k zu konstruieren, haben wir die Tangentenebene τ an den Torus mit der Ebene ϵ zu schneiden. In der parallelgedrehten Lage R_0 ist die Tangentenebene τ_0 zweitprojizierend und fällt im Aufriß mit der Tangente τ''_0 im Punkt R''_0 an den Hauptmeridian m_0 zusammen. Ihre erste Spur τ_{01} , etwa in der Äquatorebene μ des Torus, erscheint im Aufriß als ein Punkt, im Grundriß als ein Lot τ'_{01} zur Rißachse. Die erste Spur τ_1 der Tangentenebene τ des Punktes R wird nun dadurch gewonnen, daß man den Punkt R_0 mitsamt seiner Tangentenebene τ_0 in die ursprüngliche Lage R zurückdreht. τ'_{01} kommt dabei nach τ'_1 . In der Äquatorebene μ hat die Schnittebene ϵ die durch den Punkt 5 laufende Parallele $[W'_1 W'_2]$ zu e_1 als Spur. Ihr Schnittpunkt H mit τ_1 ist ein Punkt, der gleichzeitig der Tangentenebene τ und der Schnittebene ϵ angehört, also ein Punkt der gesuchten Tangente s . Im Grundriß ist er als Schnittpunkt H' von τ'_1 mit der Geraden $[W'_1 W'_2]$ sofort zu erkennen, im Aufriß liegt er als Punkt H'' auf $\tau''_1 = \mu''$. Dann ist $[H'R'] = s'$ die Tangente an den Grundriß k' und $[H''R''] = s''$ die Tangente an den Aufriß k'' der Schnittkurve k im Punkte R .

XIV

Durchdringung von zwei Drehflächen

60. Das allgemeine Verfahren zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Flächen

Die *Durchdringungskurve* k zweier Flächen φ und ψ kann *punktweise* nach folgendem allgemeinem Verfahren konstruiert werden.

Man wählt eine *Schar geeigneter Hilfsflächen* σ , die beide Flächen φ und ψ schneiden. Ist k_φ die Schnittkurve einer solchen Hilfsfläche σ mit der ersten Fläche φ und k_ψ die Schnittkurve der gleichen Hilfsfläche σ mit der zweiten Fläche ψ , dann schneiden sich diese Kurven k_φ und k_ψ in gewissen Punkten P , die zugleich auf der Fläche φ und auf der Fläche ψ liegen, d. h. in *Punkten* P der gesuchten *Durchdringungskurve* k (Fig. 171). Aus konstruktiven Gründen kommen dabei nur solche Hilfsflächen σ in Betracht, die *möglichst einfache Schnittkurven* k_φ und k_ψ , d. h. in erster Linie *Geraden* oder *Kreise*, liefern. Kreise werden dabei nur dann mit Vorteil verwendet, wenn sie sich als Strecken oder wieder als Kreise projizieren. Als *Hilfsflächen* σ wählt man daher hauptsächlich geeignete *Hilfsebenen* oder *Hilfskugeln*.

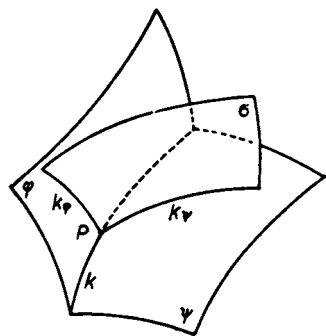


Fig. 171. Allgemeine Konstruktion der Durchdringungskurve k zweier Flächen φ und ψ . Eine Schar von Hilfsflächen σ schneidet φ und ψ in Kurven k_φ und k_ψ , deren Schnittpunkte P auf der Durchdringung k von φ und ψ liegen

Hat man so eine genügende Anzahl *Punkte* P der Durchdringungskurve k gefunden, dann ist es im Interesse einer möglichst genauen Zeichnung des Kurvenverlaufs zweckmäßig, in einzelnen Kurvenpunkten auch die *Tangente* an die Kurve k zu konstruieren. Dazu hat man die bereits in 58. beschriebenen zwei Methoden zur *Tangentenkonstruktion* zur Verfügung, nämlich die *Normalenmethode*, die allerdings mit Vorteil nur bei Drehflächen anwendbar ist, und die *Methode der Tangentenebenen*, die allgemeiner Anwendung fähig ist.

61. Die Durchdringung zweier Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen

Die beiden Drehzylinder φ und ψ , deren Achsen a bzw. b sich in einem Punkt M schneiden, können ohne Verlust an Allgemeinheit in einer solchen Lage zu den Rißtafeln angenommen werden, daß die von den Achsen aufgespannte Ebene zur Aufrißebene parallel ist und daß überdies die Achse a auf der Grundrißebene senkrecht steht.

Wir behandeln zunächst den Sonderfall, daß beide Drehzylinder gleichen Radius haben, und begnügen uns damit, die Durchdringungskurve k dieser beiden Flächen lediglich im Aufriß zu konstruieren (Fig. 172). Die Raumkurve k ist algebraisch und von 4. Ordnung. Da sich aber die beiden Drehzylinder in zwei (vor und hinter M gelegenen) Punkten berühren, hat die Raumkurve zwei Doppelpunkte und zerfällt somit nach (54. Satz 9) in zwei Kegelschnitte, d. h. da diese Kurven auf Drehzylindern liegen, in zwei Ellipsen e_1, e_2 . Außer den beiden Doppelpunkten, die sich im Aufriß mit M'' decken, gehören auch die in der Verbindungsebene $[a, b]$ der beiden Achsen liegenden Schnittpunkte U_1, U_2 und V_1, V_2 der Konturerzeugenden der beiden Zylinder der Schnittkurve k an. Da ferner die Ebene $[a, b]$ eine gemeinsame Symmetrieebene der beiden Zylinder und damit auch ihrer Schnittkurve k ist, ist jeder Punkt der Aufrißkurve k'' Aufriß von zwei bezüglich dieser Ebene symmetrischen Punkten von k . Jeder Punkt der Aufrißkurve ist also doppelt zu zählen, weshalb die Aufrißkurve k'' eine doppeltüberdeckte Kurve 2. Ordnung ist. Wegen des (doppeltüberdeckten) Doppelpunktes M'' zerfällt k'' zudem in 2 Geraden e'_1, e'_2 , nämlich in die Diagonalen des von den Konturerzeugenden der Zylinder gebildeten Rhombus. Diese Geraden, und damit auch die Ebenen der beiden Ellipsen e_1, e_2 im Raum, stehen somit aufeinander senkrecht. Also gilt

Satz 1: Die Durchdringungskurve k zweier Drehzylinder, deren Achsen sich schneiden, zerfällt, wenn die Zylinder gleiche Radien haben, in zwei Ellipsen, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen.

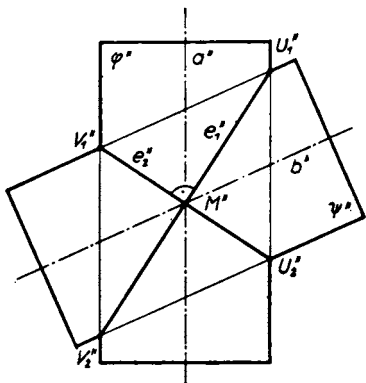


Fig. 172. Zwei Drehzylinder φ, ψ mit sich schneidenden Achsen a, b und gleichem Radius schneiden sich in zwei Ellipsen e_1, e_2 in orthogonalen Ebenen

Dabei haben wir, gestützt auf (54. Bem. 2), Gebrauch gemacht von dem folgenden

Satz 2: *Wird eine algebraische Raumkurve $2n$ -ter Ordnung k so in eine Ebene π projiziert, daß in der Projektion je zwei Punkte der Raumkurve in einen einzigen Punkt zusammenfallen, d. h. die Projektion der Raumkurve doppelt überdeckt wird, dann ist der Riß der Raumkurve in π eine ebene algebraische Kurve der Ordnung n .*

Nun behandeln wir unter sonst gleichen Voraussetzungen den allgemeineren Fall, daß die beiden Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen a und b verschiedene Radien haben. Der Radius des Zylinders φ mit vertikaler Achse a sei der größere, so daß der Zylinder ψ den Zylinder φ durchbohrt (Fig. 173). Die Durchdringungskurve k ist eine algebraische Raumkurve 4. Ordnung, die aus zwei getrennten (unebenen) Zweigen k_1 und k_2 , den Randkurven der Bohrungen, besteht. Der Grundriß k' der Raumkurve k gehört dem Basiskreis des Zylinders φ , der Kreuzriß k'' dem Basiskreis des Zylinders ψ an. Aber auch im Aufriß halbiert sich die Ordnung der Raumkurve: Wegen der Symmetrie der Figur bezüglich der Ebene $[a, b]$ projiziert sich k im Aufriß als doppeltüberdeckte ebene Kurve der Ordnung $4/2 = 2$, d. h. als doppeltüberdeckter Kegelschnitt k'' .

Um die Art dieses Kegelschnitts zu bestimmen, bedient man sich folgender Tatsache:

Satz 3: *Die Fernpunkte der Durchdringungskurve zweier Flächen bleiben ungeändert, wenn eine der beiden erzeugenden Flächen*

1. *parallel verschoben oder*
2. *zentrisch ähnlich vergrößert oder verkleinert wird.*

Beweis: Bei diesen Umformungen bleiben alle Fernpunkte des Raumes fest, also auch die Fernkurven der beiden Flächen und die Fernpunkte ihrer Durchdringungskurve.

Verkleinert man nun den Zylinder φ aus dem Zentrum M heraus ähnlich, bis sein Radius r_φ gleich dem Radius r_ψ des Zylinders ψ ist, dann liegt der in Fig. 172 behandelte Sonderfall vor. Die Aufrißkurve k'' geht bei dieser zentrischen Ähnlichkeit in das orthogonale Geradenpaar u_1, u_2 über. Da diese Geraden dieselben Fernpunkte wie k'' haben, ist die Aufrißkurve k'' ein Kegelschnitt mit zwei reell-verschiedenen Fernpunkten, d. h. eine Hyperbel, und zwar eine gleichseitige Hyperbel, da u_1 und u_2 aufeinander senkrecht stehen. Aus Symmetriegründen ist M'' der Mittelpunkt der Aufrißhyperbel, und daher geben die Geraden u_1 und u_2 nicht nur ihre Asymptotenrichtungen an, sondern sie sind die Asymptoten selbst.

Zur Konstruktion einiger Punkte der Aufrißkurve k'' legt man geeignete Hilfsflächen, die beide Zylinder in einfachen Kurven schneiden. Schnittpunkte dieser Kurven sind dann Punkte der Durchdringungskurve.

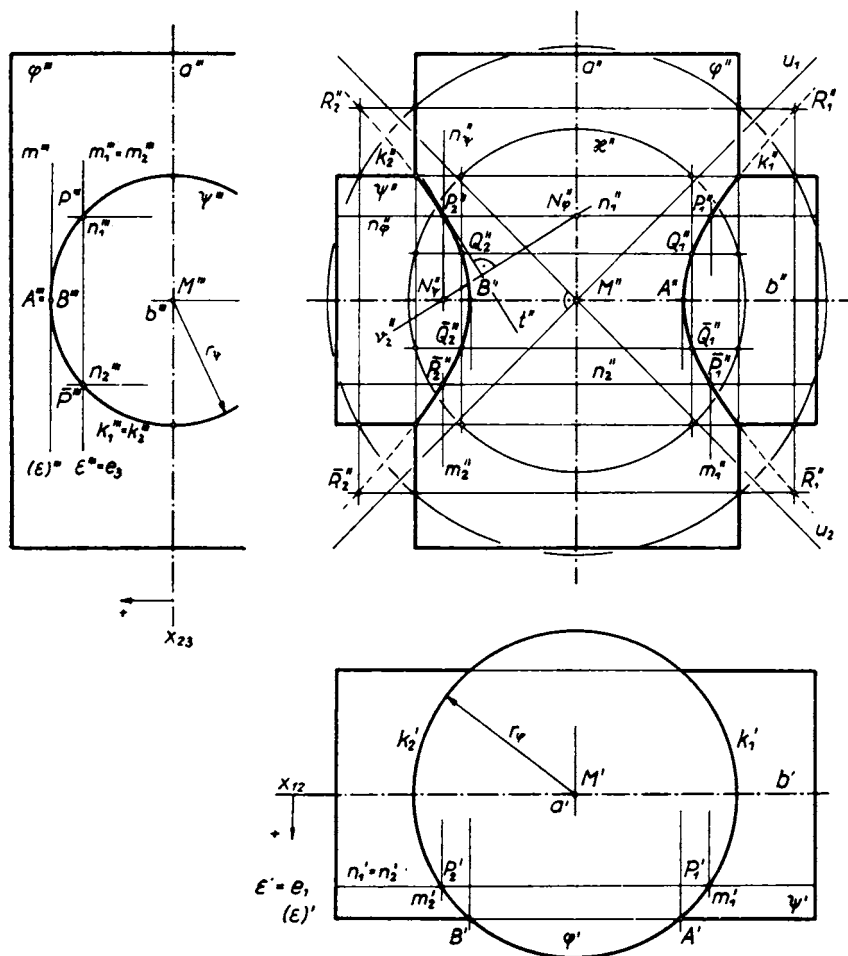


Fig. 173. Durchdringungskurve k zweier Drehzylinder φ, ψ mit sich senkrecht schneidenden Achsen a, b und verschiedenen Radien (algebraische Raumkurve 4. Ordnung, die im Aufriß als doppeltüberdeckte gleichseitige Hyperbel erscheint)

Als solche Hilfsflächen kann man eine Schar von Hilfsebenen ε wählen, die beide Zylinder in Erzeugenden m_1, m_2 bzw. n_1, n_2 schneiden. Dazu müssen die Hilfsebenen zu den beiden Zylinderachsen a und b , d. h. zur Aufrißebene parallel sein. Nach diesem Verfahren sind in Fig. 168 unter Verwendung des Kreuzrisses die Punkte P'_1, P'_2 und \bar{P}'_1, \bar{P}'_2 konstruiert.

Insbesondere liefert jene Hilfsebene (ε), die den Zylinder ψ längs der vordersten Erzeugenden berührt, die *Scheitel* A'' , B'' der *Aufrißhyperbel*.

Eine zweite Methode benutzt eine *Schar von Hilfskugeln* κ um den *Achsen-schnittpunkt* M . Jede derartige Kugel schneidet sowohl den Zylinder φ wie den Zylinder ψ in je zwei achsennormalen Kreisen. Die Schnittpunkte von je zweien dieser Kreise sind Punkte der Durchdringungskurve k im Raum. Die Kontur einer solchen Hilfskugel κ im Aufriß ist ein Kreis um M'' von beliebigem Radius, während die Schnittkreise mit den beiden Zylindern sich als die achsennormalen Sehnen dieses Kreises, die zwischen den Konturerzeugenden der Zylinder liegen, darstellen. Die vier Schnittpunkte dieser beiden Sehnenpaare sind Punkte der Aufrißhyperbel k'' der Durchdringungskurve k . Nach diesem *Hilfskugelverfahren* sind in Fig. 173 die Punkte Q'_1, Q'_2 und \bar{Q}'_1, \bar{Q}'_2 konstruiert.

Eine Hilfskugel, deren Radius kleiner ist als der große Zylinderradius r_φ , liegt ganz im Innern des Zylinders φ und schneidet, reell gesehen, den Zylinder φ nicht mehr. Eine Hilfskugel, deren Radius größer ist als $\sqrt{r_\varphi^2 + r_\psi^2}$, schneidet zwar beide Zylinder nach reellen Kreisen, aber diese Kreise haben keine reellen Schnittpunkte mehr. Trotzdem kann man das Verfahren der Hilfskugeln im Aufriß rein planimetrisch auch für größere Radien fortsetzen und erhält dadurch reelle Punkte R'_1, R'_2 und \bar{R}'_1, \bar{R}'_2 , die zwar außerhalb der Konturerzeugenden beider Zylinder liegen, aber der nach außen fortgesetzten Aufrißhyperbel k'' angehören. Diesen Sachverhalt hat man sich folgendermaßen geometrisch zu erklären: Dem reellen Punkt R'_1 z. B. entsprechen im Raum zwei konjugiert komplexe Punkte der Raumkurve k . Ihre Verbindungsgerade ist reell und steht auf der Aufrißebene senkrecht. Der Punkt R'_1 ist dann der reelle Spurpunkt dieser Geraden in der Aufrißebene, also der *reelle Normalriß zweier sich überdeckender konjugiert komplexer Punkte der Durchdringungskurve* k .

Die *Tangente* t'' in einem Punkt der Aufrißhyperbel k'' konstruiert man am einfachsten nach der *Normalenmethode*. Diese ist in Fig. 173 für den Punkt P'_2 durchgeführt. Die Normale n_φ des Zylinders φ steht im Raum auf der Achse a , die Normale n_ψ des Zylinders ψ auf der Achse b senkrecht. Dasselbe gilt auch für die Aufrisse: $n''_\varphi \perp a''$ und $n''_\psi \perp b''$. Die Schnittpunkte N_φ und N_ψ dieser Normalen mit den Achsen liegen in der zur Aufrißebene parallelen Ebene $[a, b]$, so daß die Gerade $[N_\varphi N_\psi]$ eine zweite Hauptlinie ν_2 der Normalebene $\nu = [n_\varphi, n_\psi]$ der Durchdringungskurve k und $\nu''_2 = [N''_\varphi N''_\psi]$ ihr Aufriß ist. Auf ν''_2 steht deshalb die Tangente t'' im Punkte P'_2 von k'' senkrecht.

Als Anwendung wollen wir den besonderen (*konvexen*) Körper \mathfrak{R} mit dem *Mittelpunkt* O behandeln, dessen Grund-, Auf- und Kreuzriß Fig. 174 zeigt. Der Anfänger hat zunächst einige Mühe, sich eine Vorstellung von

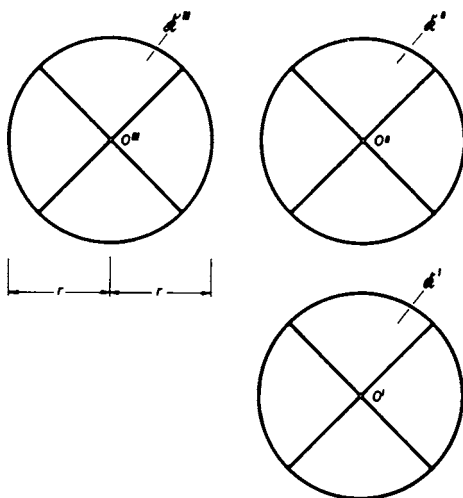


Fig. 174. Konvexer Körper \mathfrak{R} , dessen Grundriß \mathfrak{R}' , Aufriß \mathfrak{R}'' und Kreuzriß \mathfrak{R}''' zueinander kongruent sind (Leselübung).

diesem Körper \mathfrak{R} zu verschaffen. Man erkennt aber aus den drei gezeichneten kongruenten Kreisen, daß es sich um die *Durchdringungsfigur von drei* (massiven) *Drehzylindern mit gleichem Radius r* handelt, deren *Drehachsen* x, y, z den Punkt $O = (O', O'', O''')$ enthalten und zu den drei Bildebenen π_1 (Grundrißebene), π_2 (Aufrißebene), π_3 (Kreuzrißebene) normal sind. Die *Oberflächen* dieser drei untereinander kongruenten Drehzylinder *durchdringen sich* paarweise, weil ihre Drehachsen sich orthogonal schneiden, *nach je zwei Ellipsen*, deren Ebenen jeweils auf einer Projektionsebene normal sind und die daher in dem betreffenden Riß *als orthogonale Paare von (doppeltüberdeckten) Geraden* erscheinen. Die *Halbachsen* der sechs Ellipsen haben die Längen

$$(1) \quad a = r\sqrt{2}, \quad b = r.$$

Allerdings sind an der Begrenzung des Körpers \mathfrak{R} nicht die vollen Durchdringungsellipsen beteiligt, sondern jeweils nur zwei symmetrische Bogenstücke, deren Endpunkte ein *Rechteck* mit den Seitenlängen $2r$ und $r\sqrt{2}$ bilden.

Um diese Verhältnisse noch etwas besser zu erkennen, sind in Fig. 175 in den drei Rissen neben dem konvexen Körper \mathfrak{R} auch noch die drei ihn

erzeugenden Drehzylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ samt ihren Drehachsen x, y, z und ihren *sechs vollständigen Durchdringungsellipsen* dargestellt. Man erkennt z. B., daß sich die beiden Drehzylinder ζ_1 und ζ_2 in den beiden Ellipsen e_1 und e_2 durchdringen. Die Ellipse e_1 besitzt die große Achse $A_1 B_1$, die Ellipse e_2 die große Achse $A_2 B_2$; beide Ellipsen haben die gemeinsame kleine Achse CD . Man bestätigt auch an der Figur leicht die Formeln (1). Die Ellipse e_1 verbindet der Reihe nach die acht Punkte $(A_1 \ 8 \ C \ 6 \ B_1 \ 2 \ D \ 4 \ A_1)$, die Ellipse e_2 geht reihum durch die acht Punkte $(A_2 \ 7 \ C \ 5 \ B_2 \ 1 \ D \ 3 \ A_2)$. Aber nur die beiden Bogen $(8 \ C \ 6)$ und $(2 \ D \ 4)$ der Ellipse e_1 und die beiden Bogen $(7 \ C \ 5)$ und $(1 \ D \ 3)$ der Ellipse e_2 liegen innerhalb des Zylinders ζ_3

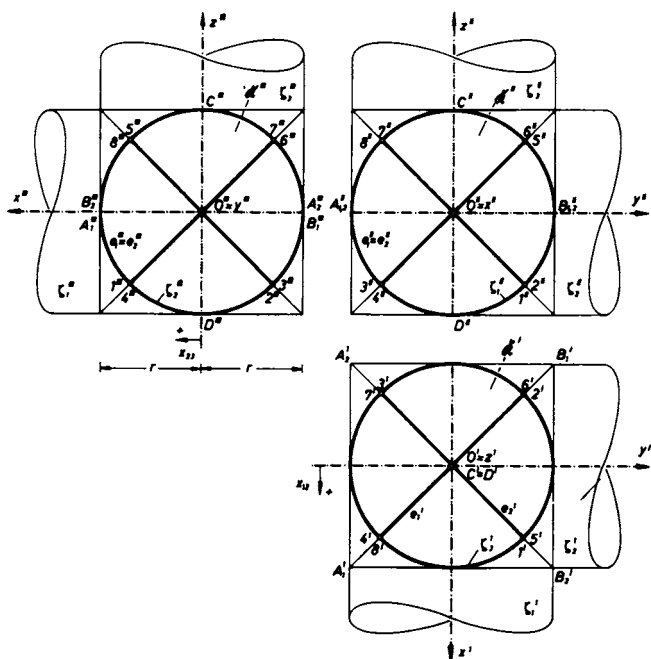


Fig. 175. Der konvexe Körper \mathcal{R} aus Fig. 174 als Durchdrungsfigur der achsenparallelen kongruenten Drehzylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, die sich in 12 Ellipsenbogen schneiden, welche den 6 Durchdringungs-Ellipsen der Zylinder angehören. Je drei Ellipsenbogen stoßen in den 8 Ecken eines Würfels $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ zusammen, je 2 Ellipsenbogen kreuzen sich in 6 Ecken, die paarweise auf der x -, y - und z -Achse liegen.

und sind daher als *krumme Kanten* an der Berandung des Körpers \mathcal{R} beteiligt. Insgesamt haben so an der Berandung des von den drei Drehzylindern $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ begrenzten Körpers \mathcal{R} zwölf untereinander kongruente Ellipsenbogen teil. Diese Ellipsenbogen stoßen zu je dreien in *acht Punkten* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ zusammen, welche *Ecken des Körpers \mathcal{R}* sind. Diese

Ecken bilden die Figur eines *Würfels*, dessen zwölf Kanten zu je vieren als Mantellinien den drei Zylindern $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ angehören. Verbindet man diametrale Ecken, so erhält man in jeder der sechs Ellipsen zwei Durchmesser, welche zueinander *konjugiert* sind. Z. B. trägt die Ellipse e_1 die diametralen Ecken 4 und 6 sowie 2 und 8, welche zu den beiden *Durchmessern* $[4, 6]$ und $[2, 8]$ gehören; diese sind gleichlang und außerdem *zueinander konjugiert*, weil ihre Aufrisse $[4', 6']$ und $[2', 8']$ im kreisförmigen Aufriß e'_1 von e_1 zueinander orthogonal sind.

Außer diesen acht, von je drei Ellipsenbogen gebildeten *Körperecken* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) gibt es noch *sechs weitere* (in Form eines Oktaeders angeordnete) *Körperecken*, welche (wie C und D) als Endpunkte der kleinen Achsen der Schnittellipsen jeweils Treffpunkte von je vier Kanten (halben Ellipsenbogen) sind. Der Körper \mathcal{R} besitzt also *insgesamt* $e = 14$ Ecken, die durch $k = 6 \cdot 4 = 24$ krummlinige Kanten verbunden sind. Er wird von insge-

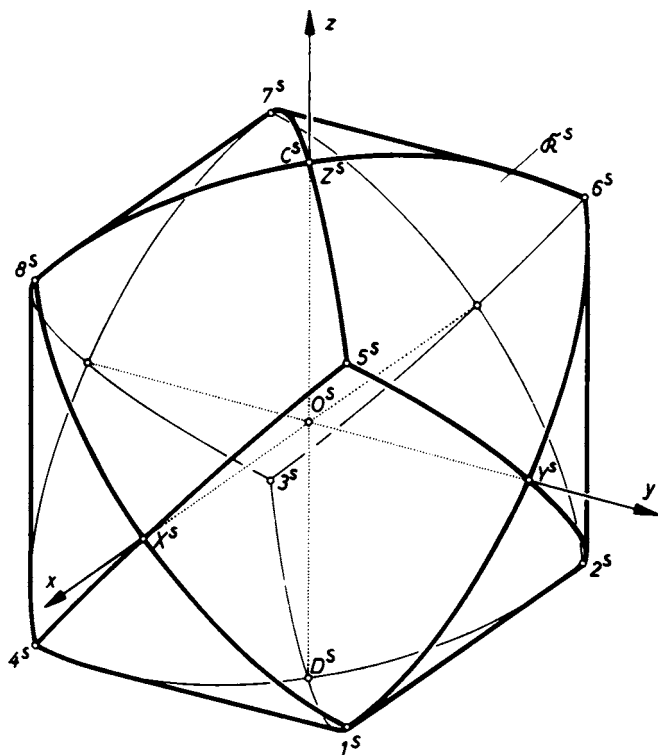


Fig. 176. Schiefaxonometrisches Bild \mathcal{R}^* des konvexen Körpers \mathcal{R} . Die Schnittellipsen der Begrenzungs-
zylinder haben je zwei Diagonalen des Würfels (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) als konjugierte Durchmesser.

samt $f = 12$ untereinander *kongruenten viereckigen krummen Seitenflächen* begrenzt, welche zu je vier einem der drei Zylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ angehören. Die Anzahl e der Ecken, k der Kanten und f der Flächen des konvexen Körpers genügt der aus 32. bekannten EULERSchen Formel

$$e - k + f = 2,$$

die also nicht bloß für konvexe Polyeder (mit ebenen Seitenflächen und geradlinigen Kanten) gültig ist.

Mit Hilfe dieser Feststellungen ist es nun sehr leicht, einen *Schrägriß*, ein *axonometrisches Bild* oder einen *Schnellriß* des Körpers zu zeichnen. Es genügt, sich das betreffende Bild des *Würfels der acht Ecken* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) zu verschaffen. Ist O der *Mittelpunkt* dieses Würfels, so sind die *sechs* (sich in O schneidenden) *Paare von Würfeldiagonalen*

$$[(1, 7)(2, 8)], [(3, 5)(4, 6)]; [(1, 7)(4, 6)], [(2, 8)(3, 5)]; [(1, 7)(3, 5)], [(2, 8)(4, 6)]$$

jeweils *Paare konjugierter Durchmesser* der sechs untereinander kongruenten Schnittellipsen der Zylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Die Ebenen der beiden ersten Ellipsen enthalten die x -Achse, die Ebenen der beiden mittleren Ellipsen enthalten die y -Achse und die Ebenen der beiden letzten Ellipsen, die wir oben mit e_1 und e_2 bezeichnet haben, enthalten die z -Achse.

Die Fig. 176 zeigt ein nach diesem einfachen Verfahren hergestelltes *schiefaxonometrisches Bild* des konvexen Körpers \mathcal{R} , das auf das POHLKESche Dreibein (O^s, X^s, Y^s, Z^s) gestützt ist.

Die Fig. 177 zeigt einen nach derselben Methode konstruierten *Normalriß* des konvexen Körpers \mathcal{R} , den man z. B. als *Grundriß* \mathcal{R}' von \mathcal{R} auffassen kann, wobei als Projektionsrichtung p die Richtung der Diagonalen $p = [3, 5]$ gewählt ist und die Bildebene π zu p normal ist. Der Würfel der Ecken (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) hat dann als Bilder seiner zwölf Kanten die Seiten und Halbdagonalen eines regelmäßigen Sechsecks. Die *drei Ellipsen*, welche die projizierende Diagonale $[3, 5]$ als Durchmesser enthalten, erscheinen dabei als *doppeltüberdeckte Strecken* auf den Bildern x', y', z' der Koordinatenachsen. Die *restlichen drei Ellipsen* haben als Grundrisse drei zueinander kongruente Ellipsen, für welche die Paare der Sechseckdiagonalen

$$[(1', 7') (2', 8')], [(1', 7') (4', 6')], [(4', 6') (2', 8')]$$

konjugierte Durchmesser sind. Weil diese Paare konjugierter Durchmesser (z. B. der Ellipse e'_1) *gleiche Länge* haben ($O'6' = O'8'$), sind ihre Winkelhalbierenden die *Hauptachsen*; außerdem entsprechen ihnen in der aus Fig. 24 bekannten orthogonalen Affinität der Ellipse zu ihrem großen Scheitelkreis

jene beiden orthogonalen Kreisdurchmesser, welche gegen die (horizontale) große Achse von e'_1 unter Winkeln von 45° geneigt sind. Nach der *Papierstreifenkonstruktion* (Fig. 25) schneidet daher die durch den Punkt $6'$ gelegte 45° -Gerade die beiden Hauptachsen der Ellipse e'_1 in Punkten Q und R so, daß $O'A = R6' = a$ und $O'Z' = Q6' = b$ die Halbachsenlängen a und b der Ellipse e'_1 sind.

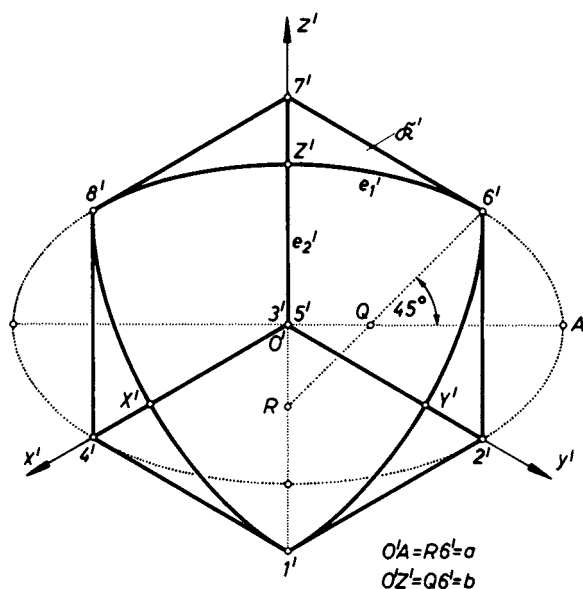


Fig. 177. Normalriß \mathfrak{R}' des konvexen Körpers \mathfrak{R} . Projektionsrichtung p ist die Würfel diagonale $p = [3, 5]$. Die Bildebene ist zu p normal.

Die drei sichtbaren Bogen dieser Ellipsen decken sich im Grundriß fast mit den Schmiegekreisen der Ellipsengrundrisse in den Scheiteln X' , Y' , Z' . Die drei Paare paralleler Seiten des Sechsecks bilden die scheinbaren ersten Umrisse der drei den Körper \mathfrak{R} erzeugenden Drehzylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

Die Fig. 178 zeigt schließlich noch einen nach dem *Einschneideverfahren* (mittels der Einschneiderichtungen p' und p'') konstruierten *Schnellriß* des sichtbaren Teiles des konvexen Körpers \mathfrak{R} . Grundriß \mathfrak{R}' und Aufriß \mathfrak{R}'' von \mathfrak{R} sind in gleichem Maßstab gezeichnet und zeigen die acht Ecken (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) des eingeschriebenen Würfels, die auf den drei Koordinatenachsen liegenden sechs Ecken X, \bar{X} ; Y, \bar{Y} ; Z, \bar{Z} sowie die sie verbindenden 12 Ellipsenbogen. Der Schnellriß zeigt nur die sichtbaren Teile dieser Figuren. Die sechs Schnitellipsen der drei Zylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ können

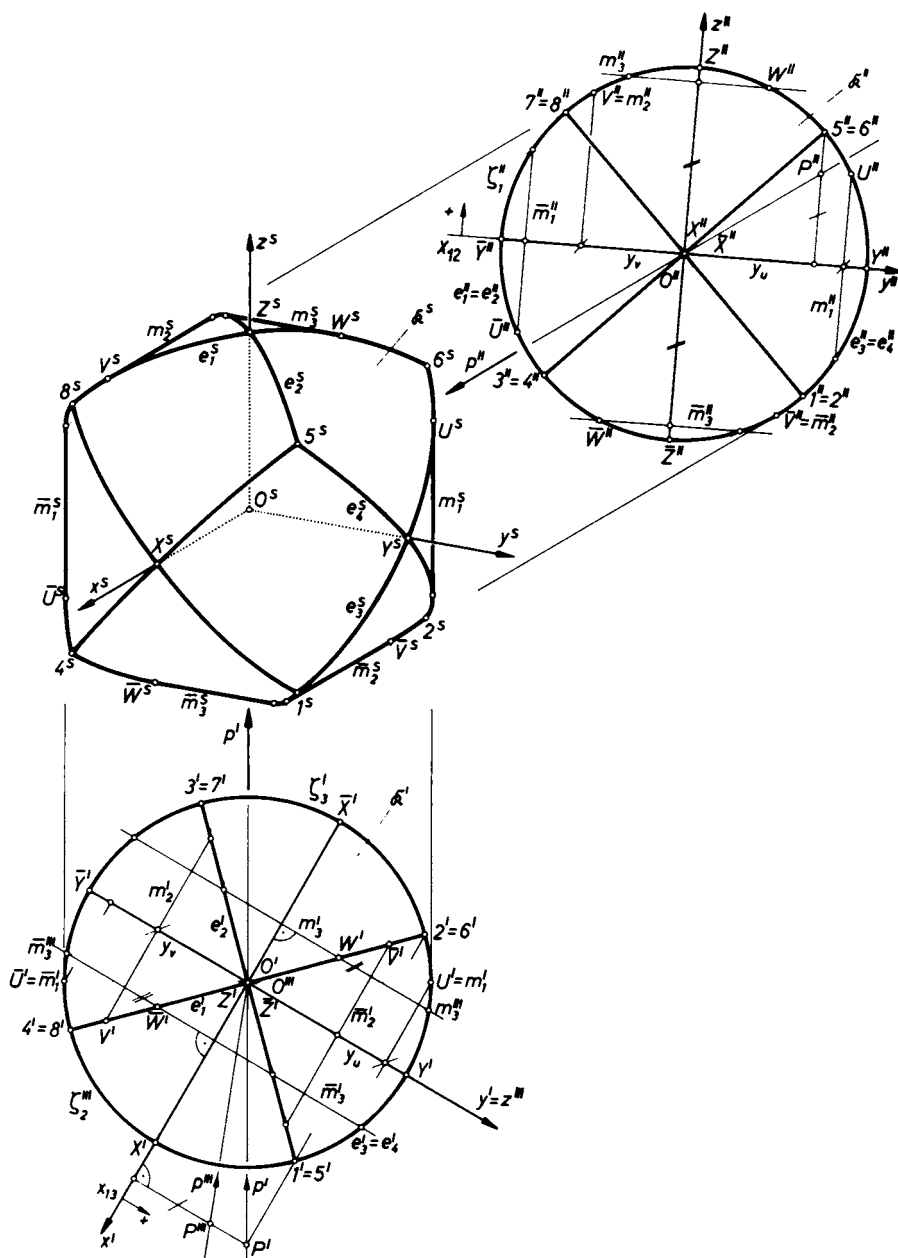


Fig. 178. Konstruktion des Schnellrisses R^* des konvexen Körpers R . Ermittlung der (sichtbaren) Ellipsenbogen seiner Begrenzung, der Umrißzeugenden der drei ihn begrenzenden Drehzylinder und der insgesamt 12 Konturpunkte auf den einzelnen Ellipsenbogen.

im Schnellriß leicht gezeichnet werden, weil man ihre in den Würfeldiagonalen liegenden *Paare von konjugierten Durchmesser* kennt. Z.B. besitzt der Ellipsenbogen $e_1 = (6, Z, 8)$ die beiden konjugierten Halbmesser $[O6]$ und $[O8]$, ebenso der Ellipsenbogen $e_3 = (1, Y, 6)$ die konjugierten Halbmesser $[O1]$ und $[O6]$.

An der *Kontur* des Schnellrisses \mathfrak{R}^s des Körpers \mathfrak{R} sind neben gewissen Teilen der sechs *Umrißerzeugenden* der drei Zylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ auch noch gewisse sie verbindende Bogen der *Schnittellipsen* beteiligt. Dabei entsteht im Schnellriß das *Problem der Konstruktion der zwölf Berührungspunkte* dieser Ellipsen mit den sechs Konturerzeugenden der drei Zylinder $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Wir wollen als Muster diese *Berührungspunkte für die Schnellrisse* e_1^s und e_3^s der beiden *Ellipsenbogen* $e_1 = (6, Z, 8)$ und $e_3 = (1, Y, 6)$ konstruieren.

Der Ellipsenbogen $e_3^s = (1^s Y^s 6^s)$ berührt z.B. den Schnellriß $\cdot m_1^s$ der *Konturerzeugenden* m_1 des vertikalen Zylinders ζ_3 in einem Punkt U^s , dessen *Grundriß* U' auf dem Kreis e_3' und auf dem zu p' normalen Kreisdurchmesser liegt. Sein *Aufriß* U'' kann leicht auf dem Kreis e_3'' durch Übertragen der aus dem Grundriß bekannten (positiven) y -Koordinate y_u des Punktes U gefunden werden. Durch Einschneiden in den Richtungen p' und p'' erhält man aus U' und U'' den auf der vertikalen Umrißerzeugenden m_1^s liegenden *Konturpunkt* U^s des Ellipsenbogens e_3^s .

Auf die gleiche Art kann man jenen Punkt V^s konstruieren, in dem der *Ellipsenbogen* $e_1^s = (6^s Z^s 8^s)$ den Schnellriß m_2^s der *Konturerzeugenden* m_2 des x -parallelen Zylinders ζ_1 berührt. Das Lot auf p'' in O'' schneidet den Kreis e_1'' in den zusammenfallenden Aufrissen $V'' = m_2''$ von V und m_2 . Der Grundriß V' liegt auf dem Kreisdurchmesser e_1' und besitzt die aus dem Aufriß bekannte (negative) y -Koordinate y_v . Durch Einschneiden erhält man aus V' und V'' den auf m_2^s liegenden *Konturpunkt* V^s der Ellipse e_1^s .

Die *Ellipse* e_1^s berührt auch den Schnellriß m_3^s der *Konturerzeugenden* m_3 des y -parallelen Zylinders ζ_2 in einem Punkt W^s . Diesen könnte man mit Hilfe eines (nach dem Muster von Fig. 117 zu zeichnenden) *Kreuzrisses* \mathfrak{R}''' des Körpers \mathfrak{R} nach dem eben zweimal angewandten Verfahren ermitteln. Man kann diesen Kreuzriß (der zudem einen *neuen Maßstab* aufweist) vermeiden, indem man an den Grundriß einen *Seitenriß* anhängt, dessen Achse $x_{13} = x'$ ist. Man braucht dann den Seitenriß p''' des zum Schnellriß gehörenden Sehstrahls $p = [O, P]$, dessen Grundriß p' und Aufriß p'' sich mit den beiden durch O' und O'' gelegten Einschneiderichtungen decken. Nach (spezieller) Wahl des Aufrisses P'' von P auf p'' erhält man (durch Übertragen der y -Koordinate von P'') auf p' den Grundriß P' von P . Aus P' und P'' ergibt sich durch Übertragen der wegfallenden z -Kote von P'' der

Seitenriß P''' von P und der Seitenriß $p''' = [O''' P''']$ des Sehstrahls p . Der Seitenriß ζ_2''' des y -parallelen Zylinders ζ_2 deckt sich mit dem Kreis ζ_3' . Der zu p''' normale Durchmesser schneidet dann ζ_2''' im (projizierenden) Seitenriß m_3''' der y -parallelen Konturerzeugenden m_3 von ζ_2 , deren Grundriß m_3' durch m_3''' geht und parallel zu y' ist. Ihr Aufriß m_3'' ist zu y'' parallel und hat von y'' denselben z -Abstand wie m_3''' von x_{13} . Der *Konturpunkt* W des Ellipsenbogens e_1 hat nun den Schnittpunkt W' der Geraden e_1' mit m_3' als Grundriß und den Schnittpunkt W'' des Kreisbogens e_1'' mit m_3'' als Aufriß. Durch Einschneiden ergibt sich aus W' und W'' der Schnellriß W^s des gesuchten Berührungspunktes des Ellipsenbogens e_1^s mit der (y -parallel durch W^s laufenden) Konturerzeugenden m_3^s von ζ_2 .

Weitere Konturpunkte der sichtbaren Ellipsenbogen liegen in deren Schnittpunkten mit den Mantellinien m_1, m_2, m_3 sowie mit den dazu bezüglich O symmetrischen Mantellinien $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$, deren Grund- und Aufrisse uns sämtlich bekannt sind. *Zu jedem Konturpunkt existiert dabei ein bezüglich O^s symmetrischer Konturpunkt*; so sind zu U^s, V^s, W^s bezüglich O^s symmetrisch die Konturpunkte $\bar{U}^s, \bar{V}^s, \bar{W}^s$.

62. Die Durchdringung eines Drehzylinders mit einem Drehkegel bei sich schneidenden Achsen

Der *Drehzylinder* φ habe die vertikale Achse a , der *Drehkegel* ψ die horizontale Achse b , und O sei der Schnittpunkt dieser Achsen. Die *Durchdringungskurve* k ist eine *algebraische Raumkurve 4. Ordnung*, die aus zwei getrennten unebenen Zweigen k_1 und k_2 besteht (Fig. 179). Ihr Grundriß k' deckt sich mit einem Teil des Basiskreises des Zylinders φ ($k' =$ doppelt überdeckte Kurve 2. Ordnung). Auch im Aufriß projiziert sich k wegen der Symmetrie bezüglich der Ebene $[a, b]$, die zur Aufrißebene parallel ist, als ein *doppelt überdeckter Kegelschnitt k''* . Ihr Kreuzriß k''' dagegen ist eine *nicht zerfallende ebene algebraische Kurve 4. Ordnung*, die aus zwei ovalen Zweigen k_1''' und k_2''' besteht.

Der Aufriß k'' der *Durchdringungskurve* k erweist sich als eine *Hyperbel*. Verkleinert man nämlich den Drehzylinder φ von O aus zentrisch ähnlich, bis er als Drehzylinder φ_0 im Punkte M und einem zweiten bezüglich der Ebene $[a, b]$ dazu symmetrischen Punkte den Kegel ψ berührt, dann zerfällt die Durchdringungskurve 4. Ordnung k_0 von φ_0 und ψ in zwei Ellipsen, die sich im Aufriß als die beiden Geraden u_1, u_2 (Diagonalen des Konturvierecks von φ_0'' und ψ'') projizieren. Da die zentrische Ähnlichkeitstransformation das Unendlichferne nicht ändert, hat die *Aufrißkurve k''*

zweiter Ordnung nach (61. Satz 3) zwei reell verschiedene Fernpunkte, ist also eine *Hyperbel*. Die Geraden u_1, u_2 geben dabei die Richtungen ihrer Asymptoten an. Da ihr Schnittpunkt M'' zugleich der Mittelpunkt der

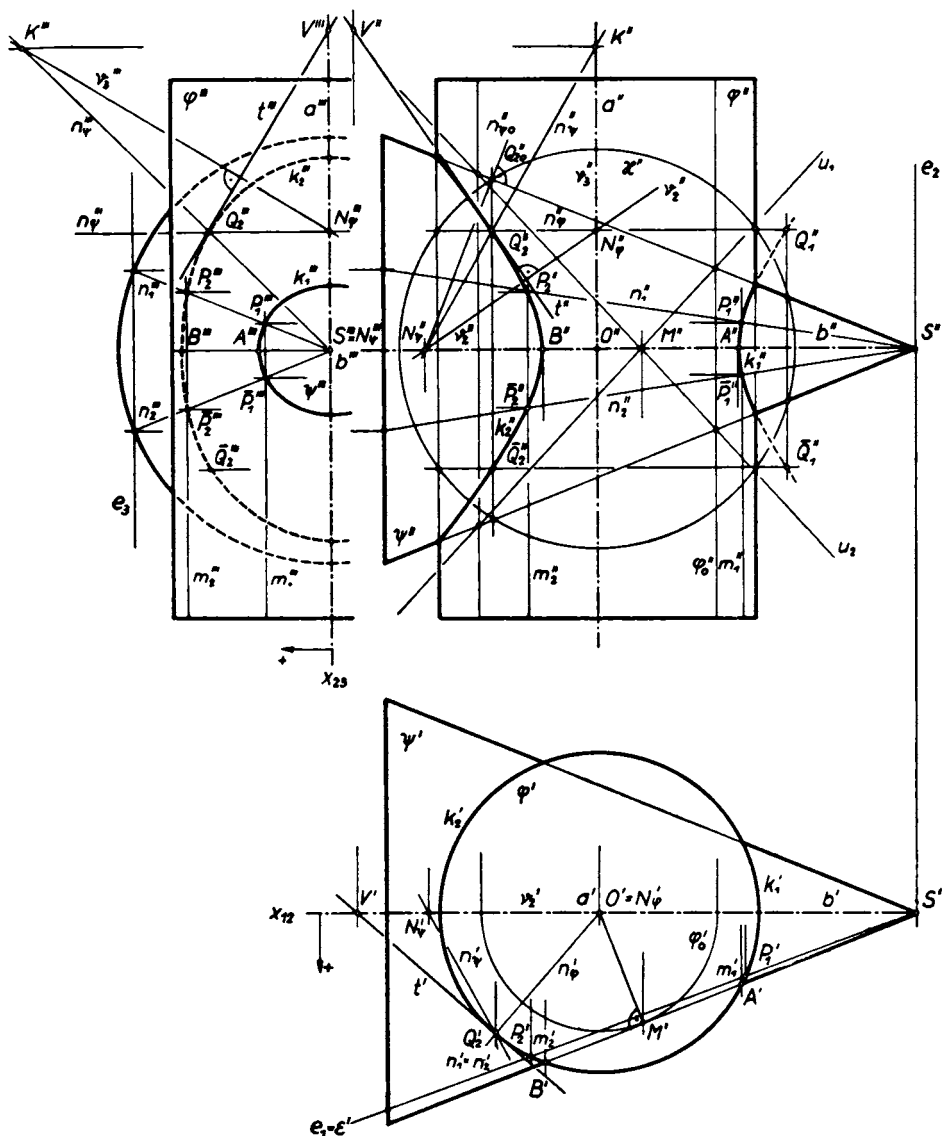


Fig. 179. Durchdringungskurve k eines Drehzylinders φ und eines Drehkegels ψ mit sich senkrecht schneidenden Achsen a, b (algebraische Raumkurve 4. Ordnung, die im Aufriß als doppeltüberdeckte Hyperbel erscheint)

Hyperbel ist (es ist nämlich $M''A'' = M''B''$, wobei A'' und B'' die Scheitel der Hyperbel sind, die man aus den bezüglich M' symmetrischen Punkten A' und B' im Grundriß sofort gewinnt), so sind u_1 und u_2 sogar die *Asymptoten* der Aufrißhyperbel selbst.

Zur *Punktkonstruktion der Durchdringungskurve k* im Aufriß und im Kreuzriß hat man wieder zwei Methoden zur Verfügung. Entweder wählt man eine *Schar von Hilfsebenen*, die zur Zylinderachse a parallel sind und durch die Kegelspitze S gehen, oder eine *Schar von Hilfskugeln* um den Achsenschnittpunkt O der beiden Flächen.

Das Hilfsebenenverfahren ist für die Punkte P durchgeführt. Die beliebig durch die Kegelspitze S gelegte erstprojizierende Ebene ε schneidet den Zylinder in zwei Erzeugenden m_1 und m_2 , den Kegel in zwei Erzeugenden n_1 und n_2 . Diese fallen im Grundriß mit $\varepsilon' = e_1$ zusammen und können leicht in den Kreuzriß und in den Aufriß übertragen werden. Die Geradenpaare m_1, m_2 und n_1, n_2 schneiden sich in den 4 Punkten $P_1, P_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2$, deren Aufriß und Kreuzriß Punkte der Aufrißkurve k'' bzw. Kreuzrißkurve k''' sind. Insbesondere führt die Hilfsebene, die den Kegel längs der vordersten Erzeugenden berührt, zu den *Scheiteln* A'' und B'' der Aufrißhyperbel, die aus Symmetriegründen auf b'' liegen. Die Hilfsebene durch die Kegelachse b schneidet den Zylinder und den Kegel in den Konturerzeugenden der beiden Flächen bezüglich des Aufrisses, deren Schnittpunkte zu den höchsten und tiefsten (reellen) Punkten der Aufrißkurve k'' und der Kreuzrißkurve k''' führen.

Das Hilfskugelverfahren, das Kugeln um O mit beliebigen Radien verwendet, ist in Fig. 179 für die Konstruktion der Punkte Q im Aufriß ausgeführt. Die Kugel κ schneidet beide Flächen in achsennormalen Kreisen, deren Aufrisse Sehnen des Konturkreises der Kugel κ sind. Sie schneiden sich in den vier Punkten $Q_1'', \bar{Q}_1'', Q_2'', \bar{Q}_2''$ der Aufrißhyperbel k'' . Über den Grundriß findet man dann auch leicht den Kreuzriß dieser Punkte.

Auch hier ergeben sich bei genügend großem Radius der Hilfskugel reelle Punkte der Aufrißkurve (z. B. Q_1''), denen im Raum keine reellen Punkte der Durchdringungskurve entsprechen. Sie sind als *doppelt überdeckte reelle Projektion von zwei konjugiert komplexen Punkten Q der räumlichen Durchdringungskurve* anzusehen.

Die *Tangente t* im Punkte Q_2 der Durchdringungskurve k konstruiert man wieder am einfachsten nach der *Normalenmethode*. Die Normale n_φ des Zylinders φ ist das Lot von Q_2 auf die Achse a (Lotfußpunkt N_φ). Die

Normale n_ψ des Kegels ψ ist die durch Q_2 gehende Erzeugende des Normalenkegels von ψ (Spitze des Normalenkegels N_ψ). Beide lassen sich im Aufriß und im Kreuzriß leicht einzeichnen. Um $N_\psi = N''_\psi$ zu gewinnen, hat man den Punkt Q_2 um die Achse b auf die Konturerzeugende des Kegels nach $Q_{20} = Q''_{20}$ zu drehen und in diesem Punkt die mitgedrehte Normale $n_{\psi 0} = n''_{\psi 0}$ senkrecht zur Konturerzeugenden von ψ zu zeichnen. Diese schneidet aus b'' den Aufriß der Spitze $N_\psi = N''_\psi$ des Normalenkegels aus. Da die Punkte N_φ und N_ψ in der Aufrißebene liegen, ist ihre Verbindungsgerade v_2 die Aufrißspur der von n_φ und n_ψ aufgespannten Normalebene v . Auf $v''_2 = [N''_\varphi N''_\psi]$ steht die Tangente t'' von k'' in Q''_2 senkrecht. Um ihren Kreuzriß t''' zu finden, zeichnen wir mit $[N''_\varphi K''] = v''_3$ den Aufriß und mit $[N''_\varphi K'''] = v'''_3$ den zugehörigen Kreuzriß einer beliebigen dritten Spurparallelen v_3 der Normalebene v . Dann steht t''' auf v'''_3 senkrecht. Oder wir übertragen den Vertikalspurpunkt V der Tangente t aus dem Grundriß ($V' = [t', x_{12}]$) in den Aufriß (V'' auf t'') und in den Kreuzriß (V''' auf x_{23}). Dann ist $[Q''_2 V''']$ der Kreuzriß t''' der Tangente t der Durchdringung k im Punkte Q_2 .

63. Die Durchdringung einer Kugel mit einem Drehzylinder

Die Kugel κ (Mittelpunkt O , Radius r) und ein Drehzylinder ζ (Achse a , Radius $r/2$) durchdringen sich in einer solchen Lage, daß der Zylinder die Kugel in ihrem vordersten Punkte A berührt. Der Zylinder enthalte die z -Achse als Erzeugende, und der Berührungspunkt A liege auf der vordersten Zylindererzeugenden, so daß sich A'' mit O'' deckt (Fig. 180).

Die Durchdringungskurve k ist im Raum eine algebraische Raumkurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt in A , die sowohl bezüglich der Äquatorebene der Kugel als auch bezüglich der von A und a gebildeten Kreuzrißebene symmetrisch ist. Daher ist der Grundriß k' und der Kreuzriß k''' eine doppelt überdeckte algebraische Kurve 2. Ordnung, nämlich der Grundriß k' ein Kreis (Basiskreis des Zylinders) und der Kreuzriß k''' eine Parabel. Das letzte erkennt man nach (61. Satz 3) leicht durch folgende Überlegung: Wird der Zylinder ζ vom Punkt A aus zentrisch ähnlich mit dem Längenverhältnis 2 vergrößert, dann berührt er die Kugel κ längs ihres Äquatorkreises. Im Kreuzriß geht dabei der Kegelschnitt k''' in die doppeltüberdeckte Gerade $[A'''O''']$ über, die bezüglich der Fernelemente dasselbe Verhalten aufweisen muß wie k''' . Die Kreuzrißkurve ist somit ein Kegelschnitt mit zwei zusammenfallenden Fernpunkten, d. h. eine Parabel. Ihre Achsenrichtung ist durch $[A'''O''']$ festgelegt, und wegen der Symmetrie der Kurve bezüglich dieser Geraden ist $[A'''O''']$ die Parabelachse selbst.

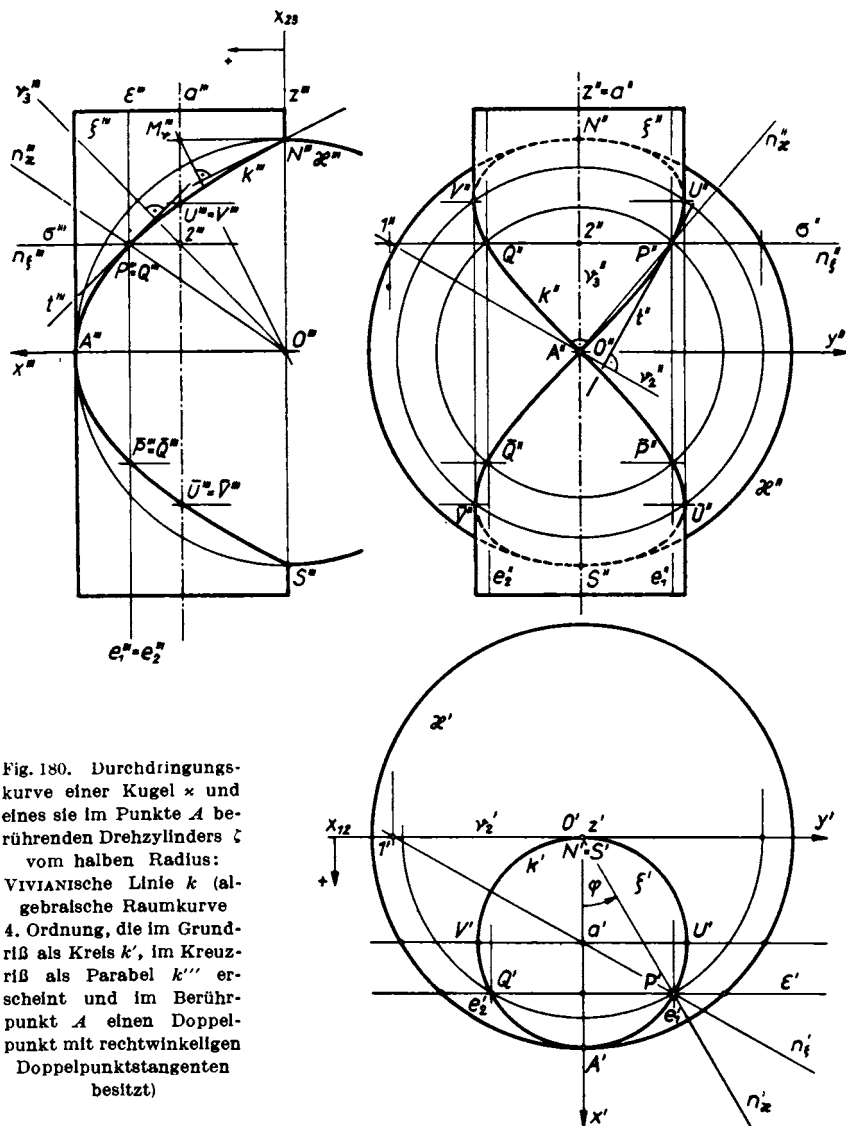


Fig. 180. Durchdringungskurve einer Kugel κ und eines sie im Punkte A berührenden Drehzylinders ζ vom halben Radius:
 VIVIANISCHE Linie k (algebraische Raumkurve 4. Ordnung, die im Grundriß als Kreis k' , im Kreuzriß als Parabel k'' erscheint und im Berührungspunkt A einen Doppelpunkt mit rechtwinkligen Doppelpunktstangenten besitzt)

Die *Aufrißprojektion* der Raumkurve k ist eine *ebene algebraische Kurve 4. Ordnung k'' mit einem Doppelpunkt in A''* . Sie ist bezüglich der horizontalen und vertikalen Achse durch den Doppelpunkt A'' symmetrisch.

Zur *Konstruktion von Punkten der Durchdringungskurve* im Aufriß und im Kreuzriß kann man eine *Schar horizontaler Hilfsebenen* wählen. Jede solche Ebene σ schneidet den Zylinder ζ in einem Kreis vom Radius $r/2$

und die Kugel κ in einem horizontalen Kleinkreis. Im Aufriß liegen beide Kreise zusammen auf σ'' , im Grundriß erscheinen sie als der Kreis k' um a' bzw. als ein Kreis um z' , dessen Radius aus dem Aufriß zu entnehmen ist. Den Schnittpunkten P', Q' im Grundriß entsprechen im Aufriß die Punkte P'', Q'' auf σ'' und im Kreuzriß der Punkt $P''' = Q'''$ auf σ''' . Insbesondere liefert die Tangentenebene im höchsten und im tiefsten Punkt der Kugel die Pole N und S als Punkte der Durchdringungskurve.

Hilfsebenen ε parallel zur Aufrißebene schneiden den Zylinder ζ in zwei Erzeugenden e_1, e_2 , die Kugel κ in einem Kleinkreis. Diese Schnittkurven bestimmen, im Aufriß eingetragen, die vier Punkte P'', \bar{P}'' und Q'', \bar{Q}'' der Aufrißkurve und im Kreuzriß die Punkte $P''' = Q'''$ und $\bar{P}''' = \bar{Q}'''$. Wählt man als Hilfsebene speziell die Ebene durch die Zylinderachse a , die den Zylinder in den Konturerzeugenden seines Aufrisses schneidet, so erhält man die vier Punkte U, \bar{U}, V, \bar{V} , die im Aufriß den sichtbaren Teil der Kurve k'' vom unsichtbaren trennen.

Die *Tangenten* an die Kurve k konstruiert man nach der *Normalenmethode*. Sie ist in Fig. 180 für den Punkt P ausgeführt. Die Normale n_κ der Kugel in P geht durch den Kugelmittelpunkt O , die Normale n_ζ des Zylinders in P steht auf der Zylinderachse a senkrecht. Die Schnittpunkte O' von n_κ und $1'$ von n_ζ mit der Rißachse x_{12} bestimmen, in den Aufriß auf n_κ'' und n_ζ'' übertragen, die Aufrißspur $v_2'' = [O''1'']$ der Normalebene ν , auf der t'' in P'' senkrecht steht. Zur Konstruktion der *Kreuzrißtangente* t''' an k''' in P''' brauchen wir schließlich noch eine dritte Spurparallele v_3 der Normalebene $\nu = [n_\kappa n_\zeta]$. Dazu schneiden wir die Normalen n_κ und n_ζ mit der Ebene $[x, z]$ in den Punkten O und 2 mit den Aufrissen O'' und $2''$ und den auf n_κ'' und n_ζ'' liegenden Kreuzrissen O''' und $2'''$. Dann ist $v_3''' = [O'''2''']$ der Kreuzriß einer dritten Spurparallelen v_3 der Normalebene ν , und die gesuchte Tangente t''' von k''' in P''' steht auf v_3''' senkrecht.

Im *Doppelpunkt* A der Durchdringungskurve k versagen die bekannten Methoden der Tangentenkonstruktion, da dort die Tangentenebenen der Kugel und des Zylinders und damit auch die beiden Flächennormalen zusammenfallen. Um die *Doppelpunktstangenten* zu finden, gehen wir *rechnerisch* vor. Wählt man das in Fig. 180 eingezeichnete cartesische Achsenkreuz (x, y, z) , so lautet die Gleichung der Kugel

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und die Gleichung des Zylinders

$$(2) \quad x^2 + y^2 = rx \quad \text{oder} \quad \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Führt man den in Fig. 180 angegebenen Winkel φ (geographische Länge des Kugelpunktes P) als Hilfswinkel ein, so lauten die Koordinaten (x, y, z) des Punktes P der *Durchdringungskurve* k wegen $O'P' = r \cos \varphi$

$$(3) \quad x = r \cos^2 \varphi, \quad y = r \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = r \sin \varphi.$$

Es ist nämlich $x = O'P' \cdot \cos \varphi$, $y = O'P' \cdot \sin \varphi$ und $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = r \sin \varphi$.

Aus der letzten Gleichung folgt übrigens, daß φ auch gleich der geographischen Breite des Punktes P ist. Die Kurve k ist also der Ort aller Kugelpunkte P mit gleicher geographischer Länge und Breite.

Eliminiert man in der Parameterdarstellung (3) von k den Winkel φ aus x und y , so erhält man als *Grundriß* k' von k den Kreis mit der Gleichung (2). Eliminiert man ebenso φ aus x und z , so erhält man als *Kreuzriß* k'' von k die *Parabel* mit der Gleichung

$$(4) \quad z^2 + r(x - r) = 0.$$

Entfernt man schließlich φ aus y und z , so erhält man als *Aufriß* k'' von k die *ebene algebraische Kurve 4. Ordnung* mit der Gleichung

$$(5) \quad z^4 + r^2(y^2 - z^2) = 0,$$

welche im Nullpunkte O'' einen *Doppelpunkt* besitzt. Dessen *Doppelpunktstangentenpaar* ist durch Nullsetzen der quadratischen Glieder von (5) gegeben und lautet daher

$$(6) \quad y^2 - z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (y - z)(y + z) = 0;$$

es besteht somit aus den *beiden Winkelhalbierenden* $y - z = 0$ und $y + z = 0$ der y - und z -Achse.

In der Parameterdarstellung (3) von k ergibt sich der Doppelpunkt $A = (r, 0, 0)$ einmal für $\varphi = 0$ und zum zweiten für $\varphi = \pi$. Für die Steigung der Aufrißsehne $[A''P'']$ folgt aus (3) allgemein

$$(7) \quad \frac{z}{y} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Insbesondere ergibt sich, wenn der Punkt P auf k gegen A strebt, also $\varphi \rightarrow 0$ bzw. $\varphi \rightarrow \pi$ strebt,

$$(8) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{z}{y} = +1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{z}{y} = -1,$$

woraus nochmals (auf eine einfachere Art) folgt, daß die beiden Doppelpunktstangenten des Aufrisses k'' der Durchdringungskurve k im Doppelpunkte A die Winkelhalbierenden der y - und z -Richtung sind.

Um schließlich noch den *Schmieglekreismittelpunkt der Aufrißkurve k'' im Scheitel N''* zu finden, hat man nach dem *Satz von Meusnier* im Kreuzriß vom Mittelpunkt M''' des Zylinderkreises auf die Parabeltangente im Punkte N''' das Lot zu fällen und mit z''' zu schneiden. Der Schnittpunkt fällt mit O''' zusammen. Daher fällt die gesuchte Schmiegkreismitte nach O'' , und der *Kugelumriß* ist zugleich der Schmiegkreis der Aufrißkurve k'' im Scheitel N'' (und S'').

Die Durchdringungskurve k der Kugel κ (Radius r) und des Zylinders ζ (Radius $r/2$) heißt nach VINCENZO VIVIANI (1622–1703, Schüler von GALILEO GALILEI) *Vivianische Linie*. VIVIANI entdeckte nämlich an ihr (im Jahre 1692) die folgende bemerkenswerte Eigenschaft, die seinerzeit großes Aufsehen erregte: Entfernt man aus der vorderen Halbkugel $x \geq 0$ das von der VIVIANISCHEN Linie umschlossene Flächenstück, so bleibt ein *sphärisches Flächenstück* übrig, dessen Inhalt $O = 4r^2 = (2r)^2$ ist und das somit *exakt quadrierbar* ist, d. h. das man, ausgehend vom Kugelradius r , durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat (der Seitenlänge $a = 2r$) verwandeln kann.

64. Die Durchdringung eines Drehparaboloids mit einer Kugel

Die Achse z des *Drehparaboloids* π stehe auf der Grundrißebene senkrecht, sein Hauptmeridian (Umrißmeridian für den Aufriß) sei die Parabel m mit dem Brennpunkt F (auf z) und der (horizontalen) Leitgeraden l . Der Mittelpunkt O der Kugel κ liege in der zur Aufrißebene parallelen Ebene des Hauptmeridians m von π , aber nicht auf der Achse z von m (Fig. 181). Dann ist die *Durchdringungskurve* k dieser beiden (algebraischen) Flächen 2. Ordnung eine *algebraische Raumkurve 4. Ordnung*. Da sie bezüglich der Ebene des Hauptmeridians m von π symmetrisch ist, projiziert sie sich im *Aufriß* als *doppelt überdeckter Kegelschnitt k''* . Um dessen Art zu bestimmen, verschieben wir die Kugel κ in Gedanken, bis ihr Mittelpunkt auf der Achse z des Drehparaboloids π liegt, und verkleinern oder vergrößern sie vom Mittelpunkt aus zentrisch ähnlich, bis sie das Drehparaboloid in zwei Parallelkreisen schneidet, die sich im Aufriß als zwei horizontale Geraden projizieren. Da diese beiden parallelen Geraden denselben (doppelt zu zählenden) Fernpunkt haben, ist der Kegelschnitt k'' eine *Parabel mit horizontaler Achse*.

Zur *Konstruktion von einzelnen Punkten* der Durchdringungskurve k kann man sich einer *Schar horizontaler Hilfsebenen* bedienen. Jede solche Hilfsebene ε schneidet das Paraboloid in einem Kreis k_π , die Kugel

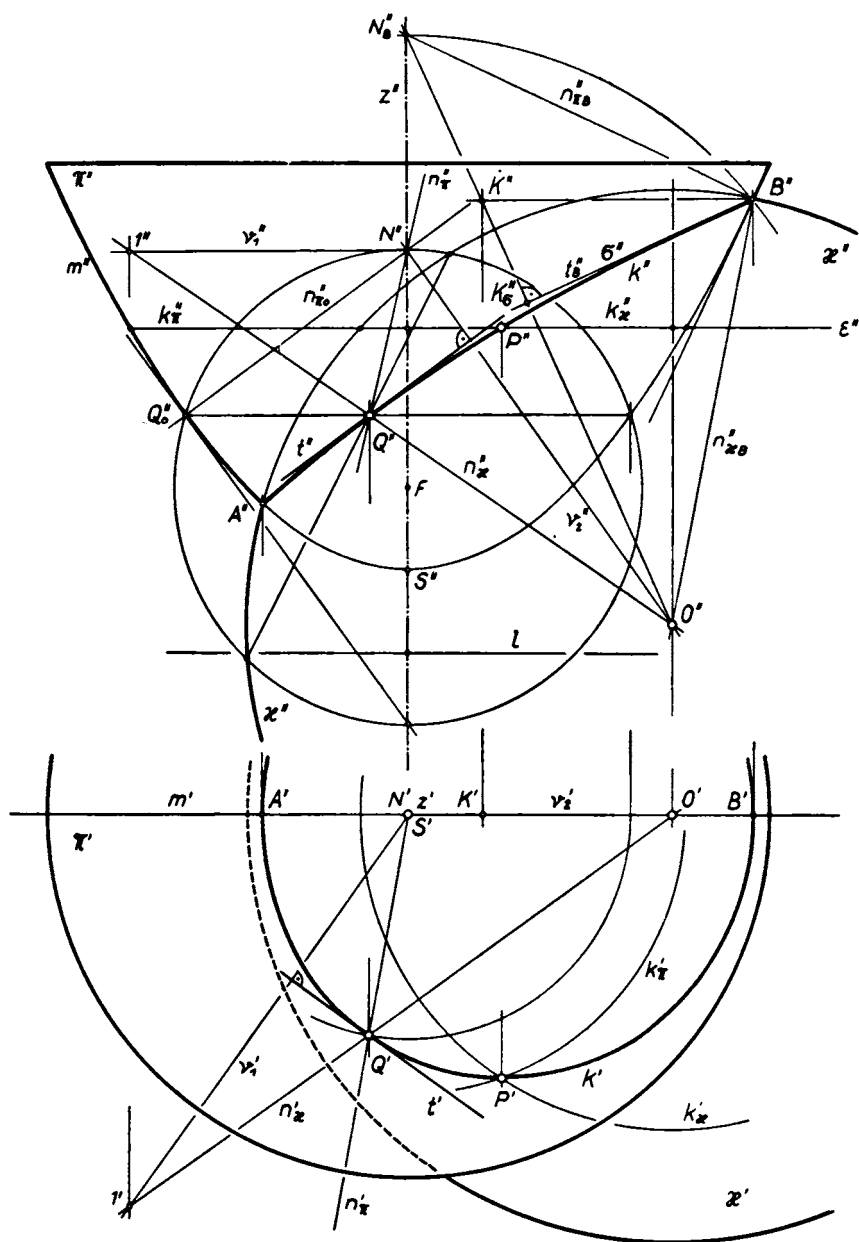


Fig. 181. Durchdringungskurve einer Kugel κ und eines (offenen) Drehparaboloids π (algebraische Raumkurve 4. Ordnung k , die im Aufriß als doppeltüberdeckte Parabel k'' erscheint).

in einem Kreis k_x , die sich in zwei Punkten P und \bar{P} der Durchdringungskurve k schneiden. Im Grundriß kann man die beiden Kreise k'_π um z' und k'_x um O' , deren Radien aus dem Aufriß hervorgehen, einzeichnen und ihre Schnittpunkte P' und \bar{P}' festlegen. (In Fig. 181 ist im Grundriß nur die vordere Hälfte der beiden bezüglich der Ebene des Hauptmeridians m von π symmetrischen Flächen gezeichnet.) Der Aufriß dieser beiden Schnittpunkte überdeckt sich im Punkt P'' auf ε'' . Insbesondere sind die Schnittpunkte A'' und B'' der zweiten Umrißkonturen der beiden Flächen auch Punkte der Aufrißkurve k'' . In den zugehörigen Grundrißpunkten A' und B' hat die Grundrißkurve k' eine vertikale Tangente. Da die Gerade $[A'B']$ Symmetrieachse von k' ist, sind A' und B' Scheitel der Grundrißkurve. Im Raum ist A der tiefste und B der höchste (reelle) Punkt der Durchdringungskurve k .

Eine zweite Methode zur Punktkonstruktion von k verwendet *Hilfskugeln* um einen beliebigen Punkt auf der Achse z des Paraboloids, z. B. um den Brennpunkt F . Jede solche Hilfskugel schneidet das Paraboloid π in einem Parallelkreis und die Kugel x in einem Kleinkreis mit der Achse $[OF]$. Beide Kreise erscheinen im Aufriß als Sehnen des Umrißkreises der Hilfskugel. Ihr Schnitt ist ein Punkt der Aufrißkurve k'' . In Fig. 181 wurde auf diese Weise der Punkt Q'' gewonnen. Sein Grundriß Q' liegt dann 1. auf dem Ordner durch Q'' und 2. auf dem Grundriß des Parallelkreises des Drehparaboloids.

Zur *Konstruktion der Tangente t* an die Schnittkurve k im Punkte Q kann man die *Normalenmethode* verwenden. Die Kugelnormale n_x geht durch den Kugelmittelpunkt O . Die Normale n_π des Paraboloids geht durch die Spitze N des Normalenkegels. Dabei liegt N' auf z' , während N'' durch Paralleldrehen des Punktes Q'' nach Q''_0 und durch Konstruktion der Parabeltangente in diesem Punkt (nach Fig. 134) sowie der Normalen $n''_{\pi 0}$ gewonnen wird. Dann steht der Aufriß t'' der Tangente t von k in Q auf dem Aufriß der zweiten Hauptlinie $v''_2 = [O''N'']$ der Normalebene von k in Q senkrecht. Überträgt man eine beliebige erste Hauptlinie v_1 aus dem Aufriß $v''_1 \mid x_{12}$ in den Grundriß, dann steht der Grundriß t' der Tangente t von k in Q auf dem Grundriß v'_1 dieser ersten Hauptlinie senkrecht.

Die Normalenmethode, als räumliche Konstruktion angewandt auf den Punkt B (oder A), liefert in diesem Punkt eine zweitprojizierende Tangente, da die Normalebene $[n_{\pi B}, n_{xB}]$ zur Aufrißebene parallel ist. Im Punkte B verkürzt sich daher der Aufriß der Tangente an die Durchdringungskurve k in den Punkt B'' und ist nicht identisch mit der Tangente t''_B an den

Aufriß k'' der Durchdringungskurve k . Trotzdem kann man die Normalenmethode, aufgefaßt als rein planimetrische Konstruktion, auch im Punkte B durchführen und erhält dadurch die Tangente t_B'' an die Aufrißkurve (Parabel) k'' in B'' . Die zweitprojizierende Ebene σ durch $t_B'' = \sigma''$ ist dann die Schmiegeebene der Durchdringungskurve k in ihrem Scheitel B .

Schließlich soll noch der *Schmiegekreis im Scheitel B' der Grundrißkurve k'* konstruiert werden. (Für den Scheitel A verläuft die Konstruktion entsprechend.) Der Normalschnitt der Kugel im Punkt B hat seinen Mittelpunkt in O . Das Lot von O auf σ bestimmt dann nach dem Satze von MEUSNIER auf σ den Schmiegekreismittelpunkt $K_\sigma = K_\sigma''$ des schiefen Schnittes σ der Kugel und auf der Horizontalebene durch B den Punkt K , dessen Grundriß K' die Schmiegekreismitte für den Scheitel B' von k' ist. Der Punkt K ist nämlich nach dem Satz von MEUSNIER die Schmiegekreismitte des (horizontalen) Normalschnittes des erstprojizierenden Zylinders der Durchdringungskurve k .

65. Der Schnitt einer Ringfläche mit einem Drehzylinder

Die Achse z der *Ringfläche* φ stehe auf der Grundrißebene senkrecht und berühre den Meridiankreis k_1 , durch dessen Rotation um z die Ringfläche erzeugt wird. Die Achse a des *Drehzylinders* ζ stehe auf der Aufrißebene senkrecht, und der Meridiankreis k_1 des Torus liege auf dem Zylinder (Fig. 182).

Da der Torus φ eine algebraische Fläche 4. Ordnung, der Zylinder ζ eine Fläche 2. Ordnung ist, ist die räumliche *Durchdringungskurve* von $4 \cdot 2 = 8$. Ordnung. Da sich die beiden Flächen φ und ζ aber längs des Meridiankreises k_1 des Torus berühren, gehört dieser doppelt zu zählende Kreis ganz der Durchdringungskurve k an, so daß k in einen doppelt zählenden Kreis k_1 und eine algebraische Restkurve k_2 4. Ordnung zerfällt. Im Aufriß projiziert sich diese zerfallende Schnittkurve k als vierfach überdeckter Kreis. Ihr Grundriß ist, da die Raumkurve k bezüglich der Äquatorebene des Torus symmetrisch ist, gleichfalls doppelt überdeckt. Der in k enthaltene Kreis k_1 erscheint dabei (mit seinem reellen Zuge) als ein doppelt überdecktes Stück k_1' einer horizontalen Geraden, die Restkurve 4. Ordnung k_2 als doppelt überdeckter Kegelschnitt k_2' . Man kann zeigen, daß k_2' eine Parabel mit dem Brennpunkt $M' = z'$ ist.

Der Nachweis dafür, daß der doppeltüberdeckte Kegelschnitt k_2' eine Parabel ist, möge hier durch Rechnung erbracht werden. In einem rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem (x, y, z) , dessen Ursprung in M liegt, dessen z -

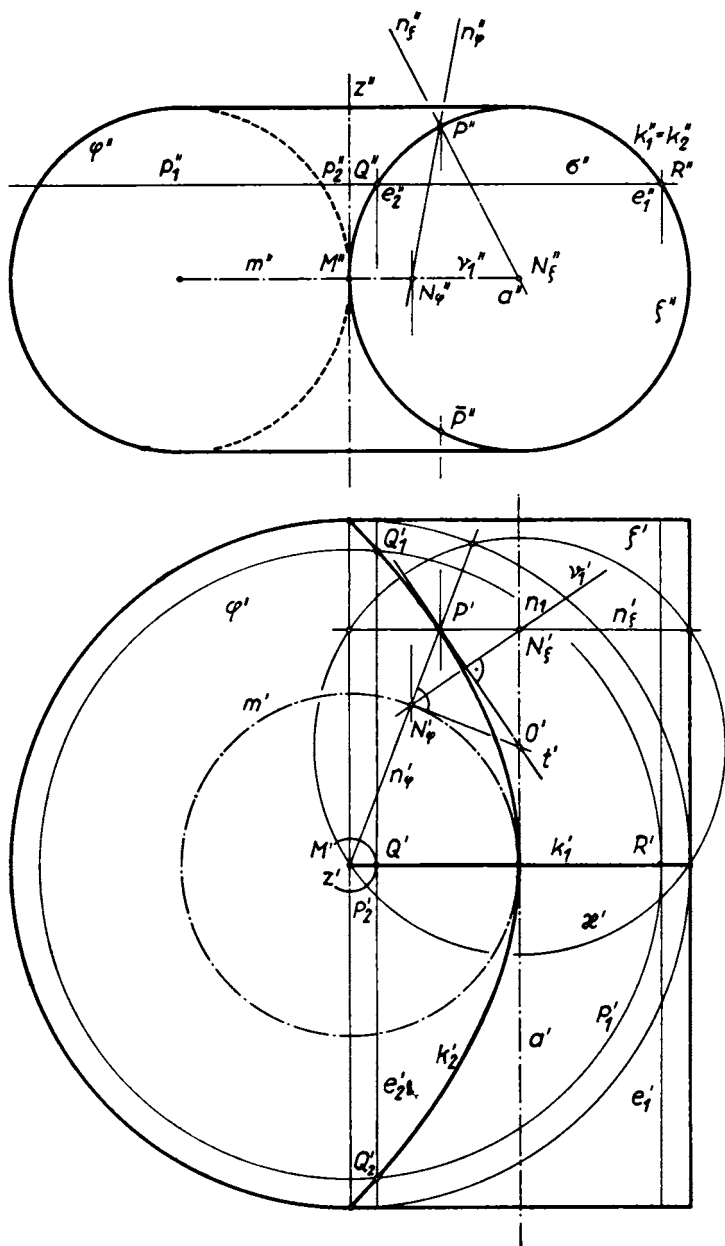


Fig. 182. Schnitt einer Ringfläche φ mit einem Drehzylinder ζ , der sie längs eines Meridiankreises k_1 berührt. Die Schnittkurve k_2 ist eine algebraische Raumkurve 4. Ordnung, die im Grundriß als doppeltüberdeckte Parabel k_2' erscheint

Achse auf die Drehachse des Torus fällt und dessen y -Achse zur Aufrißebene parallel ist, lautet die Gleichung des *Meridiankreises* in der (y, z) -Ebene ($x = 0$) allgemein:

$$(1) \quad (y - R_1 - R_2)^2 + z^2 = R_2^2.$$

Dabei ist R_1 der Radius des Kehlkreises, R_2 der Radius des Meridiankreises, also $R_1 + R_2$ der Radius des Mittenkreises m . (In dem Sonderfall der Fig. 182 ist $R_1 = 0$ zu setzen.)

Aus der Gleichung (1) des Hauptmeridiaps m erhält man die Gleichung der durch Drehung von m um die z -Achse erzeugten Drehfläche φ , d. h. die Gleichung der Ringfläche φ , indem man in (1) die Koordinate y durch den Polarradius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ersetzt, in der Gestalt

$$(2) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - R_1 - R_2)^2 + z^2 = R_2^2$$

oder, wenn man die Wurzel isoliert, quadriert und umordnet, in der Gestalt

$$(3) \quad [x^2 + y^2 + z^2 + (R_1 + R_2)^2 - R_2^2]^2 = 4(R_1 + R_2)^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

Diese Gleichung bestätigt, daß die Ringfläche eine algebraische Fläche 4. Ordnung ist.

Der über dem Meridiankreis k_1 errichtete zweitprojizierende Drehzylinder ζ hat die mit (1) übereinstimmende Gleichung

$$(4) \quad (y - R_1 - R_2)^2 + z^2 = R_2^2.$$

Die beiden Flächengleichungen (3) und (4) stellen zusammen die räumliche Schnittkurve k der Ringfläche φ und des Drehzylinders ζ dar. Eliminiert man aus ihnen die Koordinate z , so erhält man die Gleichung des erstprojizierenden Zylinders durch die Raumkurve k . Seine Gleichung, zusammen mit $z = 0$ auch die Gleichung des Grundrisses k' der Raumkurve k , lautet somit

$$(5) \quad [x^2 + y^2 + (R_1 + R_2)^2 - (y - R_1 - R_2)^2]^2 = 4(R_1 + R_2)^2 (x^2 + y^2)$$

oder

$$(6) \quad x^2 [x^2 + 4y(R_1 + R_2) - 4(R_1 + R_2)^2] = 0.$$

Demnach ist k' eine (in der Ebene $z = 0$ liegende) ebene algebraische Kurve 4. Ordnung, die in die doppeltzählende y -Achse $x^2 = 0$ und in die Parabel

$$(7) \quad x^2 = -4(R_1 + R_2) [y - (R_1 + R_2)]$$

zerfällt. Diese Parabel ist zur y -Achse symmetrisch und nach links geöffnet. Ihr Scheitel liegt im Punkt $(0, R_1 + R_2)$ auf dem Grundriß m' des Mittenkreises, ihr Parameter ist $p = 2(R_1 + R_2)$, so daß der Punkt $M'(0, 0)$, d. h. der Grundriß z' der Torusachse, ihr Brennpunkt ist. Die Scheiteltangente der Parabel k'_2 fällt in den Grundriß a' der Zylinderachse a , und ihre Leitgerade ist zu a' parallel und von a' ebenso weit entfernt wie z' . Übrigens kann man alle diese Eigenschaften der Kurve k'_2 auch ohne Rechnung einsehen.

Zur *Punktkonstruktion* der Durchdringungskurve k kann man *horizontale Hilfsebenen* legen. Jede solche Ebene σ schneidet den Torus φ in zwei Parallelkreisen p_1, p_2 , den Zylinder ζ in zwei Erzeugenden e_1, e_2 . Die Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q und R dieser beiden Kurvenpaare sind Punkte der Durchdringungskurve k .

Auch das *Hilfskugelverfahren* ist anwendbar. Man verwendet dabei *Hilfskugeln* κ , welche den Torus φ in Meridiankreisen und den Drehzylinder ζ in Parallelkreisen schneiden. Hat man einen Meridiankreis des Torus im Grundriß beliebig gewählt, so muß der *Mittelpunkt* O der Hilfskugel κ auf der Achse dieses Meridiankreises, d. h. auf der Tangente an den Mittenkreis m des Torus und auf der Zylinderachse a liegen. Zu jedem Meridiankreis ist daher sowohl der Mittelpunkt O als auch der Kugelradius jedesmal neu so auf der Zylinderachse a zu ermitteln, daß die Hilfskugel κ den Torus gerade in dem ausgewählten Meridiankreis schneidet. Da alle Meridiankreise in Fig. 182 die Torusachse z berühren, gehen alle Hilfskugeln κ durch den Mittelpunkt M des Torus; ihre ersten Konturkreise κ' gehen daher durch M' . Jede solche Hilfskugel κ schneidet daher den Torus 1. nach dem ursprünglich angenommenen Meridiankreis und 2. in dem rechten Hauptmeridiankreis k_1 , wobei dieser zweite Kreis allen Hilfskugeln κ gemeinsam ist. Im Grundriß erscheinen beide Kreise als Radien durch M' . Die gleiche Hilfskugel κ schneidet den Drehzylinder ζ gleichfalls in zwei Kreisen (Parallelkreisen), wobei der eine sich mit dem Hauptmeridiankreis k_1 des Torus deckt. Beide Zylinderkreise erscheinen dabei im Grundriß als zu a' normale Sehnen des Umrißkreises der Hilfskugel κ . Der Hauptmeridiankreis k_1 ist ein Bestandteil der räumlichen Durchdringungskurve k . Die Schnittpunkte P, \bar{P} der beiden anderen auf κ gelegenen Kreise überdecken sich im Grundriß im Punkte $P' = \bar{P}'$ doppelt; P und \bar{P} sind zwei weitere Punkte von k , der Punkt $P' = \bar{P}'$ somit ein Punkt der gesuchten Grundrißparabel k'_2 der *eigentlichen Durchdringungskurve* k_2 des Zylinders ζ und der Ringfläche φ .

Die *Tangente* t im Punkt P der Durchdringungskurve k_2 konstruiert man nach der *Normalenmethode*. Die Normale n_ζ des Zylinders ζ in P steht auf der Zylinderachse a senkrecht und trifft sie im Punkt N_ζ . Die Normale n_φ des Torus φ steht auf dessen Mittenkreis m senkrecht und trifft ihn im Punkt N_φ . Beide Punkte lassen sich im Grundriß sofort angeben. Da die Gerade $[N_\zeta, N_\varphi]$ zur Grundrißebene parallel ist, ist sie eine erste Hauptlinie v_1 der von den beiden Flächennormalen n_φ und n_ζ aufgespannten

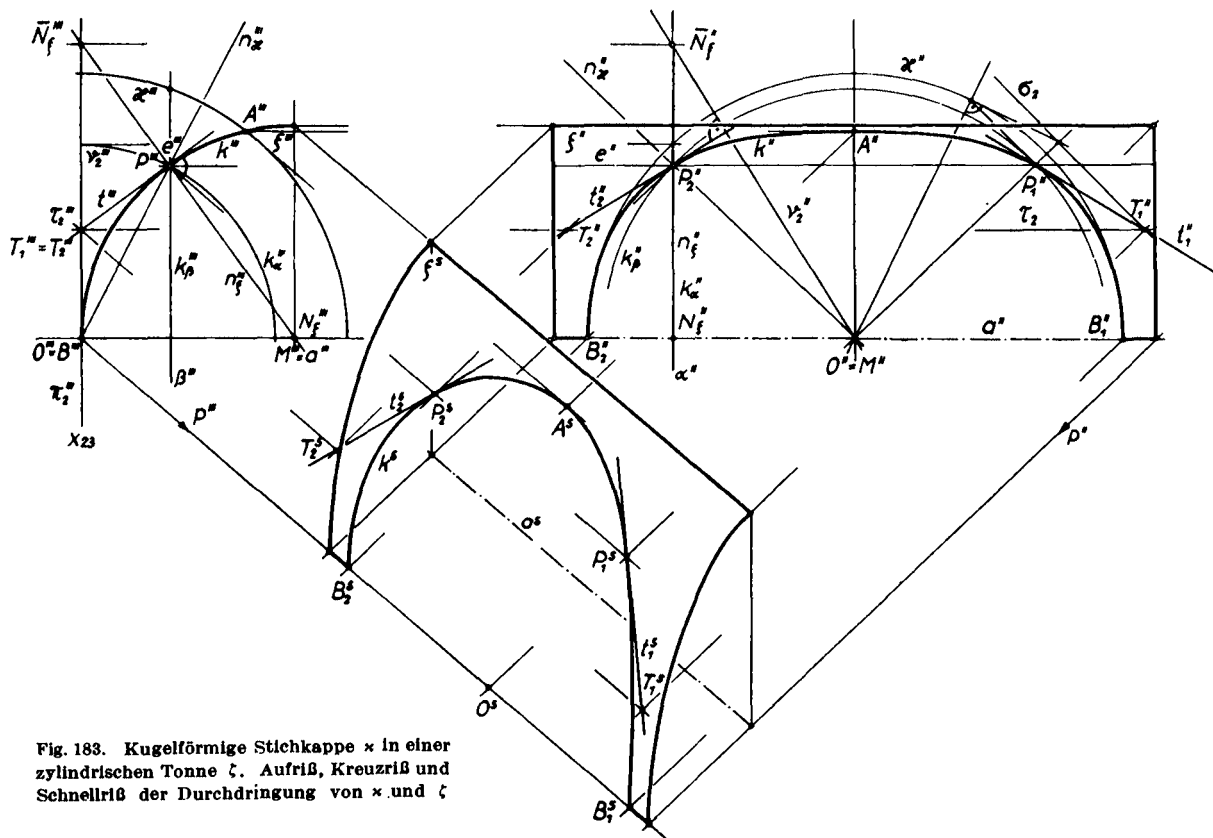


Fig. 183. Kugelförmige Stichkappe \times in einer zylindrischen Tonne ζ . Aufriß, Kreuzriß und Schnellriß der Durchdringung von \times und ζ

Normalebene ν von k_2 in P . Daher steht auf ihrem Grundriß $\nu'_1 = [N'_1, N'_\varphi]$ der Grundriß t' der Tangente t der Durchdringungskurve k_2 im Punkte P senkrecht.

66. Kugelförmige Stichkappe in einer zylindrischen Tonne

In ein *drehzylindrisches Tonnengewölbe* ζ mit der Achse a soll eine Öffnung (seitlicher Eingang oder Fenster), eine sogenannte *Stichkappe*, eingeführt werden, die als *Durchdringung der Tonne mit einer Kugel* κ (Mittelpunkt O) entsteht. Zylinder ζ und Kugel κ seien im Aufriß und im Kreuzriß gegeben (Fig. 183).

Die *Durchdringungskurve* k im Raum ist eine *algebraische Raumkurve 4. Ordnung*. Im Kreuzriß fällt sie, da der Zylinder drittprojizierend ist, auf den *Basiskreis* des Zylinders ζ , d. h. es ist $k''' = \zeta'''$. Ihr *Aufriß* k'' ist eine *ebene algebraische Kurve 4. Ordnung*, die bezüglich der durch O gehenden Parallelebene zur Kreuzrißebene symmetrisch ist.

Zur *Punktkonstruktion* der Durchdringungskurve k kann im Aufriß und im Kreuzriß die Hilfskugelmethode nicht angewandt werden. (Im Grundriß wäre sie möglich!) Dagegen kann man *Hilfsebenen* so wählen, daß sie den Zylinder in Erzeugenden oder Kreisen und die Kugel in Kreisen schneiden. Jede zur *Kreuzrißebene* *parallele Hilfsebene* α schneidet aus dem Zylinder einen Normalschnittkreis und aus der Kugel einen Kleinkreis k_α aus. Diese Kurven erscheinen im Kreuzriß in wahrer Gestalt, während sie im Aufriß mit α'' zusammenfallen. Der Schnittpunkt P dieser beiden Kreise ist ein Punkt der Durchdringungskurve k . Sein Kreuzriß ist P''' , sein Aufriß ist $P'' = P'_2$.

Jede zur *Aufrißebene* *parallele Hilfsebene* β schneidet den Viertelzylinder ζ in einer Erzeugenden e , die Kugel in einem Kleinkreis k_β . Im Kreuzriß ist die Erzeugende e und die Ebene des Kleinkreises k_β projizierend, beide liegen auf β''' und gehen durch $P''' = e'''$. Im Aufriß erscheinen die Erzeugende e als Parallele e'' zur Zylinderachse a und der Kugelkreis k_β in wahrer Gestalt als Kreis k''_β um O'' ; ihre Schnittpunkte P'_1 und P'_2 sind zwei Punkte des Aufrisses k'' der Durchdringungskurve k . Insbesondere erhält man für spezielle Hilfsebenen den höchsten Punkt A und die beiden tiefsten Punkte B_1, B_2 der Durchdringungskurve k .

Die *Tangente* t in einem Punkt der Durchdringungskurve k kann entweder nach der Normalenmethode oder nach der Methode der Tangentenebenen konstruiert werden. Die *Normalenmethode* ist im Punkte P_2 durch-

geführt. Die Kugelnormale n_x geht durch die Kugelmitte O , die Zylinder-normale n_z durch den Fußpunkt N_z des Lotes von P_2 auf die Zylinderachse a . Eine zweite Spurparallele v_2 der von diesen beiden Normalen aufgespannten Normalebene v fällt im Kreuzriß in die Rißachse $x_{23} = v_2'''$, und die Schnittpunkte O''' und \bar{N}_z''' von v_2''' mit n_x''' und n_z''' bestimmen, in den Aufriß übertragen, den Aufriß $v_2'' = [O''\bar{N}_z'']$ dieser zweiten Hauptlinie. Auf ihr steht der Aufriß t_2'' der Tangente t_2 von k in P_2 senkrecht.

Die *Methode der Tangentenebenen* ist für den Punkt P_1 angewandt. Als Aufrißebene π_2 denken wir uns die Großkreisebene der Kugel κ gewählt, die im Kreuzriß als lotrechter Durchmesser π_2''' des dritten Umrißkreises κ''' erscheint. In dieser Ebene π_2 hat die Tangentenebene τ an den Zylinder ζ die Spurgerade τ_2 , die im Kreuzriß als Schnittpunkt τ_2''' der Tangente t''' an den Basiskreis k''' des Zylinders in $P_1''' = P'''$ mit der Rißachse x_{23} , im Aufriß als Parallele τ_2 zu a'' erscheint. Die Tangentenebene σ an die Kugel κ in P_1 schneidet die Aufrißebene π_2 in der Spurgeraden σ_2 , die im Aufriß die *Polare* von P_1'' bezüglich des Umrißkreises κ'' von κ ist. Der Schnittpunkt $T_1 = T_1'$ der Vertikalspuren τ_2 und σ_2 der beiden Tangentenebenen τ und σ ist der Aufrißspurpunkt der gesuchten Tangente t_1 von k in P_1 . Daher ist t_1' die Verbindungsgerade von P_1'' mit T_1' .

Um ein *anschauliches Bild der Tonne samt Stichkappe* zu erhalten, entwerfen wir unter Benutzung der beiden konstruierten Normalrisse einen *Schnellriß* des Objektes. Dazu wählen wir zwei beliebige Einschniederichtungen p'' und p''' und schneiden die in diesen Einschniederichtungen verlaufenden Ordner der einzelnen *Objektpunkte*, z. B. von P_1'' und von $P_1''' = P'''$ in P_1^s . Auch die *Tangente* t an die Durchdringungskurve k läßt sich leicht im Schnellriß einzeichnen, wenn man außer dem Berührungspunkt P_1 noch einen weiteren Punkt von t , z. B. den Punkt T_1 , in den Schnellriß überträgt. Die *vertikalen und horizontalen Radien der Randkreise des Zylinders ζ* liefern *konjugierte Halbmesser der elliptischen Schnellrisse dieser Randkreise*.

Durchdringung zweier beliebiger Flächen

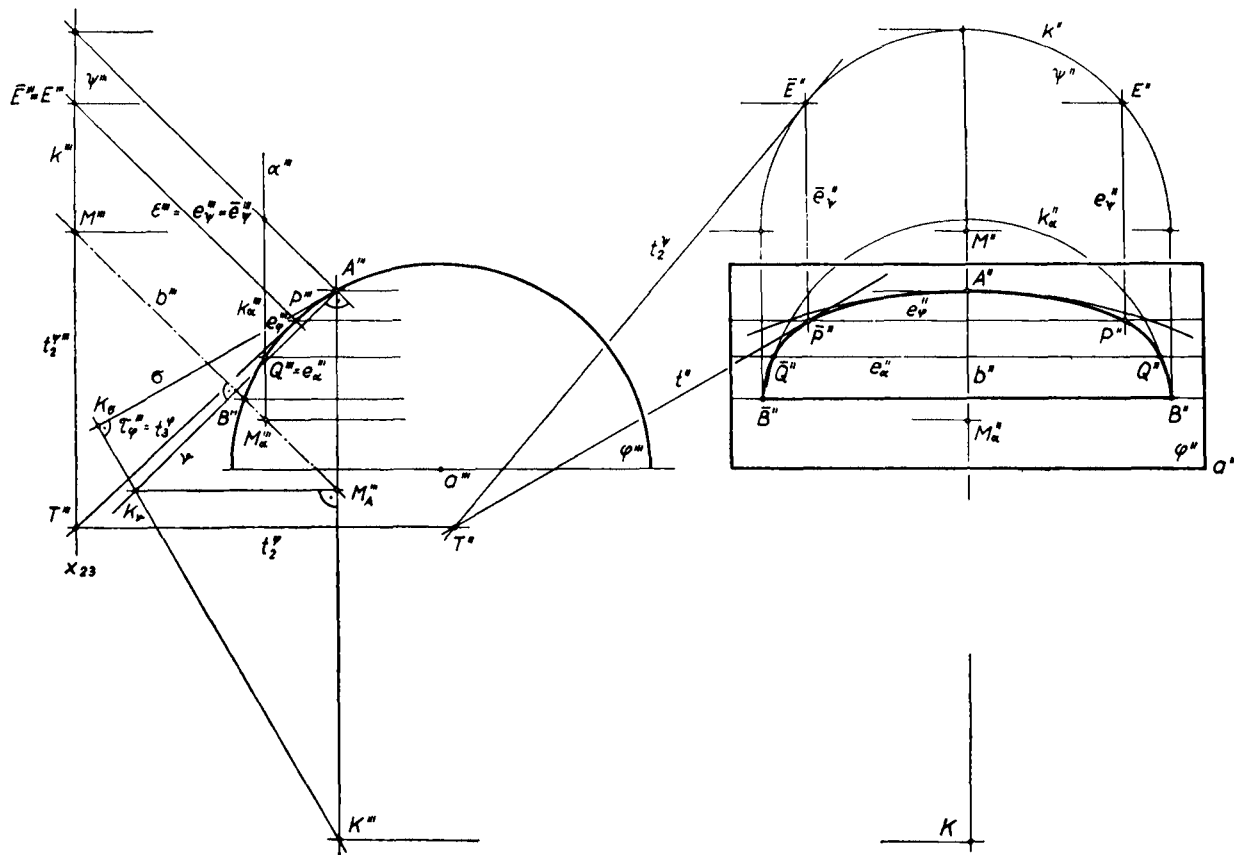
67. Schiefe kreiszyllindrische Stiehkappe in einer drehzyllindrischen Tonne

Das in 60. entwickelte *allgemeine Verfahren zur Konstruktion der Durchdringungskurve* zweier Flächen ist, erforderlichenfalls nach Einführung neuer zugeordneter Rißtafeln, stets anwendbar, wenn die Flächen Drehflächen sind und die Achsen der beiden Drehflächen sich schneiden oder zueinander parallel sind. Man kann nämlich dann stets eine Schar von Hilfskugeln bzw. Hilfsebenen so wählen, daß beide Flächen in Parallelkreisen geschnitten werden. Bei windschiefer Lage der Achsen ist es jedoch im allgemeinen nicht mehr möglich, solche Hilfsflächen ausfindig zu machen, die die beiden sich durchdringenden Flächen in einfachen Kurven, d. h. in Geraden und Kreisen, schneiden. Lediglich dann, wenn die Meridiankurven Geraden (Drehzylinder, Drehkegel) oder Kreise (Torus) sind, besteht Aussicht, die Durchdringungskurve trotz windschiefer Drehachsen auf einfache Weise konstruieren zu können.

Demgegenüber kann das allgemeine Verfahren mit erträglichem zeichnerischem Aufwand manchmal auch dann noch angewandt werden, wenn eine der beiden Flächen oder auch alle beide *keine Drehflächen* sind, nämlich dann, wenn die sich schneidenden Flächen eine *Schar von Geraden* (Regelfläche) oder eine *Schar von Kreisen* tragen.

Als erstes Beispiel hierfür konstruieren wir *für eine drehzyllindrische Tonne φ eine Stiehkappe*, die dadurch entsteht, daß die obere Hälfte eines *schiefen Kreiszyllinders ψ* in die Tonne einsticht (Fig. 184). Beide Flächen φ und ψ seien im Aufriß und im Kreuzriß gegeben. Die Tonne φ habe die zur Aufrißebene parallele horizontale Achse a , während der schiefe Kreiszyllinder ψ durch seine Achse b (parallel zur Kreuzrißebene) und den *Leitkreis k* (in der Aufrißebene) festgelegt sei.

Die *Durchdringungskurve* des schiefen Kreiszyllinders mit der drehzyllindrischen Tonne ist eine algebraische *Raumkurve 4. Ordnung*. Im *Kreuzriß* projiziert sich ihr reeller Zug doppeltüberdeckt als ein *Stück des Basis-*

Fig. 184. Schiefe kreiszyllindrische Stichkappe ψ in einer drehzyllindrischen Tonne φ (Aufriß und Kreuzriß)

kreises der Tonne φ , während ihr Aufriß eine ebene algebraische Kurve 4. Ordnung ist, die b'' als Symmetrieachse hat.

Zur *punktweisen Konstruktion der Aufrißkurve* verwenden wir als Hilfsflächen entweder drittprojizierende Ebenen ε , die zu den Erzeugenden des schiefen Kreiszylinders, d. h. zu seiner Achse b parallel sind, oder drittprojizierende Ebenen α , die zum Leitkreis k des schiefen Kreiszylinders, d. h. zur Aufrißebene parallel sind.

Eine *auf der Kreuzrißebene senkrechte Hilfsebene ε* , die zur Achse b parallel ist, schneidet nämlich die Tonne φ in einer Erzeugenden e_φ und den Zylinder ψ in zwei Erzeugenden e_ψ und \bar{e}_ψ . Die Erzeugende e_φ ist drittprojizierend, so daß ihr Kreuzriß e_φ''' der Schnittpunkt von ε''' mit dem Kreuzriß φ''' des Basiskreises der Tonne ist. Ihr Aufriß e_φ'' ist zur Tonnenachse a'' parallel. Die Erzeugenden e_ψ und \bar{e}_ψ fallen im Kreuzriß auf ε''' . Ihre Spurpunkte E und \bar{E} in der Aufrißebene können aus dem Kreuzriß als Schnittpunkt E''' von ε''' mit k''' in den Aufriß nach E'' und \bar{E}'' auf k'' übertragen werden. Damit hat man auch ihren Aufriß e_ψ'' und \bar{e}_ψ'' parallel zu b'' durch E'' bzw. \bar{E}'' gefunden. Die Schnittpunkte P'' und \bar{P}'' von e_ψ'' mit e_φ'' bzw. \bar{e}_ψ'' sind zwei Punkte des Aufrisses der Durchdringungskurve. Insbesondere liefert jene Hilfsebene, die den schiefen Zylinder längs der höchsten Erzeugenden berührt, den höchsten Punkt A'' und die Hilfsebene durch die Achse b den äußersten rechten Punkt B'' und den äußersten linken Punkt \bar{B}'' der Aufrißkurve.

Eine *zur Aufrißebene parallele Hilfsebene α* schneidet die Tonne φ in einer Erzeugenden e_α und den schiefen Kreiszylinder ψ in einem Kreis k_α . Die Erzeugende e_α ist drittprojizierend; ihr Kreuzriß e_α''' ist der Schnittpunkt von α''' mit dem Kreuzriß φ''' des Basiskreises der Tonne, ihr Aufriß e_α'' ist parallel zu a'' . Der Kreis k_α , der zum Leitkreis k des schiefen Zylinders kongruent ist, projiziert sich im Kreuzriß als doppeltüberdeckter Durchmesser k_α''' auf α''' und hat seinen Mittelpunkt M_α auf b . Im Aufriß erscheint k_α als ein zu k'' kongruenter Kreis k_α'' um M_α'' . Die Schnittpunkte Q'' und \bar{Q}'' von e_α'' und k_α'' sind zwei Punkte des Aufrisses der Durchdringungskurve.

Die *Tangente t'' im Punkte \bar{P}'' der Aufrißkurve* konstruiert man nach der *Methode der Tangentenebenen*. (Da der schiefe Kreiszylinder ψ keine Drehfläche ist, wäre die Normalenmethode wesentlich umständlicher.) Die *Tangentenebene τ_φ an die Tonne φ* ist drittprojizierend; ihre dritte Spur t_3^φ ist mit τ_φ''' identisch. Die zweite Spur t_2^φ geht durch den Knoten

$T''' = [t_3^{\varphi}, x_{23}]$ der Tangentenebene τ_{φ} und steht auf der Rißachse x_{23} senkrecht. Die Tangentenebene τ_{φ} an den einsteichenden schiefen Zylinder ψ wird von der Erzeugenden \bar{e}_{φ} des Punktes \bar{P} und der Tangente t_2^{φ} an den Leitkreis k im Spurpunkt \bar{E} der Erzeugenden \bar{e}_{φ} aufgespannt. Im Kreuzriß fällt $t_2^{\varphi'''}$ auf x_{23} , d. h. t_2^{φ} ist die Aufrißspur der Tangentenebene τ_{φ} . Der Schnittpunkt $T'' = [t_2^{\varphi}, t_2^{\varphi}]$ ist ein beiden Tangentenebenen τ_{φ} und τ_{φ} gemeinsamer Punkt und damit ein Punkt der gesuchten Tangente t , nämlich ihr Aufrißspurpunkt. Damit ist die Tangente $t'' = [\bar{P}''T'']$ im Punkte \bar{P}'' der Aufrißkurve bestimmt.

Um den *Mittelpunkt K des Scheitelschmiegleises im Scheitel A'' der Aufrißkurve* zu konstruieren, bedienen wir uns wieder des *Satzes von MEUSNIER*. Wir betrachten im folgenden eine Reihe von ebenen Schnitten des schiefen Kreiszyinders ψ durch den Punkt A , die alle die (drittprojizierende) Tangente im Punkt A an die Durchdringungskurve enthalten, die also sämtlich drittprojizierend sind und sich im Kreuzriß als Geraden durch A''' darstellen. Zunächst ist der zur Aufrißebene parallele Schnitt von ψ ein *Kreis*, der seinen Mittelpunkt M_A auf der Achse b hat. Der Normalschnitt ν , der die Zylindernormale im Punkt A enthält, also auf der Achse b senkrecht steht, ist eine Ellipse, deren Schmiegkreismitte K_{ν} aus $M_A = M_A'''$ nach dem Satz von MEUSNIER gewonnen wird: $[K_{\nu}, M_A'''] \perp [A'''M_A''']$. Für den schiefen Schnitt σ , der von der Tangentenebene an die Tonne φ in A auf dem schiefen Zylinder ψ erzeugt wird, erhält man den Schmiegkreismittelpunkt K_{σ} als Fußpunkt des Lotes von K_{ν} auf σ . Da die Ebene σ die *Schiegelebene der Durchdringungskurve im Punkt A* ist, ist K_{σ} zugleich der *Schiegkreismittelpunkt für die Durchdringungskurve in A* . Den Schmiegkreismittelpunkt K im Punkte A'' ihrer Aufrißprojektion findet man nun nach MEUSNIER aus dem Kreuzriß über den Punkt $K = K'''$, in dem das Lot von K_{ν} auf σ die Parallele zur Rißachse x_{23} durch A''' trifft. Für den durch die Raumkurve gelegten aufrißprojizierenden Zylinder ist nämlich K_{σ} die Schmiegkreismitte des schiefen Schnittes σ und K die Schmiegkreismitte des zugehörigen Normalschnittes in A .

68. Die Durchdringung einer Rohrfläche mit einem Drehkegel

Eine *Ringfläche* kann als *Hüllfläche einer Schar von Kugeln mit festem Radius r* erzeugt werden, deren *Mittelpunkte M* auf einem festen Kreis, dem *Mittlenkreis m* , liegen.

Wählt man allgemeiner als *Mittlenkurve* eine beliebige (ebene oder räumliche) *Kurve m* , auf der man den *Mittelpunkt M* einer beliebigen Kugel mit

festem Radius r wandern läßt, dann ist die *Hüllfläche* aller dieser Kugeln eine *Rohrfläche*.

Auf einer beliebigen ebenen *Mittenkurve* m werde der Mittelpunkt einer Kugel vom festen Radius r verschoben. Im Grundriß (die Grundrißebene

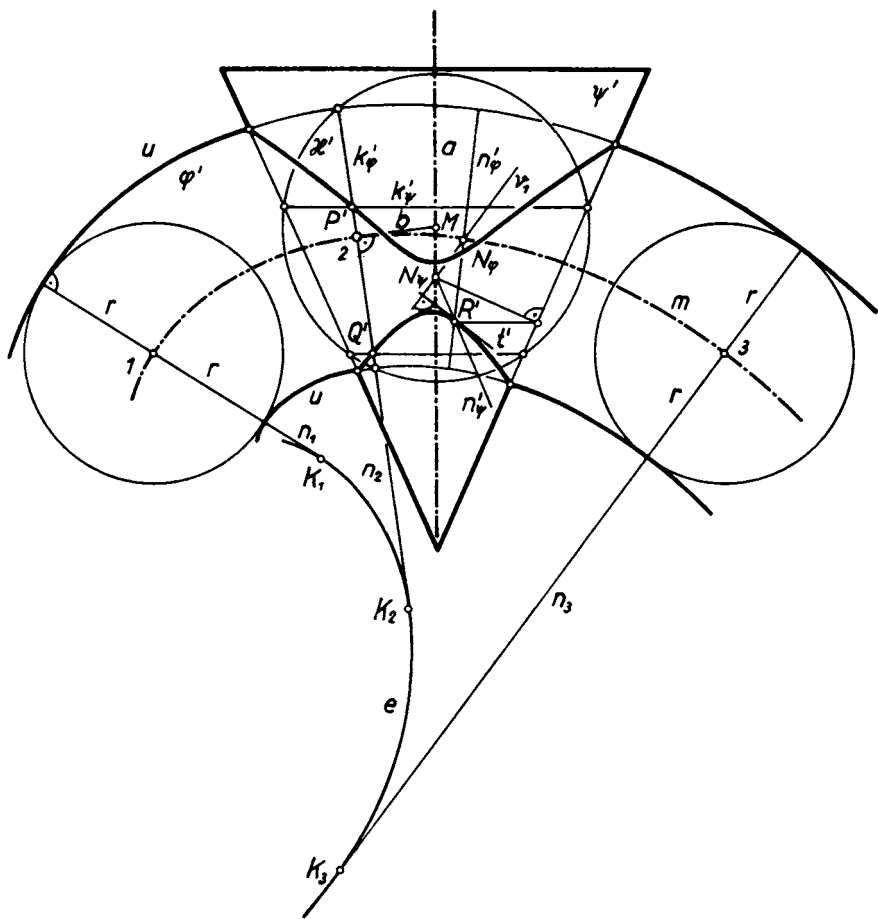


Fig. 185. Durchdringung einer Rohrfläche φ (ebene Mittenkurve m , Querschnittsradius r) mit einem Drehkegel ψ (Drehachse a in der Ebene von m)

sei die Ebene der Mittenkurve m) erscheinen die Umrisse der einzelnen Kugeln als Kreise vom Radius r , deren Mittelpunkte auf m liegen (Fig. 185). Die Hüllkurve dieser Umrißkreise ist dann der scheinbare (hier zugleich der wahre) erste Umriß $u' = u$ der erzeugten Rohrfläche φ . Jede dieser Kugeln berührt die Rohrfläche längs eines Großkreises, dessen Ebene

im Kugelmittelpunkt zur Mittenkurve m normal ist. Da sich jeder solche Berührungskreis im Grundriß als der zu m normale Durchmesser des Umrißkreises projiziert, sind die Endpunkte der zu m normalen Durchmesser jeweils Punkte der ersten Umrißkurve der Rohrfläche.

Allgemein gilt somit (auch für Rohrflächen mit nichtebener Mittenkurve m) der

Satz 1: *Der scheinbare Umriß einer Rohrfläche in irgendeinem Normalriß besteht aus zwei Parallelkurven zum Riß ihrer Mittenkurve.*

Die Normale in einem beliebigen Punkt des Risses der Mittenkurve ist zugleich auch Normale der beiden die Kontur der Rohrfläche darstellenden Parallelkurven. Die Schar der Normalen n einer (krummen) ebenen Linie m hüllt eine Kurve e ein, die als Evolute der Kurve m bezeichnet wird. Dabei sind die Berührungspunkte K der Normalen n mit der Evolute e nach den Lehren der Differentialgeometrie gerade die Schmiegekreismittelpunkte der Kurve m . Die Evolute e der Kurve m ist also der Ort der Schmiegekreismitten K von m . Es folgt so allgemein:

Satz 2: *Die beiden Teile der scheinbaren Umrißkurve einer Rohrfläche haben dieselbe Evolute und damit dieselben Schmiegekreismitten wie der Riß der Mittenkurve m der Rohrfläche.*

Weil auf einer Rohrfläche Kreise liegen (Berührungskreise mit den erzeugenden Kugeln) besteht Aussicht, in gewissen Fällen auf einfache Art die Verschneidung einer Rohrfläche mit einer Drehfläche mittels geeigneter Hilfskugeln zeichnen zu können. Wir zeigen dies (Fig. 185) an dem folgenden einfachen

Beispiel: *Der Schnitt zwischen einer Rohrfläche φ (mit ebener Mittenkurve m) und einer beliebigen Drehfläche ψ (z. B. einem Drehkegel) kann, falls die Achse a der Drehfläche in der Ebene der Mittenkurve liegt, mittels Hilfskugeln κ konstruiert werden. Wählt man die Ebene der Mittenkurve m als Grundrißebene, dann liegt unter den getroffenen Voraussetzungen auch die Achse a in der Grundrißebene. Die Konturkurven der beiden Flächen φ und ψ schneiden sich dann in Punkten, die der Durchdringungskurve angehören. Weitere Punkte findet man durch folgende Überlegung: Ein beliebiger, ebener, zur Mittenkurve m normaler Schnitt der Rohrfläche ist ein Kreis k_φ . Seine Achse b (= Tangente an die Mittenkurve im Mittelpunkt dieses Kreises) schneidet die Achse a der Drehfläche ψ in einem Punkt M . Um diesen Punkt M kann nun eine Kugel κ gelegt werden, die aus der Rohrfläche φ gerade den Kreis k_φ ausschneidet. Diese Kugel κ trifft aber auch die Drehfläche ψ in einem (oder mehreren) Kreis k_ψ .*

Die Schnittpunkte P dieser Schnittkreise k_φ und k_ψ sind Punkte der Durchdringungskurve. Im Grundriß erscheinen diese Kreise als Sehnen k'_φ und k'_ψ des Umrißkreises der Hilfskugel κ um M ; sie bestimmen als ihren Schnittpunkt den (doppeltüberdeckten) Punkt P' des Grundrisses der Durchdringungskurve.

Auch die *Tangentenkonstruktion* kann leicht nach der *Normalenmethode* ausgeführt werden. Fig. 185 zeigt sie für den Punkt R' . Die Normale n_φ der Rohrfläche φ in P steht auf der Mittenkurve m senkrecht und trifft sie im Punkt N_φ . Die Normale n_ψ des Kegels ψ geht durch die Spitze N_ψ des Normalenkegels. Dann ist die Gerade $[N_\varphi, N_\psi]$ eine erste Hauptlinie ν_1 der Normalebene $\nu = [n_\varphi, n_\psi]$ der Durchdringungskurve in R , und der Grundriß t' der Tangente t steht auf $\nu_1 = [N_\varphi, N_\psi]$ senkrecht.

69. Der Normalumriß einer Ringfläche bei geneigter Achse

Ist die Achse a einer Drehfläche zur Aufrißebene parallel, so besteht ihre Kontur im Aufriß aus den beiden zur Aufrißebene parallelen Hauptmeridiankurven und, falls vorhanden, den gemeinsamen, zur Achse senkrechten Tangenten an diese Meridiankurven. Steht die Achse a der Drehfläche auf der Aufrißebene senkrecht, dann wird ihr zweiter scheinbarer Umriß von dem größten und, falls vorhanden, dem kleinsten Parallelkreis gebildet.

Bei beliebiger Achsenlage berühren die zur Aufrißebene senkrechten Projektionsstrahlen die Drehfläche längs ihres zweiten wahren Umrisses (der wahren Aufrißkontur der Drehfläche). Ihre Projektion ist dann die scheinbare Aufrißkontur der Drehfläche. Der wahre Umriß der Drehfläche kann daher aufgefaßt werden als die (doppelt zu zählende) Durchdringungskurve der Drehfläche und ihres berührend umschriebenen, auf der Aufrißebene senkrecht stehenden Sehstrahlenzylinders. Die Aufrißspur dieses berührenden Sehstrahlenzylinders ist dann mit dem zweiten scheinbaren Umriß der Drehfläche identisch.

Als Beispiel einer Drehfläche sei ein *Torus* gewählt, dessen Achse a zur Kreuzrißebene parallel und gegen die Aufrißebene geneigt ist (Fig. 186). Im *Kreuzriß* besteht der scheinbare Umriß des Torus aus zwei bezüglich a''' symmetrischen Kreisen und den beiden (zu a''' senkrechten) gemeinsamen Tangenten dieser Hauptmeridiankreise m_1''' und m_2''' . Der Mittenkreis m des Torus erscheint dabei (mit seinem reellen Zuge) als Verbindungsstrecke der beiden Kreismittelpunkte. Im *Aufriß* stellt sich der Mittenkreis als *Ellipse* m'' dar, die das Bild O'' der Torusmitte O zum Mittelpunkt hat und deren große Achse horizontal liegt und gleich dem Durchmesser

des Mittenkreises m ist, während die Endpunkte ihrer kleinen Achse auf a'' liegen und aus den Mittelpunkten der Hauptmeridiankreise m_1''' und m_2''' hervorgehen.

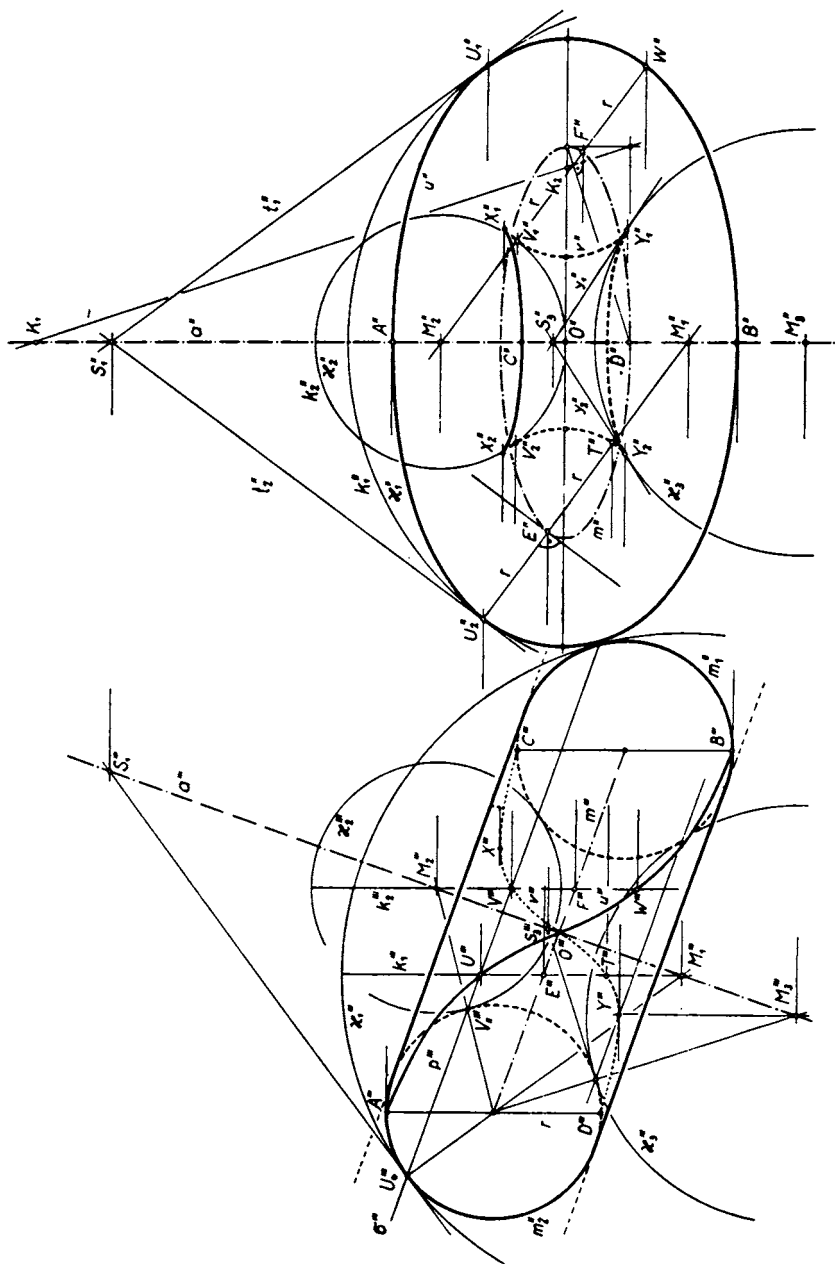


Fig. 186. Normalumriß einer Ringfläche, deren Achse a gegen die Bildebene π geneigt ist. Der sichtbare Umriss der Ringfläche ist eine Parallelkurve des elliptischen Normalrisses m'' des Mittenkreises m (Toroides, hier mit vier reellen Spitzen)

Um den *scheinbaren Umriß des Torus im Aufriß* zu gewinnen, legen wir eine beliebige Normalebene σ zur Achse a des Torus, die den Torus in zwei Parallelkreisen p schneidet, von denen der eine auf dem Wulst, der andere auf der Kehle liegt. Im Kreuzriß stellt sich diese Normalebene σ als Normale σ''' zur Achse a''' dar. *Längs des äußeren* (auf dem Toruswulst liegenden) *Parallelkreises p umschreiben wir dem Torus die berührende Kugel κ_1 , die ihren Mittelpunkt M_1 auf a hat.* Der scheinbare Umriß dieser Kugel κ_1 ist im Kreuzriß ein Kreis κ_1''' , der den Hauptmeridian m_2''' im Punkt U_0''' (Schnittpunkt von m_2''' mit p''') berührt. Der Mittelpunkt M_1''' von κ_1''' liegt daher auf dem durch U_0''' gehenden Durchmesser des Hauptmeridians m_2''' . Der wahre zweite Umriß dieser berührenden Kugel κ_1 ist der zur Aufrißebene parallele Großkreis k_1 von κ_1 . Im Aufriß erscheint er in wahrer Gestalt als Kreis k_1'' um M_1'' , im Kreuzriß als der lotrechte Durchmesser k_1''' des Kreises κ_1''' durch M_1''' . Sein Schnittpunkt U''' mit p''' ist somit der Kreuzriß der beiden auf dem Parallelkreis p befindlichen Punkte U_1 und U_2 der gesuchten (äußeren) zweiten Umrißkurve u des Torus. Ihm entsprechen im Aufriß die beiden Punkte U_1'' und U_2'' auf k_1'' . Damit hat man zwei Punkte U_1'' und U_2'' der zweiten äußeren Umrißkurve u des Torus im Aufriß und einen (doppeltüberdeckten) Punkt $U''' = U_1''' = U_2'''$ dieser Umrißkurve u im Kreuzriß gefunden. Beliebige weitere Punkte ergeben sich nach der gleichen Konstruktion dadurch, daß man die Ebene σ parallel verschiebt. Insbesondere liefern die Ebenen durch den höchsten Punkt A bzw. den tiefsten Punkt B des Torus den Kreuzriß und den Aufriß des höchsten und des tiefsten Punktes der Umrißkurve u , d. h. den *oberen und unteren Scheitel* ihres Aufrisses u'' . Für die durch den Mittelpunkt O des Torus gelegte Hilfsebene σ ergeben sich *der rechte und der linke Scheitel* der zweiten scheinbaren Umrißkurve u'' , die sich im Kreuzriß mit dem Punkt O''' überdecken.

Um im Aufriß die *Tangenten* in den Punkten U_1'' und U_2'' der zweiten scheinbaren Umrißkurve u'' zu finden, konstruieren wir die beiden *Umrißerzeugenden t_1'' und t_2'' jenes Drehkegels mit der Achse a , der dem Torus längs des Parallelkreises p berührend umschrieben ist.* Die den Hauptmeridiankreis m_2''' des Torus im Punkte U_0''' berührende Tangente schneidet als Mantellinie des Kegels die Achse a''' im Kreuzriß S_1''' der Spitze S_1 dieses Berührungskegels. Der Aufriß S_1'' der Kegelspitze liegt dann auf a'' , und die Geraden $t_1'' = [S_1'', U_1'']$ bzw. $t_2'' = [S_1'', U_2'']$ sind als Aufrißkonturen des Kegels die gesuchten Tangenten an den zweiten scheinbaren Torusumriß u'' in den Punkten U_1'' und U_2'' . Diese Geraden

sind zugleich Tangenten an den Umrißkreis k_1'' der (dem Berührungskegel eingeschriebenen) Kugel κ_1 , so daß die Tangenten t_1'' und t_2'' an die Umrißkurve u'' auch ohne Benutzung des Berührungskegels konstruiert werden können.

Die Hilfsebene σ schneidet auf der Kehle des Torus den inneren Parallelkreis p aus, längs dessen eine zweite Berührungskugel κ_2 gelegt werden kann. Ihr Mittelpunkt M_2 läßt sich im Kreuzriß ähnlich wie der Mittelpunkt M_1 der ersten Hilfskugel κ_1 konstruieren. Der zweite Umrißkreis k_2 von κ_2 liefert auf dem inneren Parallelkreis p die Punkte V_1 und V_2 des inneren Teiles v der Umrißkurve, die sich im Kreuzriß im Punkte V''' doppelt überdecken. Die Tangenten in den Punkten V_1'' und V_2'' sind identisch mit den Tangenten an den zweiten scheinbaren Umrißkreis k_2'' der Kugel κ_2 , d. h. sie stehen auf den Radien $[M_2'' V_1'']$ bzw. $[M_2'' V_2'']$ senkrecht. Die spezielle Hilfsebene, die zuvor die Scheitel A'' und B'' auf dem äußeren Parallelkreis lieferte, führt auf dem inneren Parallelkreis zu dem oberen und unteren Scheitel C'' bzw. D'' der inneren Konturkurve v'' . Und die durch O gelegte Hilfsebene ergibt, ähnlich wie zuvor, ihren rechten und ihren linken Scheitel.

Wie Fig. 186 zeigt, besteht die zweite wahre Umrißkurve des Torus aus zwei Zweigen, von denen der eine (u) auf dem Wulstteil der Fläche, der andere (v) auf ihrer Kehle verläuft. Im Kreuzriß verlaufen die Zweige u''' und v''' asymptotisch gegen den Kreuzriß des höchsten und tiefsten Parallelkreises. Im Aufriß ist der äußere Zweig u'' des Umrisses eine ovale Kurve, während der innere Zweig v'' bei der zugrunde gelegten Achsenneigung vier Spitzen X_1'', X_2'' und Y_1'', Y_2'' besitzt. Diese vier Spitzen sind höchste und tiefste Punkte der Kurve v'' . Sie lassen sich dadurch festlegen, daß man an den Kreuzriß v''' die horizontalen Tangenten legt und deren Berührungspunkte X''' , Y''' mittels der zugehörigen Berührungskugel κ_3 (Mittelpunkt M_3) in den Aufriß überträgt. Auch die Tangenten an die Spitzen lassen sich nach den oben besprochenen Konstruktionen (etwa als Tangenten von κ_3') bestimmen: Sie sind in Fig. 186 für die Punkte Y_1'' und Y_2'' eingezeichnet.

Der Torus kann auch als Hüllfläche einer Schar von Kugeln vom festen Radius r aufgefaßt werden, deren Mittelpunkte auf dem Mittenkreis m liegen. Bei einer beliebigen Normalprojektion stellen sich diese Kugeln als Kreise vom festen Radius r dar, deren Mittelpunkte auf dem elliptischen Riß m'' des Mittenkreises liegen. Daraus folgt aber, daß die Umrißkurve (u'' , v'') des Torus die Hüllkurve einer Schar von Kreisen vom

Radius r ist, deren Mittelpunkte auf m'' liegen. Da der Mittenkreis m sich als Ellipse m'' projiziert, ist der Aufriß der Umrißkurve (u'', v'') des Torus eine Parallelkurve zu dieser Ellipse und besitzt daher die gleiche Evolute und die gleichen Schmiegkreismittelpunkte wie diese Ellipse. Ins-

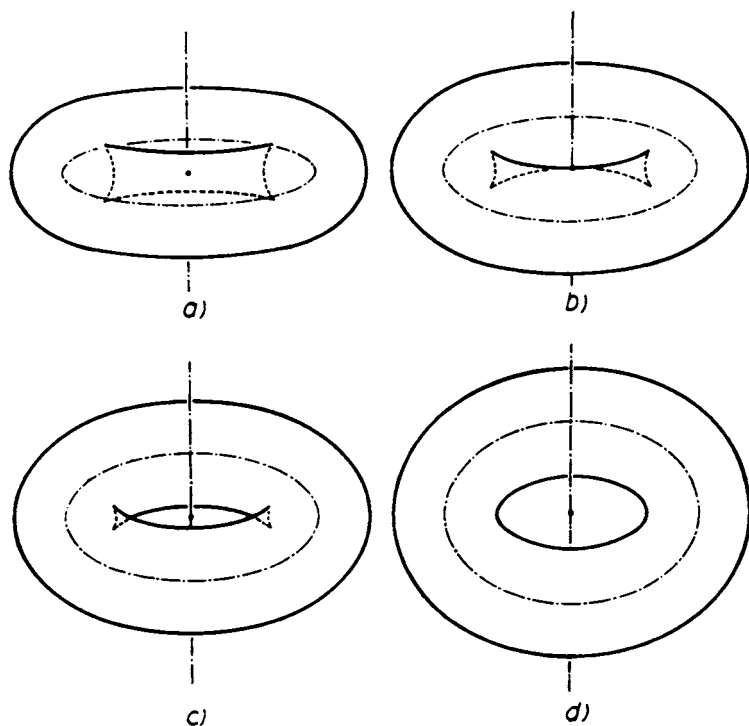


Fig. 187. Vier verschiedene Gestalten des scheinbaren Normalumrisses einer Ringfläche

besondere sind die Schmiegkreismitten K_1 und K_2 für die Ellipsenscheitel zugleich auch die Schmiegkreismitten für die Scheitel B'', C'' usw. der Umrißkurve (u'', v'').

Die scheinbare Umrißkurve einer Ringfläche bei Normalprojektion (d. h. die Parallelkurve einer Ellipse), die, je nach der gewählten (gegen die Torusachse geneigten) Sehrichtung, eine der in Fig. 187 *a—d* gezeichneten Gestalten hat, wird nach BRETON DE CHAMP (1844) als *Toroide* bezeichnet. Die Toroide ist eine *ebene algebraische Kurve 8. Ordnung* mit acht Doppelpunkten (von denen zwei reell sein können) und zwölf Spitzen (Rückkehrpunkten, von denen vier reell sein können), sie ist ferner von 4. Klasse (d. h. aus jedem Punkt der Ebene gehen an sie vier Tangenten) und hat zwei Doppeltangenten.

XVI

Schraublinien und Schraubflächen

70. Die Schraublinie

Bei einer *Drehung um eine feste Achse* im Raum beschreibt jeder Punkt des Raumes einen Kreis in einer achsennormalen Ebene. Bei einer *Verschiebung in einer festen Richtung* sind die Bahnkurven der Raumpunkte Geraden parallel zu dieser Richtung. Die Überlagerung beider Raumbewegungen ist eine **Schraubung**, wenn die *Verschiebung in Richtung der Drehachse* erfolgt und wenn die *Schubstrecke* z zum *Drehwinkel* φ *proportional* ist:

$$(1) \quad z = p \cdot \varphi.$$

Die Drehachse, die zugleich die Schubrichtung angibt, heißt die *Schraubachse*, der Proportionalitätsfaktor p zwischen dem Drehwinkel φ und der Schubstrecke z heißt *Parameter der Schraubung*. Die Bahnkurven der Punkte des Raumes bei einer Schraubung heißen **Schraublinien**.

Der *Drehwinkel* φ ist dabei im *Bogenmaß* zu messen (Winkeleinheit 1 Radiant), d. h. φ ist die Länge des zum Drehwinkel am Einheitskreis gehörenden Bogens. Ist α° das Gradmaß eines Winkels, φ sein Bogenmaß, so besteht die Proportion

$$(2) \quad \alpha^\circ : \varphi = 360^\circ : 2\pi = 180^\circ : \pi$$

oder

$$(3) \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ,$$

aus der das *Gradmaß für 1 Radiant* ($\varphi = 1$) sich zu

$$(4) \quad 1 \text{ Radiant} \triangleq \frac{180^\circ}{\pi} = 57,2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

ergibt. Da zu dem Winkel $\varphi = 1$ nach (1) die Schubstrecke $z = p$ gehört, ist der *Parameter p der Schraubung* gleich jener *Schubstrecke, die zu einer Drehung um den Winkel von 1 Radiant gehört*.

Einer *vollen Umdrehung* um den Winkel $\varphi = 2\pi$ entspricht nach (1) eine Verschiebung um die Strecke

$$(5) \quad h = 2p\pi,$$

die als *Ganghöhe der Schraubung* bezeichnet wird. Aus ihr folgt für den *Schraubparameter* p (oder die auf den Winkel $\varphi = 1$ reduzierte Ganghöhe)

$$(6) \quad p = \frac{h}{2\pi}.$$

Es gibt, wenn man auf den *Schraubsinn* achtet, zwei Arten von *Schraubungen*:

Denkt man sich die Schraubachse als z -Achse eines rechtshändigen räumlichen cartesischen Koordinatensystems, und wählt man als Schubrichtung die Richtung der positiven z -Achse, dann ist die Schraubung eine

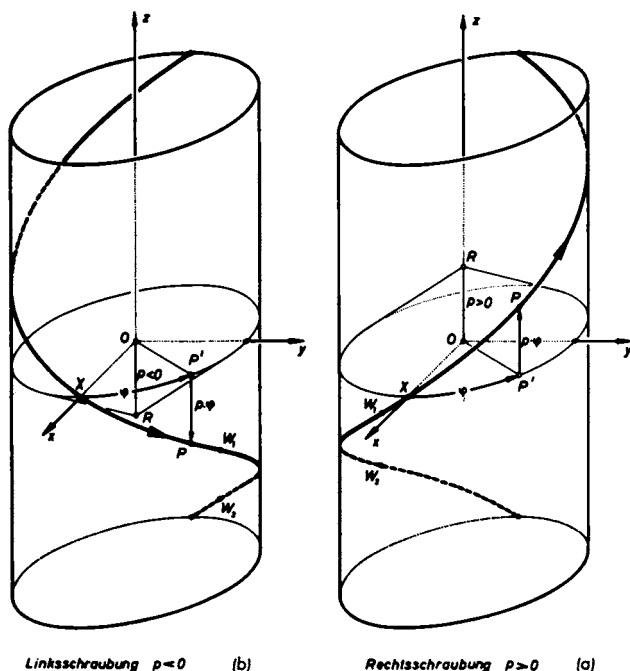


Fig. 188. Schraubung des Raumes um die z -Achse (Ganghöhe h , Parameter $p = h/2\pi$) mit der Bahnschraublinie eines Punktes P und ihrem Schraubzylinder

positive Schraubung oder *Rechtsschraubung*, wenn die zugehörige Drehung in der (x, y) -Ebene im mathematisch positiven Sinn erfolgt, d. h. in jenem Drehsinn, der die positive x -Achse mit einer positiven 90° -Drehung (Links-umdrehung) in die positive y -Achse überführt (Fig. 188a). Zu einer Rechtsschraubung gehört ein *positiver Schraubparameter* ($p > 0$). Eine Schraubung mit gleicher (positiver) Schubrichtung aber entgegengesetztem (negativem) Drehsinn (Rechtsumdrehung) ist eine *negative* oder *Linksschraubung*,

zu der ein *negativer Parameter* ($p < 0$) gehört (Fig. 188 b). Steigt man längs einer Schraubenlinie nach oben ($p\varphi > 0$), dann wandert man bei einer rechts-

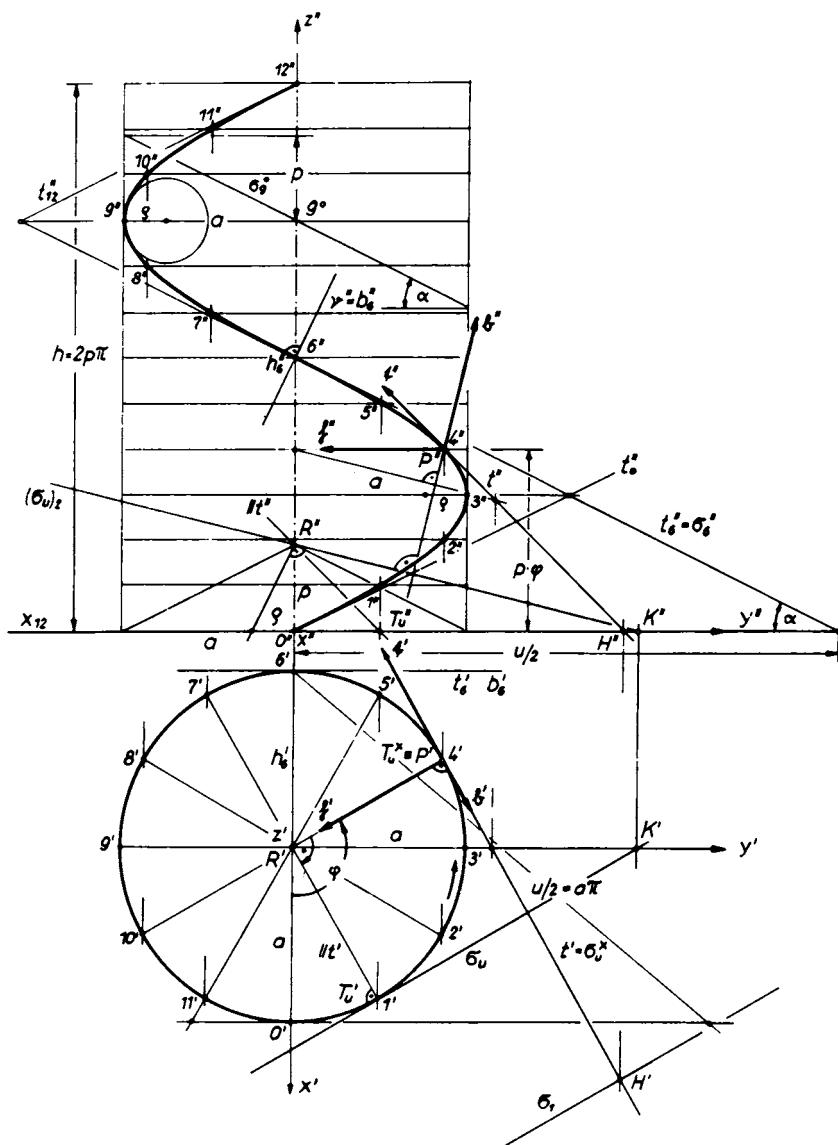


Fig. 189.. Darstellung einer Schraubenlinie (Bahnschraubenlinie des Punktes 0). Grundriß: Kreis, Aufriß: Sinuslinie. Richtkegel (Scheitel R , Höhe p). Fluchtpunkt T_u und Drehfluchtpunkt T_u^x der Bahntangente des Punktes P . Fluchtgerade σ_u und Drehfluchtgerade σ_u^x der Bahnschmiegeebene σ des Punktes P . Begleitendes Dreibein (t, n, b) der Schraubenlinie in P

gängigen Schraublinie rechts, bei einer linksgängigen links von der Schraubachse.

Umläuft man die Schraubachse im positiven Sinn ($\varphi > 0$), dann wandert man auf einer rechtsgängigen Schraublinie ($p > 0$) nach oben ($z = p\varphi > 0$), auf einer linksgängigen Schraublinie ($p < 0$) nach unten ($z = p\varphi < 0$). Das zeigen die Figuren 188a und 188b, in denen jeweils ein voller Gang der Schraublinien dargestellt ist.

Von einer *rechtsgängigen Schraublinie* sei die Achse z , der *Schraubradius* a und die *Ganghöhe* h gegeben. Wählt man die Schraubachse senkrecht zur Grundrißebene, dann erscheint die Schraublinie im *Grundriß* als *Kreis um z' mit dem Radius a* (Fig. 189). Zur punktweisen *Konstruktion des Aufnisses* eines Ganges der Schraublinie teilen wir den Grundrißkreis in 12 gleiche Teile ein und unterteilen die auf der z -Achse im Aufriß aufgetragene Ganghöhe h ebenfalls in 12 gleichgroße Teilstrecken. Hat sich der verschraubte Punkt, beginnend im Punkt 0 in der Grundrißebene, in positivem Sinn um den Winkel 30° nach $1'$ gedreht, so hat er sich im Aufriß gleichzeitig um $1/12$ der Ganghöhe h aus der Lage $0''$ in die Lage $1''$ gehoben. Entsprechend findet man die weiteren Punkte $2'', 3'', \dots, 12''$ der Aufrißkurve, indem man den Grundriß des Punktes jeweils um $1/12$ des Kreisumfanges weiterdreht und gleichzeitig seinen Aufriß um jeweils $h/12$ hebt.

Zur *analytischen Darstellung der Schraublinie* führen wir ein räumliches cartesisches Koordinatensystem ein, dessen z -Achse auf der Schraubachse liegt, während die x - und die y -Achse so in der Grundrißebene liegen, daß die *positive x -Achse den Anfangspunkt 0 der Schraublinie enthält*. Ist φ der Drehwinkel (Bogenmaß!) eines beliebigen Punktes P der Schraublinie, gemessen von der positiven x -Richtung aus, so lauten die Koordinaten von P

$$(7) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = a \sin \varphi, \\ z = p\varphi. \end{cases}$$

Aus dieser *Parameterdarstellung der Schraublinie* findet man als *Parameterdarstellung* bzw. als Gleichung für ihren *Grundriß* den *Kreis (Grundrißkreis oder Grundkreis)*

$$(8) \quad \left. \begin{array}{l} x = a \cos \varphi, \\ y = a \sin \varphi, \end{array} \right\} \text{ also } x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0,$$

und als Parameterdarstellung bzw. Gleichung für ihren *Aufriß* die *Sinuslinie*

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} y &= a \sin \varphi, \\ z &= p \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ also } y = a \sin \frac{z}{p}, \quad x = 0,$$

schließlich als Parameterdarstellung bzw. Gleichung für ihren *Kreuzriß* die *Cosinuslinie*

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi, \\ z &= p \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ also } x = a \cos \frac{z}{p}, \quad y = 0.$$

Daraus folgt

Satz 1: *Der Aufriß einer Schraublinie, deren Achse zur Grundrißebene senkrecht steht, ist eine Sinuslinie, deren Amplitude gleich dem Schraubradius a und deren Wellenlänge gleich der Ganghöhe $2p\pi$ der Schraublinie ist.*

Da der verschraubte Punkt stets den konstanten Abstand a von der Schraubachse besitzt, liegt die Schraublinie auf einem Drehzylinder vom Radius a , ihrem *Schraubzylinder*. Wickelt man den (etwa längs der Mantellinie des Punktes 0 aufgeschnittenen) Schraubzylinder samt der auf ihm liegenden Schraublinie in die Ebene ab, dann geht die *Schraublinie* wegen der Proportionalität zwischen z und φ in eine *Gerade* über.

Die *kürzeste Verbindungslinie* z zwischen zwei (genügend nahen) Punkten einer Fläche heißt eine *geodätische Linie* der Fläche. Läßt sich die Fläche (wie das bei dem Schraubzylinder zutrifft) in die Ebene abwickeln, dann gehen diese geodätischen Flächenkurven in die geodätischen Linien der Ebene, d. h. in Geraden über. Daher gilt

Satz 2: *Die Schraublinien sind die geodätischen Linien des Schraubzylinders.*

Der *Anstieg* $\operatorname{tg} \alpha$ der durch diese Abwicklung einer Schraublinie entstehenden Geraden gegen den (in eine horizontale Gerade gestreckten) Basiskreis des Schraubzylinders ist das Verhältnis der Ganghöhe $h = 2p\pi$ zum Umfang $u = 2a\pi$ dieses Basiskreises

$$(11) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{u} = \frac{2p\pi}{2a\pi} = \frac{p}{a}.$$

Da bei der Abwicklung des Schraubzylinders der Winkel zweier Flächenkurven nicht geändert wird, folgt, daß die *Schraublinie* alle *Erzeugenden* des Schraubzylinders unter dem konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ schneidet. Ihre *Tangenten* schließen daher mit der Grundrißebene den konstanten Winkel α ein. Raumkurven, deren Tangenten gegen eine feste Ebene konstante Neigung besitzen, heißen nach EMIL MÜLLER *Böschungslinien*. Also gilt

Satz 3: Die Schraublinie (7) ist bezüglich der zur Schraubachse normalen Ebenen eine Böschungslinie mit der festen Steigung $\operatorname{tg} \alpha = p/a$.

Über den festen Schraubzylinder denken wir uns einen zweiten, beweglichen Schraubzylinder gleicher Abmessung geschoben und auf beiden dieselbe Schraublinie gezeichnet. Verschrauben wir nun den beweglichen Zylinder um seine Achse mit dem Parameter p der Schraublinie, so verschiebt sich jeder Punkt der beweglichen Schraublinie auf der festen Schraublinie, d. h. die Schraublinie geht durch Verschrauben in sich über oder

Satz 4: Die Schraublinie ist in sich selbst verschiebbar.

Die Tangente t_6 im Punkte 6 der Schraublinie, deren Aufriß t_6'' die Wendetangente im Punkte 6'' der Sinuslinie ist (Fig. 189), liegt in der aufrißparallelen (hinteren) Tangentenebene des Schraubzylinders. Der Steigungswinkel α dieser Tangente erscheint im Aufriß in wahrer Größe. Trägt man daher vom Aufriß 0'' des Horizontalspurpunktes der Schraubachse aus auf der Rißachse x_{12} den halben Umfang $u/2 = a\pi$ des nach ADAM KOCHANSKY rektifizierten Grundkreises auf, so geht die Tangente t_6'' des Punktes 6'', dessen Erhebung gleich $h/2 = p\pi$ ist, wegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a} = \frac{p\pi}{a\pi}$ durch den Endpunkt dieser Strecke. Die Wendetangenten t_0'' und t_{12}'' in den Wendepunkten 0'' und 12'' der Sinuslinie findet man dann aus t_6'' durch Spiegelung an den horizontalen Geraden $z = \frac{h}{4}$ bzw. $z = \frac{3h}{4}$.

Verschiebt man (Fig. 190) die Tangenten t aller Punkte P der Schraublinie parallel zu sich so, daß sie alle durch den festen Punkt $R = (0, 0, p)$

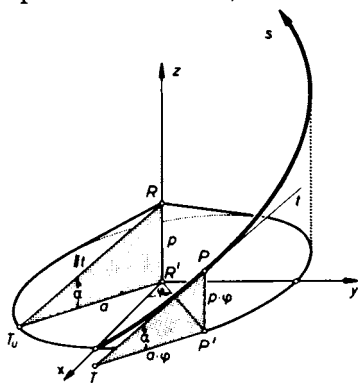


Fig. 190. Konstruktion der Tangente t der Schraublinie im Punkte P (Bahntangente t des Punktes P) mittels des Richtkegels (Scheitel R , Höhe p) und des Fluchtpunktes T_u der Bahntangente t von P (Erläuterung)

gehen, der auf der Schraubachse z in der Höhe p über bzw. unter der Grundrißebene liegt (je nachdem $p > 0$ oder $p < 0$ ist), so bilden diese verschobenen Tangenten, da sie alle dieselbe Neigung aufweisen, einen Drehkegel, den Richtkegel der Schraublinie. Weil die Spitze R dieses Richtkegels auf der Schraubachse z in der Höhe p liegt und die Neigung seiner Erzeugenden gleich $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a}$ ist, hat sein in der Grundrißebene $z=0$ liegender Basiskreis den Radius a und fällt

daher mit dem *Grundrißkreis der Schraublinie* zusammen. Also gilt (Fig. 190)

Satz 5: *Der Richtkegel einer Schraublinie (Radius a , Parameter p) ist jener Drehkegel, welcher ihren Grundrißkreis (Radius a) mit dem Punkte $R = (0, 0, p)$ der Schraubachse verbindet. Dieser für alle Bahnschraublinien der Schraubung (vom Parameter p um die Schraubachse z) feste Punkt $R = (0, 0, p)$ liegt auf der Schraubachse z in der reduzierten Ganghöhe $p = h/2\pi$ über ($p > 0$) oder unter ($p < 0$) der Grundrißebene $z = 0$. Die Mantellinien des Richtkegels sind parallel zu den Tangenten der Schraublinie.*

Die Konturerzeugenden des Richtkegels im Aufriß sind parallel zu den Wendetangenten des sinusförmigen Aufrisses der Schraublinie. Daraus ergibt sich die einfachste Konstruktion der Spitze R des Richtkegels.

Mit Hilfe des Richtkegels läßt sich auf einfache Weise die *Tangente t der Schraublinie in einem beliebigen Punkte P* (z. B. in 4) konstruieren, die man auch als die *Bahntangente t des Punktes P* bei der durch die Schraubachse z und den Parameter p gegebenen Schraubung bezeichnet (Fig. 189). Die zu t parallele Erzeugende des Richtkegels geht durch R und schneidet den Grundkreis in einem Punkt T_u , der aus dem Grundriß P' des Punktes P durch eine *negative Vierteldrehung um z'* hervorgeht. Faßt man die *Spitze R des Richtkegels als Auge* und die *Grundrißebene als Bildebene* auf, dann kann man die zu t parallele Erzeugende des Richtkegels als den zu t gehörigen *Fluchtstrahl* und den *Spurpunkt T_u* dieses Fluchtstrahls als den **Fluchtpunkt der Tangente t** ansprechen. Also gilt

Satz 6: *Faßt man die Spitze R des Richtkegels der Schraubung als Augpunkt und die Grundrißebene als Bildebene einer Perspektive auf, so erhält man den Fluchtpunkt T_u der Bahntangente t der Bahnschraublinie eines Raumpunktes P , indem man den Grundriß P' von P um den Spurpunkt der Schraubachse $z' = R'$ im negativen Sinne (also rechtsum) um einen rechten Winkel schwenkt. Die Bahntangente t von P ist dann zu der Geraden $[RT_u]$ parallel.*

Da die *Tangente t der Bahnschraublinie des Punktes P* in der Tangentenebene des Schraubzylinders liegt, ist ihr *Grundriß t'* die *Tangente an den Grundkreis im Punkt P'* (Fig. 189). Ihr *Aufriß t''* ergibt sich durch folgende Konstruktion: Man dreht den Punkt P' im Grundriß im negativen Sinn um $\pi/2$ in den *Fluchtpunkt $T_u - T'_u$* der Tangente t . Sein Aufriß T''_u liegt auf der Rißachse x_{12} und bestimmt mit $[R''T''_u] = t''$ den *Aufriß des Fluchtstrahls t von t* . Zu ihm ist der durch P'' laufende Aufriß t'' der Tangente t der Schraublinie im Punkte P parallel.

Im Punkt 6 der Schraublinie legen wir durch die Bahntangente t_6 der Schraublinie die zweitprojizierende Ebene σ_6 . Die Schraublinie berührt im Punkt 6 diese Ebene und durchsetzt sie zugleich, da σ_6'' mit der Wendetangente t_6'' des Aufrißbildes der Schraublinie zusammenfällt. Es liegt also (ähnlich wie bei dem Schmiegekreis einer ebenen Kurve) eine Berührung höherer Ordnung zwischen der Schraublinie und dieser Ebene σ_6 vor, und zwar eine *Berührung 2. Ordnung* oder eine *dreipunktige Berührung*. Unter den Ebenen des Büschels mit der Bahntangente t_6 als Achse ist die Ebene σ_6 dadurch ausgezeichnet, daß sie mit der Kurve nicht nur zwei sondern drei in den Punkt 6 zusammengerückte Punkte gemeinsam hat. Die Ebene σ_6 heißt daher die *Schmiegeebene* der Schraublinie im Punkte 6.

Die *Normalebene* ν der Schraublinie, die im Punkt 6 auf der Bahntangente t_6 senkrecht steht, schneidet die Schmiegeebene σ in einer zweitprojizierenden Geraden h_6 . Diese *ausgezeichnete Normale* der Schraublinie heißt ihre *Hauptnormale* h_6 im Punkte 6. Es folgt

Satz 7: *Die Hauptnormale h in einem Punkte P der Schraublinie ist das Lot aus P auf die Schraubachse, d. h. ein Zylinderradius. Sie spannt zusammen mit der Tangente t die Schmiegeebene σ der Schraublinie im Punkte P (Bahnschmiegeebene des Punktes P) auf.*

Das orthogonale Zweibein aus Tangente und Hauptnormale im Punkt P der Schraublinie kann man zu einem orthogonalen Dreibein ergänzen, indem man als zweite ausgezeichnete Kurvennormale die *Normale zur Schmiegeebene in P* hinzunimmt. Diese *Binormale* b liegt in der *Tangentenebene des Schraubzylinders*. Das aus den Einheitsstrecken in Richtung der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen gebildete ortho-normierte *Dreibein* t, h, b , das man sich in jedem Punkt der Schraublinie angebracht denken kann, heißt das *begleitende Dreibein der Schraublinie*.

Da die Bahntangenten t der Schraublinie (mit dem Grundkreisradius a) gegen die Grundrißebene die feste Neigung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a}$ haben und die Zylinderradien der Punkte P erste Spurparallelen ihrer Schmiegeebenen σ sind (diese Radien sind daher die Hauptnormalen h der Punkte P), sind auch *alle Schmiegeebenen σ der Schraublinie gegen die Grundrißebene unter dem festen Winkel α geneigt*. Die durch die Spitze R des Richtkegels gelegte *Parallelebene $\parallel \sigma$ zur Schmiegeebene σ* eines beliebigen Punktes P der Schraublinie ist daher *Tangentenebene des Richtkegels, und ihre Spur, d. h. die Fluchtgerade (Fluchtspur) σ_u der Schmiegeebene σ berührt den Grundkreis im Fluchtpunkt $T_u = T'_u$ der Bahntangente t* (Fig. 189). Die zweite Spur

$(\sigma_u)_2$ dieser durch R gelegten Parallelebene $|\sigma$ zur Schmiegeebene σ geht dann durch R'' und den Aufriß K'' des Schnittpunktes K von σ_u mit der y -Achse. Auf $(\sigma_u)_2$ steht schließlich der Aufriß b'' des Binormalenvektors b des Punktes P senkrecht.

Die Grundrißspur σ_1 der Schmiegeebene σ des Punktes P ist zur Fluchtgeraden σ_u der Schmiegeebene parallel. Da sie die Tangente t des Punktes P enthält, geht sie außerdem durch den Horizontalspurpunkt $H = H'$ der Bahntangente t , der auf dem Ordner des Punktes $H'' = [t'', x_{12}]$ liegt. Dadurch ist aber σ_1 bereits festgelegt.

Mit Hilfe der Schmiegeebene kann auch der *Schmiegekreisradius* ϱ in den *Scheiteln der Sinuslinie*, die als Aufriß der Schraublinie auftritt, gefunden werden. Die Schnittellipse der Schmiegeebene eines Punktes der Schraublinie mit dem Schraubzylinder hat nämlich den gleichen Schmiegekreisradius wie die Schraublinie selbst; dasselbe gilt daher auch für die Aufrisse dieser Kurven. Die Schmiegeebene σ_9 im Punkte 9 hat eine zur Rißachse x_{12} parallele Horizontalspur und hat die Neigung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a}$. Sie schneidet den Schraubzylinder in einer Ellipse, deren halbe kleine Achse gleich dem Zylinderradius a ist und im Aufriß in wahrer Größe auftritt. Die halbe große Achse dagegen, die mit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a}$ gegen die Grundrißebene geneigt ist, projiziert sich im Aufriß als die Strecke $a \operatorname{tg} \alpha = p$. Daher gilt für den Schmiegekreisradius ϱ im Scheitel 9:

$$(12) \quad \varrho = \frac{p^2}{a} \quad \text{oder} \quad \varrho \cdot a = p^2.$$

Errichtet man daher (Fig. 189) in der Spitze R'' des Richtkegels das Lot auf eine seiner Konturerzeugenden und schneidet es mit dem Aufriß des Basiskreises, d. h. mit der Rißachse x_{12} , so ist die Projektion dieser Lotstrecke auf die Rißachse gleich dem Scheitelkrümmungsradius ϱ .

Schließlich führen wir noch zwei wichtige Begriffe ein, die für die konstruktive Behandlung der Schraubflächen sehr wirksam sind, und die von THEODOR SCHMID (1890) stammen, nämlich den *Drehfluchtpunkt einer Geraden* und die *Drehfluchtgerade* (*Drehfluchtspur*) einer Ebene (Fig. 179).

Dreht man den Fluchtpunkt einer Geraden, etwa den Fluchtpunkt T_u der Tangente t der Schraublinie im Punkte P (Fig. 189) um z' im positiven Sinn (linksum) um den Winkel $\pi/2$, so erhält man einen Punkt T_u^x , der als *Drehfluchtpunkt* der Tangente t bezeichnet wird. Da für die Tangente t der Schraublinie dieser Drehfluchtpunkt T_u^x mit dem Grundriß P' ihres Berührungspunktes zusammenfällt, gilt

Satz 8: Der Grundriß P' eines Punktes P der Schraublinie ist identisch mit dem Drehfluchtpunkt T_u^\times seiner Bahntangente t , d. h. $P' = T_u^\times$.

Eine beliebige Ebene, z. B. die Schmiegenebene σ im Punkte P der Schraublinie, hat eine bestimmte Fluchtspur σ_u , nämlich die Horizontalspur der Parallelebene zu σ durch die Spitze R des Richtkegels. Dreht man diese Fluchtspur σ_u um z' im positiven Sinn (linksum) um den Winkel

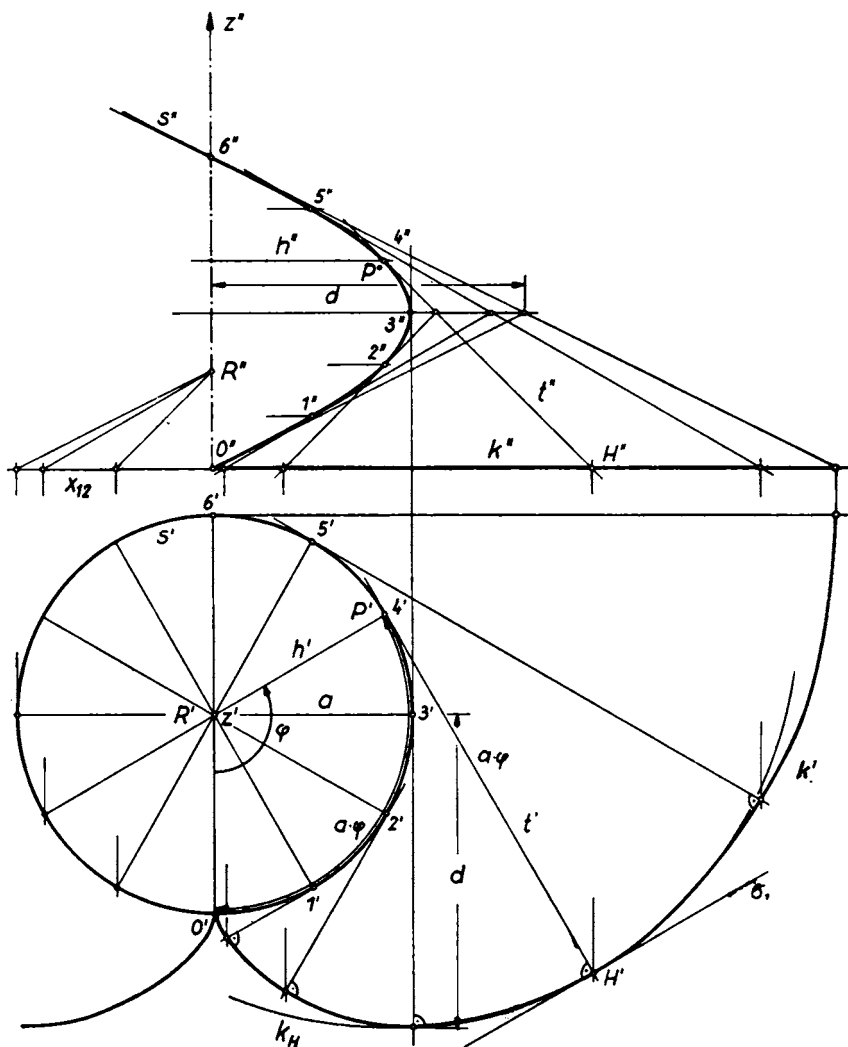


Fig. 191. Schraubtorse (Tangentenfläche der Schraublinie s) mit Normalschnitt k (Kreisevolvente)

$\pi/2$, so erhält man die Gerade σ_u^\times , die **Drehfluchtspur** der Ebene σ . Für die Schmiegeebene σ von P deckt sich die Drehfluchtspur σ_u^\times mit dem Grundriß t' der Bahntangente t an die Schraublinie im Punkte P . Also gilt

Satz 9: *Der Grundriß t' der Bahntangente t eines Punktes P der Schraublinie ist identisch mit der Drehfluchtspur σ_u^\times seiner Schmiegeebene σ , d. h. $t' = \sigma_u^\times$.*

71. Die Schraubtorse

Die *Schar der Tangenten t an eine beliebige Raumkurve k* bildet eine Fläche, die als die *Tangentenfläche* oder als die *Torse* von k bezeichnet wird. Die Raumkurve selbst heißt die *Gratlinie* der Torse. Die Tangenten t der Raumkurve sind die (geradlinigen) *Erzeugenden* oder *Mantellinien* der Torse; die Torsen sind also *Regelflächen*. Insbesondere ist die *Tangentenfläche einer Schraublinie* eine *Schraubtorse*. Wegen ihrer geradlinigen Erzeugenden ist sie eine *spezielle Regelschraubfläche*.

Fig. 191 zeigt den Grundriß und den Aufriß einer Schraublinie s . Die Tangenten t der Schraublinie, deren Risse nach 70. gewonnen werden, sind die Erzeugenden der zu s gehörigen Schraubtorse. Um die *Spurkurve* dieser Schraubtorse in der Grundrißebene zu finden, ermittelt man die Grundrisse H' der Horizontalspurpunkte H der einzelnen Tangenten t , die aus dem Aufriß der Schnittpunkte $H'' = [t'', x_{12}]$ sofort in den Grundriß übertragen werden können. Liegt dabei, wie im Punkte 3, die Tangente in einer doppeltprojizierenden Ebene, dann verschraubt man die Tangente um einen rechten Winkel (in die Tangente des Punktes 6), wodurch sie Parallellage zur Aufrißebene erlangt. Denkt man sich die Grundrißebene bis in die Höhe des Punktes 3 mitverschraubt, so kann man den Abstand d des Spurpunktes der Tangente vom Grundriß 3' des Berührungspunktes 3 dem Aufriß entnehmen und in den Grundriß übertragen.

Zur Erhöhung der Anschaulichkeit sind in Fig. 192 die *beiden Mäntel der Tangentenfläche (Schraubtorse)* für einen halben Gang der Schraublinie s in einem *Schrägriß* dargestellt.

Die *Spurkurve der Schraubtorse* kann man auch *kinematisch erzeugen*: Die Tangenten t der Schraublinie liegen in den (erstprojizierenden) Tangentenebenen τ des Schraubzylinders und haben gegen die Grundrißebene die feste Neigung $\operatorname{tg} \alpha = p/a$. Die in den Tangentenebenen τ liegenden rechtwinkligen Dreiecke (PPH), deren Hypotenusen PH als Bahntangenten t von P die feste Horizontalneigung $\operatorname{tg} \alpha = p/a$ haben, besitzen dann die vertikalen Katheten $P'P = z = p\varphi$ und die horizontalen

Katheten $P'H = P'H' = p\varphi / \operatorname{tg} \alpha = a\varphi$. Daher ist der Grundriß $P'H'$ des Tangentenstückes zwischen dem Berührungspunkt P und dem Spurpunkt H gleich der von 0 aus gezählten Länge des Kreisbogens $0'P' = a\varphi$. Wickelt man daher einen auf den Basiskreis s' aufgewickelten gespannten Faden so ab, daß er sich stets tangential vom Kreis ablöst, dann beschreibt der Punkt 0 des Fadens gerade die Spurkurve $k = k'$ der Schraubtorse. Diese *Spurkurve* heißt deshalb eine *Fadenevolvente* (*Filarevolvente*) des Kreises s' oder kurz eine *Kreisevolvente*.

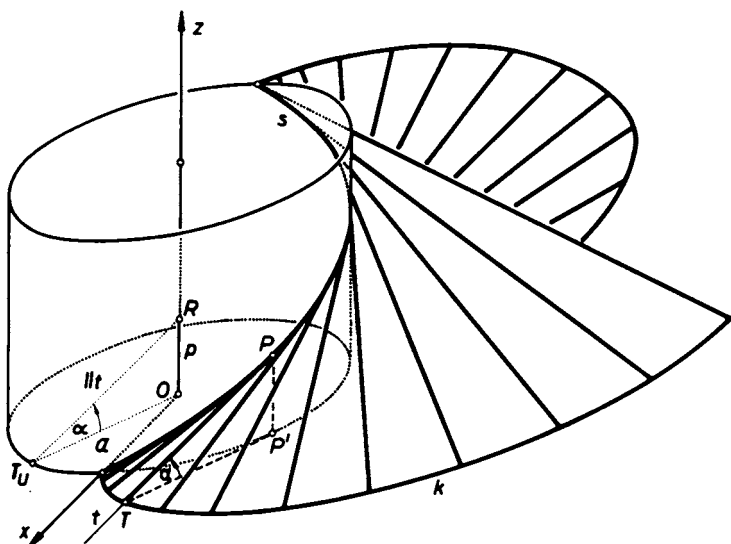


Fig. 192. Schrägbild der beiden Mäntel einer Schraubtorse (Tangentenfläche eines halben Ganges der Schraublinie s).

Dieser Abwickelvorgang stellt in jedem Augenblick eine *Drehbewegung* dar mit dem Berührungspunkt P' der Kreistangente t' als *momentanem Drehzentrum*. Daher sind die *Kreistangenten* t' zugleich die *Normalen* der *Kreisevolvente* k' . Die *Kreisevolvente* durchsetzt somit alle *Kreistangenten* t' rechtwinklig, sie ist eine *Orthogonaltrajektorie* der *Kreistangenten*. Umgekehrt umhüllen die *Normalen* t' der *Kreisevolvente* k' den *Kreis* s' , der also die *Evolute* der *Kreisevolvente* k' ist. Daher sind die *Berührungspunkte* P' der *Normalen* t' von k' auf dem *Kreis* s' zugleich die *Schmiegekreismitten* für die entsprechenden *Punkte* H' der *Kreisevolvente* k' ; man kann damit die *Kreisevolvente* k' ziemlich genau aus *Bogenstücken* ihrer *Schmiegekreise* k_H (Mitte P' , Radius $a \cdot \varphi$) zusammensetzen.

Im Punkte $0 = 0'$ hat die *Kreisevolvente* k' , da sie den *Basiskreis* s' senkrecht trifft, eine *Spitze* mit zu s' senkrechter *Spitzentangente*. Sie setzt

sich nach links symmetrisch bezüglich der Spitzentangente fort, wobei diese Punkte die Spurpunkte der Tangenten an die unter die Grundrißebene fortgesetzte Schraublinie sind. Nach beiden Seiten umkreist die Kreisevolvente k' den Kreis s' spiralenförmig in unendlich vielen immer weiter werdenden Windungen.

Die Tangentenebene σ der Schraubtorse in einem Punkt P der Schraublinie enthält die durch P gehende Erzeugende t ($=$ Tangente an die Schraublinie) und hat die Tangente an die Spurkurve $k = k'$ der Torse zur Grundrißspur σ_1 . Da diese zur Hauptnormalen h des Punktes P der Schraublinie (Zylinderradius) parallel ist, liegt die Hauptnormale h in der Tangentenebene σ der Schraubtorse (als erste Spurparallele). *Diese Tangentenebene σ berührt die Schraubtorse nicht nur im Punkte P , sondern längs der ganzen durch P gehenden Erzeugenden t , die eine erste Fallinie von σ ist.* Daraus folgt:

Satz 1: *Die Tangentenebene in einem beliebigen Punkte H der Schraubtorse ist identisch mit der Schmiegeebene σ jenes Punktes P der Schraublinie s , dessen Tangente (Erzeugende) t den Berührungspunkt H enthält.*

Die Tangentenebenen der Schraubtorse haben gegen die Grundrißebene eine feste Neigung, nämlich die Neigung der Erzeugenden. Da diese Eigenschaft für alle sogenannten Böschungsflächen kennzeichnend ist, zählt die Schraubtorse zu den Böschungsflächen.

Da alle Punkte einer Erzeugenden t der Schraubtorse dieselbe Tangentenebene haben, ist die Schraubtorse (wie überhaupt jede Torse) in die Ebene abwickelbar, und zwar ist sie die einzige abwickelbare Regelschraubfläche. Sie besteht aus zwei Mänteln, herrührend von den beiden Halbtangenten der Schraublinie, die längs der Schraublinie miteinander einen scharfen Grat bilden. Die Schraublinie, deren Tangentenfläche die Schraubtorse ist, heißt daher auch die Gratlinie der Schraubtorse. Dieser Grat bewirkt auf der Spurkurve der Schraubtorse, der Kreisevolvente, deren Spitze.

72. Die Wendelfläche

Die Schar der Hauptnormalen einer Schraublinie, welche die Schraubachse senkrecht schneiden, bildet eine geschlossene gerade Regelschraubfläche oder Wendelfläche. Sie kann durch Verschrauben einer Geraden erzeugt werden, die die Schraubachse rechtwinklig schneidet. Auf der Wendelfläche liegen deshalb als ausgezeichnete Kurven die Schar der achsennormalen geradlinigen Erzeugenden und die Schar der Bahnschraublinien, die die Bahnkurven der einzelnen Punkte der Erzeugenden bei der Schraubung sind. Alle Bahnschraublinien haben die gleiche Ganghöhe $h = 2\pi p$

Da alle Bahnschraublinien der Wendelfläche denselben Schraubparameter p haben, ist die Spitze R des zur Schraublinie s gehörigen Richtkegels zugleich auch *Spitze der Richtkegel für alle Bahnschraublinien der Wendelfläche*.

Zum Grundriß P' eines auf der Erzeugenden e liegenden Punktes P der Wendelfläche findet man den Aufriß P'' auf dem Aufriß e'' dieser Erzeugenden. Der Grundriß t' der Tangente t an die Bahnschraublinie im Punkte P ist die Tangente an den Grundrißkreis dieser Schraublinie. Um ihren Aufriß t'' zu konstruieren, bestimmt man den Grundriß $T_u = T'_u$ und den Aufriß T''_u des Fluchtpunktes T_u der Tangente. Die Erzeugende $[RT_u]$ des zu dieser Bahnschraublinie gehörigen Richtkegels ist dann zur Tangente t parallel, so daß auch $t'' \parallel [R''T''_u]$ ist.

Diese Tangente t an die Bahnschraublinie und die Erzeugende e spannen die Tangentenebene τ der Wendelfläche im Punkte P auf. Ihre Fluchtspur τ_u , d. h. die Horizontalspur der Parallelebene $\parallel \tau$ durch die Spitze R des Richtkegels, ist Tangente im Punkt T_u an den Grundrißkreis der Bahnschraublinie des Punktes P . Die Horizontalspur τ_1 der Tangentenebene τ ist zur Fluchtspur τ_u parallel und geht durch den Horizontalspurpunkt H' der Bahntangente t , der aus seinem Aufriß $H'' = [t'', x_{12}]$ hervorgeht. Aus dem Fluchtpunkt T_u der Tangente und der Fluchtgeraden τ_u der Tangentenebene gewinnt man durch eine positive 90° -Schwenkung den Drehfluchtpunkt T_u^x der Bahntangente t , der sich mit dem Grundriß P' des Berührungspunktes P deckt, und die Drehfluchtgerade (Drehfluchtspur) τ_u^x der Tangentenebene τ , die mit dem Grundriß t' der Bahntangente t zusammenfällt. Daraus folgt, in Übereinstimmung mit (70. Satz 7), der

Satz 1: *Die Tangentenebene an die Wendelfläche ist identisch mit der Schmiegeebene der Bahnschraublinie im Berührungspunkt.*

Die Richtung der zweiten Spurparallelen der Tangentenebene τ erhält man, indem man sich die Aufrißebene durch die Schraubachse gelegt denkt und dann die Aufrißspur $(\tau_u)_2 = [R'', K'']$ der durch die Spitze R des Richtkegels gelegten Parallelebene von τ zeichnet (deren erste Spur die Fluchtgerade τ_u ist).

Die Flächennormale n im Punkte P der Wendelfläche steht auf der Tangentenebene τ senkrecht. Daher steht ihr Grundriß n' auf der Horizontalspur τ_1 von τ senkrecht, d. h. n' fällt mit t' zusammen, und ihr Aufriß n'' steht auf der Vertikalspur $(\tau_u)_2$ von $\parallel \tau$ senkrecht.

Die Normale n kann auch mit Hilfe des Richtkegels, unter Verzicht auf die Spuren der Tangentenebene τ und $\parallel \tau$, dadurch konstruiert werden,

daß man den *Fluchtpunkt* N_u der *Normalen* n ermittelt. Dieser ergibt sich leicht aus einem Seitenriß, der erstprojizierend durch den Fluchtstrahl $[RT_u]$ der Bahntangente t gelegt wird. Die neue Rißachse x_{13} fällt dabei mit $[R'T_u]$ zusammen. Der Seitenriß R''' der Kegelspitze R liegt im Abstand p von R' auf dem Lot zu x_{13} , während die zur Tangentenebene τ parallele (drittprojizierende) Fluchtebene $|\tau$ durch R sich als Gerade $[R'''T_u]$ darstellt. Da die Normale n auf der Tangentenebene τ senkrecht steht, ist das Lot zu $[R'''T_u]$ im Punkt R''' zum Seitenriß n''' der Normalen n parallel und schneidet auf x_{13} den Fluchtpunkt N_u der Normalen n aus. Sein auf der Rißachse x_{12} gelegener Aufriß N''_u liefert den Aufriß $[R''N''_u]$ des zur Normalen n gehörigen Fluchtstrahls; zu ihm ist der Aufriß n'' der Normalen parallel.

Die *Wendelfläche* ist keine algebraische sondern eine *transzendente Fläche*. Es gibt nämlich Geraden, etwa die Parallelen zur Schraubachse z , die die Fläche in unendlich vielen Punkten schneiden, ohne der Fläche anzugehören.

Da die Wendelfläche durch Verschrauben einer Geraden erzeugt werden kann, ist sie eine *Regelschraubfläche*. Sie ist aber (im Gegensatz zur Schraubtorse) *nicht in die Ebene abwickelbar*, also eine *windschiefe Regelschraubfläche*. Die Punkte einer festen geradlinigen Erzeugenden e der Wendelfläche haben nämlich lauter verschiedene Tangentenebenen τ , da der Anstieg $\operatorname{tg} \alpha = p/a$ der Bahntangente t von der Achse z nach außen hin (d. h. mit wachsendem a) monoton abnimmt. Wandert ein Punkt P auf einer festen Erzeugenden e , im Schnittpunkt mit der Schraubachse z beginnend, nach außen, so dreht sich die Tangentenebene τ , mit vertikaler Lage beginnend, monoton um die Erzeugende e und nähert sich immer mehr der horizontalen Lage.

73. Die Durchdringung einer Wendelfläche mit einem Drehzylinder, der die Schraubachse als Mantellinie enthält. (Zylindrische Kurven der Wendelfläche)

Die *Wendelfläche* (Achse z) sei festgelegt durch eine Bahnschraublinie s und eine Anzahl ihrer Erzeugenden, die einer Drehung um jeweils 30° entsprechen (Fig. 194). Dabei sind die Erzeugenden wieder nur bis zur Schraubachse z herangeführt, und ihre Fortsetzung über die Achse hinaus ist weggelassen. Der *Drehzylinder*, der mit der Wendelfläche zu schneiden ist,

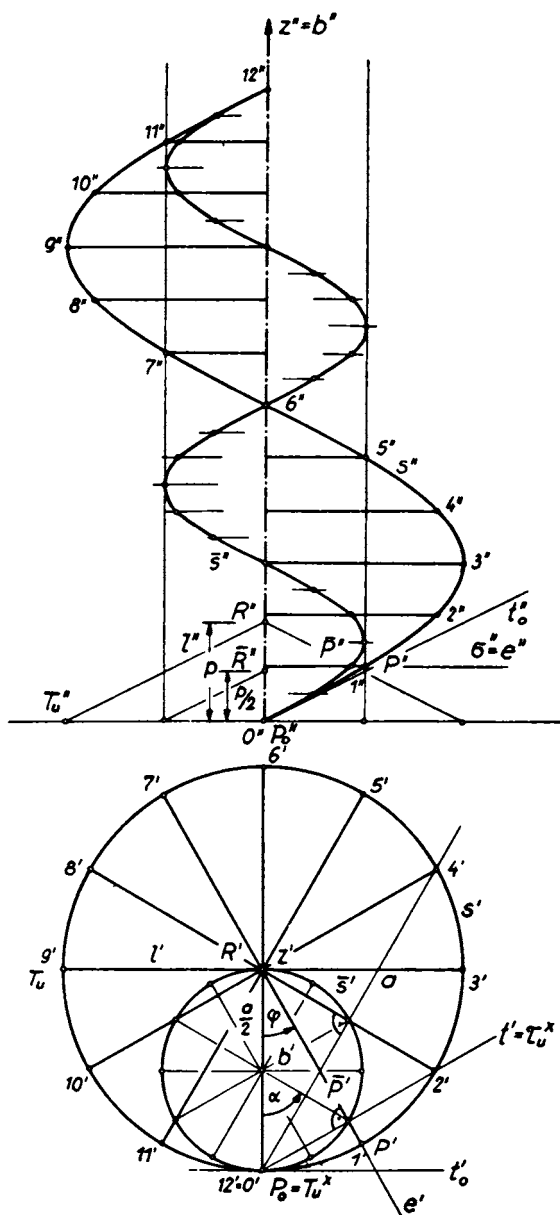


Fig. 194. Jeder Drehzylinder durch die Schraubachse schneidet die Wendelfläche in einer Schraublinie vom Parameter $p/2$, längs der die Wendelfläche von einem Zylinder berührt wird (zylindrische Schraublinien der Wendelfläche)

habe die *Schraubachse* z als *Mantellinie*, so daß seine Achse b zur Schraubachse parallel ist, während sein Radius die (beliebig wählbare) Entfernung von b und z ist. In Fig. 194 ist der Durchmesser des Drehzylinders gleich dem Schraubradius a der willkürlich wählbaren Bahnschraublinie s der Wendelfläche angenommen.

Der Grundriß \bar{s}' der Durchdringungskurve \bar{s} der Wendelfläche und des Drehzylinders fällt mit dem Basiskreis des Drehzylinders zusammen. Eine beliebige (etwa in Höhe des Punktes 1 von s gelegte) achsennormale Hilfsebene σ schneidet die Wendelfläche in einer Erzeugenden e und den Drehzylinder in einem Kreis. Der Schnittpunkt \bar{P} dieser beiden Kurven ist ein Punkt der Durchdringungskurve \bar{s} . Der zweite (auf der Schraubachse z liegende) Schnittpunkt kann außer Betracht bleiben, da von vornherein feststeht, daß die ganze Schraubachse ein (nicht weiter interessierender) Bestandteil der Durchdringungskurve ist. Der Grundriß \bar{P}' ist unmittelbar als Schnitt von \bar{s}' und e' zu ersehen, und mit ihm kennt man auch seinen Aufriß \bar{P}'' auf e'' . Nun ist aber der Drehwinkel $\varphi = \sphericalangle 0'z'\bar{P}'$ als Peripheriewinkel über dem Bogen $0'\bar{P}'$ des Kreises \bar{s}' gerade halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel $\alpha = \sphericalangle 0'b'\bar{P}'$, d. h. es ist $\varphi = \alpha/2$. Daher gilt für die Verschiebung z des Punktes P auf s , die gleich der Verschiebung des Punktes \bar{P} auf \bar{s} ist,

$$(1) \quad z = p \cdot \varphi = p \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2} \cdot \alpha.$$

Daraus folgt aber der

Satz 1: Beschreibt der Punkt P die Bahnschraublinie s mit dem Parameter p und dem Schraubradius a , so beschreibt der auf der gleichen Erzeugenden liegende Punkt \bar{P} auf dem Drehzylinder gleichfalls eine Schraublinie \bar{s} , jedoch vom halben Parameter $p/2$ und vom halben Schraubradius $a/2$.

Demgemäß liegen auf einer Wendelfläche zwei Arten von Schraublinien:

1. die ∞^1 Bahnschraublinien s der Wendelfläche vom Parameter p und der Ganghöhe $h = 2p\pi$, die auf den zur Schraubachse koaxialen Zylindern liegen. Sie sind festgelegt durch den beliebig wählbaren Schraubradius a ;
2. die ∞^2 „zylindrischen Schraublinien“ \bar{s} vom halben Parameter $p/2$ und der Ganghöhe $h/2 = p\pi$, deren Schraubzylinder die Schraubachse der Wendelfläche als Mantellinie enthalten. Die Schraubachse b einer solchen zylindrischen Schraublinie ist parallel zur Achse z der Wendelfläche, aber sonst beliebig; sie ist durch die zwei willkürlich wählbaren Koordinaten ihres Spurpunktes in der Grundrißebene festgelegt.

In einem beliebigen Punkt \bar{P} auf \bar{s} legen wir die *Tangentenebene* τ an die Wendelfläche. Ihre *Drehflucht* τ_u^\times deckt sich mit dem Grundriß t' der Bahntangente t der Schraubung im Punkte \bar{P} . Diese Drehflucht τ_u^\times steht auf dem Grundriß e' der Erzeugenden e des Punktes \bar{P} senkrecht und geht daher durch den Punkt P_0 , der den Grundrissen s' und \bar{s}' gemeinsam ist. Da diese Tatsache unabhängig ist von der speziellen Wahl des Punktes \bar{P} auf \bar{s} , gehen die Drehfluchten τ_u^\times der Tangentenebene τ aller Punkte \bar{P} von \bar{s} durch denselben festen Punkt P_0 . Andererseits kann der Punkt P_0 als Drehfluchtpunkt T_u^\times der Bahntangente t_0 des gemeinsamen Punktes P_0 der beiden Schraublinien s und \bar{s} aufgefaßt werden. Daraus folgt aber, daß die zu der Schar der Tangentenebenen τ parallelen Ebenen $\parallel \tau$ durch die Spitze R des Richtkegels ein *Ebenenbüschel* bilden mit der Fluchtgeraden l der Bahntangente t_0 von P_0 als Achse. Die Tangentenebenen τ der Punkte \bar{P} von \bar{s} sind daher alle zur Bahntangente t_0 des Punktes P_0 parallel und bilden somit einen der Wendelfläche längs \bar{s} berührend umschriebenen *Zylinder* mit der Erzeugendenrichtung t_0 oder l . Die Schraublinie \bar{s} heißt deshalb eine *zylindrische Kurve* der Wendelfläche. Es folgt:

Satz 2: *Jeder die Schraubachse enthaltende Drehzylinder schneidet aus der Wendelfläche eine zylindrische Schraublinie von halbem Parameter und der halben Ganghöhe $h/2$ aus. Dabei sind die Tangentenebenen an die Wendelfläche in den Punkten dieser Schraublinie alle zu einer festen Richtung t_0 parallel.*

Bei *Parallelprojektion* der Wendelfläche in Richtung t_0 oder in Richtung $l = [RT_u]$, wobei T_u der Fluchtpunkt von t_0 ist, berühren die zu l parallelen Tangentenebenen τ die Wendelfläche längs der zur Richtung l gehörigen wahren *Umrißkurve*. Diese Berührungslinie ist aber nach dem eben bewiesenen Satz 2. gerade die zur Sehrichtung l gehörige *zylindrische Schraublinie* \bar{s} der Wendelfläche. Die Schraublinie \bar{s} kann daher auch als *Eigenschaftengrenze* der Wendelfläche aufgefaßt werden, wenn die Wendelfläche in Richtung l durch parallele Lichtstrahlen beleuchtet wird.

Ist die Lichtrichtung l beliebig vorgegeben, dann findet man die als Eigenschaftengrenze (wahre Umrißkurve) der Wendelfläche auftretende zylindrische Schraublinie \bar{s} durch Umkehrung des geschilderten Konstruktionsganges: Man legt (Fig. 194) durch die Spitze R des Richtkegels die Lichtrichtung l , die die Grundrißebene im Fluchtpunkt T_u von l schneidet. Durch eine positive 90° -Drehung gewinnt man aus T_u den Drehfluchtpunkt T_u^\times von l . Dann gibt der Kreis mit $z'T_u^\times$ als Durchmesser den Grundriß s' der Eigenschaftengrenze \bar{s} für die Lichtrichtung l , aus der dann auch sofort ihr Aufriß \bar{s}'' zu gewinnen ist.

74. Die scharfgängige Regelschraubfläche

Durch Verschrauben einer Geraden, welche die Schraubachse unter einem von 90° verschiedenen Winkel trifft, entsteht eine *schiefe geschlossene* oder *scharfgängige Regelschraubfläche* (Fig. 195).

Von der Schraubfläche sei die Achse z , senkrecht zur Grundrißebene, sowie die Ganghöhe h gegeben, und die verschraubte Gerade sei gegen die Grundrißebene unter dem festen Winkel $\beta \neq 0$ geneigt. Wir legen durch die beiden auf der Schraubachse z in den Höhen $h/2$ und h über der Grundrißebene liegenden Punkte (mit den Aufrissen $6''$ und $12''$) die Erzeugenden der Schraubfläche, von denen wir annehmen dürfen, daß sie in der zur Aufrißebene parallelen *Meridianebene* der Fläche liegen; davon steigt eine nach links unter dem Winkel β an, die andere ab. Diese Erzeugenden schneiden sich in einem Punkt 9, der den Radius a einer bestimmten *Bahnschraublinie* s der Schraubfläche festlegt, die nach Konstruktion der Punkte 0, 1, ..., 12 in beiden Rissen gezeichnet werden kann (Fig. 195). Durch jeden Punkt von s gehen zwei geradlinige Erzeugende der Schraubfläche, von denen die eine die Schraubachse in einem um $h/4$ höher, die andere in einem um $h/4$ tiefer gelegenen Punkt trifft. In den Punkten der ausgezeichneten Bahnschraublinie s kreuzen sich also jeweils zwei verschiedene Erzeugende der Fläche, d. h. diese Bahnschraublinie ist eine *Selbstdurchdringungskurve* (*Doppelkurve*, *Doppelschraublinie*) der scharfgängigen Regelschraubfläche.

Außer der Schraublinie s liegen auf der Regelschraubfläche noch ∞^1 andere Bahnschraublinien, die zu s koaxial sind und dieselbe Ganghöhe h besitzen. Die zugehörigen Richtkegel haben zwar verschiedene Grundkreisradien, aber alle die gleiche Höhe $p = h/2\pi$. Wir wählen daher wieder den festen Punkt $R = (0, 0, p)$ der Schraubachse als gemeinsame Spitze der Richtkegel aller auf der scharfgängigen Schraubfläche liegenden Bahnschraublinien.

Übrigens gibt es außer s auch noch unendlich viele andere Doppelschraublinien, in denen sich die Regelschraubfläche selbst durchdringt; es gibt nämlich in jedem der unendlich vielen Gänge der Regelschraubfläche eine neue zu [3,9] parallele Erzeugende, welche die Erzeugende [9,15] in einem Punkte trifft, dessen Bahn eine solche Doppelschraublinie ist. Die *Doppelschraublinie* s hat jedoch den kleinsten Radius und liegt der Schraubachse z am nächsten.

Da es Geraden gibt, etwa die Parallelen zur Schraubachse, welche die Fläche in unendlich vielen Punkten treffen, ohne der Fläche selbst ganz anzugehören, ist die *scharfgängige Regelschraubfläche* keine algebraische

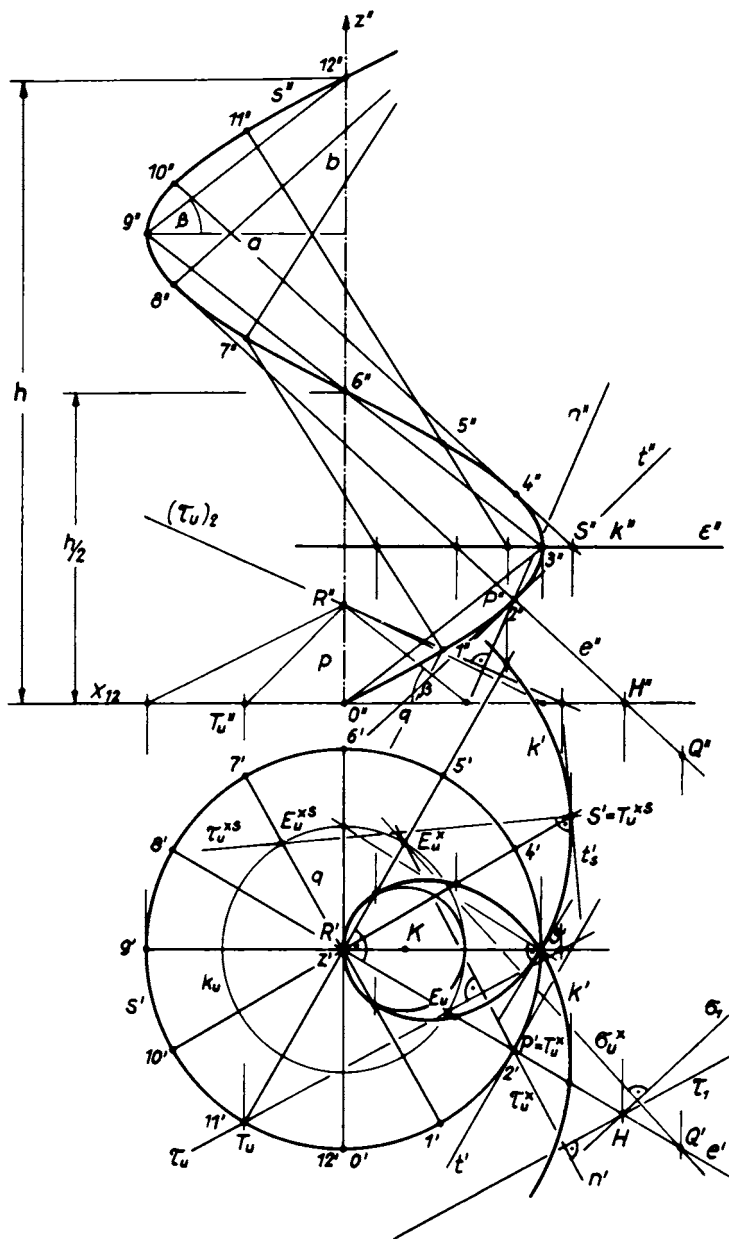


Fig. 195. Scharfgängige Regelschraubfläche mit Erzeugenden, Doppelschraublinie, Fluchtkreis k_u , Tangentenebene τ im Punkte P und Normalschnitt k (Archimedische Spirale)

sondern eine *transzendente Fläche*. Sie ist eine Regelfläche, da sie sich durch Verschrauben einer Geraden erzeugen läßt, und zwar, wie sich erweisen wird, eine *windschiefe Regelfläche*.

Die *Tangentenebene* τ in einem beliebigen Punkt P der scharfgängigen Regelschraubfläche wird aufgespannt von der durch den Punkt P gehenden Erzeugenden e und der Tangente t an die Bahnschraublinie dieses Punktes. Der Grundriß t' der Bahntangente t steht im Punkte P' auf e' senkrecht. Ihr Aufriß wird nach der in 70. behandelten Konstruktion über den Grundriß T_u und den Aufriß T_u'' des Fluchtpunktes der Bahntangente gefunden: es ist $t'' \mid [R''T_u'']$. Die *Fluchtgerade* τ_u der Tangentenebene τ , d. h. die Horizontalspur der Parallelebene $\parallel \tau$ durch die Spitze R des Richtkegels, ist die Verbindungsgerade des Fluchtpunktes E_u der Erzeugenden e und des Fluchtpunktes T_u der Bahntangente t in P . Der *Fluchtpunkt* T_u entsteht aus P' durch eine negative Vierteldrehung um z' . Da alle Erzeugenden der Regelschraubfläche gegen die Grundrißebene unter dem festen Winkel β geneigt sind, bilden ihre durch R gelegten Fluchtstrahlen einen zweiten Drehkegel mit R als Spitze und einem in der Grundrißebene liegenden Kreis um z' vom Radius q als Basis, wobei nach Fig. 195

$$(1) \quad p/q = \operatorname{tg} \beta \quad \text{oder} \quad q = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

ist. Dieser Kreis k_u , der *Fluchtkreis* der scharfgängigen Regelschraubfläche, ist demnach der *Ort der Fluchtpunkte der einzelnen Erzeugenden*. Insbesondere ist der Fluchtpunkt E_u der zum Punkt P gehörigen Erzeugenden e der Schnittpunkt von e' mit dem Fluchtkreis k_u . Damit ist die *Fluchtspur* $\tau_u = [T_u E_u]$ der *Tangentenebene* τ der scharfgängigen Regelschraubfläche im Punkte P gefunden.

Die *Horizontalspur* τ_1 der Tangentenebene τ ist zur Fluchtspur τ_u parallel und geht durch den Punkt H , in dem die Erzeugende e die Grundrißebene durchstößt. Dabei wird H auf e' über den Punkt $H'' = [e'', x_{12}]$ gewonnen.

Statt der *Vertikalspur* τ_2 der Tangentenebene τ von P genügt es meist, eine zweite Spurparallele oder die *Richtung der Vertikalspur der Tangentenebene* τ zu kennen. Um sie zu finden, denken wir uns die Aufrißebene durch die Schraubachse z gelegt und die in der Spitze R des Richtkegels angebrachte Parallelebene $\parallel \tau$, deren erste Spur τ_u ist, mit der Aufrißebene geschnitten, wodurch die gesuchte Richtung $(\tau_u)_2$ der Vertikalspur von τ gefunden ist.

Die Konstruktion der Horizontalspur τ_1 wird wesentlich vereinfacht, wenn man sich der *Drehflucht* τ_u^\times der *Tangentenebene* τ bedient. Der Drehfluchtpunkt T_u^\times der Bahntangente t von P fällt mit P' zusammen. Der Drehfluchtpunkt E_u^\times der Erzeugenden e liegt auf dem Fluchtkreis k_u und auf dem Grundriß der im positiven Sinne (linksum) um 90° weitergedrehten Erzeugenden; denn E_u^\times entsteht aus dem Fluchtpunkt E_u der Erzeugenden durch positive Viertelschwenkung. Auf der Drehflucht $\tau_u^\times = [P'E_u^\times]$, die zur Fluchtspur τ_u senkrecht ist, steht alsdann die Horizontalspur τ_1 der Tangentenebene τ senkrecht und geht durch den Horizontalspurpunkt H der Erzeugenden e .

Ist Q ein beliebiger, mit P auf derselben Erzeugenden e liegender Punkt der Regelschraubfläche, dann hat seine Tangentenebene σ als Drehflucht die Gerade $\sigma_u^\times = [Q'E_u^\times]$. Die Horizontalspur σ_1 der Tangentenebene σ geht dann ebenfalls durch den Horizontalspurpunkt H und steht auf σ_u^\times senkrecht. Durchwandert Q alle Punkte der Erzeugenden e , dann dreht sich gleichzeitig die Horizontalspur σ_1 seiner Tangentenebene σ um den Horizontalspurpunkt H von e so, daß σ_1 stets auf $\sigma_u^\times = [Q'E_u^\times]$ senkrecht steht. Liegt insbesondere Q auf der Schraubachse, so fällt σ_1 mit e' zusammen, und geht Q gegen den Fernpunkt von e , so nähert sich σ_1 immer mehr dem Lot zu e' in H . Also gilt

Satz 1: *Wandert ein Punkt auf einer festen Erzeugenden, so dreht sich die zugehörige Tangentenebene der scharfgängigen Regelschraubfläche um die Erzeugende.*

Die Tangentenebenen in den Punkten einer festen Erzeugenden sind daher alle voneinander verschieden. Die scharfgängige Regelschraubfläche ist somit eine *windschiefe Regelfläche*, also eine Fläche, die *nicht in die Ebene abwickelbar* ist.

Nach Konstruktion der Grundrißfluchtskurve τ_u und der Aufrißfluchtskurve $(\tau_u)_2$ der Tangentenebene τ in einem beliebigen Flächenpunkt P kann man sofort auch die Normalrisse n' und n'' der in P errichteten *Flächennormalen* n konstruieren; es ist $n' \perp \tau_u$, d. h. der Grundriß n' der Flächennormalen in P fällt mit der Drehflucht τ_u^\times der Tangentenebene τ zusammen. Ferner ist $n'' \perp (\tau_u)_2$.

Um den *Normalschnitt* der scharfgängigen Regelschraubfläche, d. h. den Schnitt mit einer beliebigen achsennormalen Ebene ε , etwa in Höhe des Punktes 3 gelegen, zu konstruieren, schneidet man im Aufriß die einzelnen Erzeugenden e der Regelschraubfläche mit ε'' und überträgt diese Schnittpunkte auf den Grundriß e' dieser Erzeugenden. Dabei muß man sich

für die auf den Erzeugenden 0, 6, 12 liegenden Punkte eines Seitenrisses bedienen, da sich die genannten Erzeugenden in doppeltprojizierenden Ebenen befinden. Die so gefundene Kurve k' geht durch den Punkt z' und hat die Gerade $[z', 3']$ zur Symmetrieachse. Der Punkt $3'$ auf s' ist ein *Doppelpunkt* der Kurve, da durch ihn zwei verschiedene Erzeugende der Fläche, nämlich die Gerade $[3, 9]$ und die Gerade $[3, -3]$ hindurchgehen. Er kommt dadurch zustande, daß sich die scharfgängige Regelschraubfläche längs der ausgezeichneten Schraublinie s selbst durchdringt, so daß s eine *Doppelkurve* (Doppelschraublinie) der scharfgängigen Regelschraubfläche ist.

Bei der Schraubung einer Erzeugenden e wandert ihr Spurpunkt S in der Ebene ε proportional mit dem Drehwinkel φ vom Spurpunkt der Schraubachse aus nach außen. Die *Polargleichung der Spurkurve* lautet daher

$$(2) \quad r = q \cdot \varphi,$$

wenn r der Polarradius und φ der von der Lage $[z', 0']$ aus gezählte Polarkwinkel ist. Der *Proportionalitätsfaktor* q ist dabei gerade gleich dem *Radius q des Fluchtkreises k_u* ; denn einer Drehung um den Winkel φ entspricht eine Hebung der Erzeugenden um $p \cdot \varphi$ und folglich nach (1) der Polarradius

$$(3) \quad r = \frac{p \cdot \varphi}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{p \cdot \varphi}{\frac{p}{q}} = q \cdot \varphi.$$

Dreht sich eine Gerade e der Ebene um den auf e liegenden Punkt O mit fester Winkelgeschwindigkeit (Bild 196a) und wandert gleichzeitig auf ihr ein Punkt P mit fester Geschwindigkeit nach außen, dann beschreibt der Punkt P eine Kurve von der Gestalt unserer *Spurkurve*. Sie heißt nach ARCHIMEDES (287–212 v. Chr., Syrakus) eine *Archimedische Spirale*.

Die *Tangente t_s in einem beliebigen Punkt S der Spurkurve* (Fig. 195) ist die Spur der Tangentenebene τ^s in S an die scharfgängige Regelschraubfläche. Diese steht auf der Drehflucht $\tau_u^{\times s} = [T_u^{\times s}, E_u^{\times s}]$ der Tangentenebene τ^s senkrecht. Dabei ist $T_u^{\times s} = S'$, während $E_u^{\times s}$ auf dem Fluchtkreis k_u und auf dem Grundriß der um 90° im positiven Sinne weitergedrehten Erzeugenden des Punktes S liegt. Insbesondere findet man auf diese Weise auch die Tangenten im Doppelpunkt $3'$ der Spurkurve k' . Die Strecke $z'E_u^{\times s}$, die die Normale der Kurve k' im Punkt S' auf jenem Polarradius ausschneidet, der zum Polarradius des Punktes S' senkrecht steht, heißt *Polarsubnormale* der Kurve k' . Da für die Archimedische Spirale mit der Polargleichung $r = q \cdot \varphi$ diese Strecke stets gleich dem Radius q des Fluchtkreises k_u ist, gilt:

Also gilt (Fig. 195) der

Satz 3: *Der Scheitelschmiegekreisradius der Archimedischen Spirale, welche als Normalsehnitt der scharfgängigen Regelschraubfläche entsteht, ist halb so groß wie ihr Fluchtkeisradius.*

Die Erzeugenden e der scharfgängigen Regelschraubfläche werden im Aufriß von einer bestimmten Kurve u'' umhüllt, dem *scheinbaren Umriß der Fläche für den Aufriß*. Diesem entspricht auf der Fläche eine bestimmte Kurve u , der *wahre Umriß der Fläche für den Aufriß*. Sein Aufriß u'' und sein Grundriß u' sollen nun konstruiert werden.

Die Punkte der Umrißkurve u auf der Fläche sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß in ihnen die *Tangentenebene* τ *an die Fläche zweitprojizierend* ist. Wir greifen eine bestimmte Erzeugende e der Fläche, z. B. e_5 , heraus (Fig. 197). Wandert ein Punkt längs dieser Erzeugenden e_5 , beginnend auf der Schraubachse, nach außen, dann dreht sich die zugehörige Tangentenebene monoton um diese Erzeugende. Zu jener ausgezeichneten Tangentenebene τ in diesem Ebenenbüschel, die auf der Aufrißebene senkrecht steht, gehört als Berührungspunkt gerade jener gesuchte Punkt V auf e_5 , der der Umrißkurve u angehört. Die Horizontalspur τ_1 dieser zweitprojizierenden Tangentenebene τ und damit auch ihre Fluchtspur τ_u stehen zur Rißachse x_{12} senkrecht. Ihre *Drehflucht* τ_u^\times ist daher zur *Rißachse* x_{12} *parallel*. Andererseits geht aber die Drehflucht τ_u^\times durch den Drehfluchtpunkt E_u^\times der gewählten Erzeugenden e_5 und durch den Grundriß V' des gesuchten Punktes V . Legt man also durch E_u^\times , d. h. durch den Punkt, in dem die Gerade, die aus e'_5 durch eine positive Vierteldrehung (Linksumdrehung) hervorgeht, den Fluchtkeis k_u schneidet, die Parallele τ_u^\times zur Rißachse x_{12} , so schneidet diese auf e'_5 den Grundriß $V' = T_u^\times$ des gesuchten Umrißpunktes V auf e_5 aus. Sein Aufriß V'' , der auf dem Aufriß e''_5 der gewählten Erzeugenden liegt, ist dann ein Punkt des scheinbaren Umrisses u'' . Führt man für die einzelnen Erzeugenden e der scharfgängigen Regelschraubfläche diese Konstruktion durch, so erhält man weitere Punkte der gesuchten Umrißkurve u , z. B. den Punkt U auf e_4 . Insbesondere führt die Erzeugende e_3 zu dem Punkte W auf der Schraubachse und die Erzeugenden e_3 und e_9 auf die Fernpunkte der Umrißkurve. Daher sind *die horizontalen Tangenten an den Fluchtkeis* k_u *Asymptoten der Grundrißkurve* u' , *und die Geraden* $[3'', 9'']$ *und* $[12'', 9'']$ *sind Asymptoten der Umrißkurve* u'' *im Aufriß*. Die Schnittpunkte A', B', C', D' der Kurve u' mit dem Grundriß s' der Selbstdurchdringungskurve s ergeben, in den Aufriß übertragen, die Umrißpunkte A'', B'', C'', D'' auf s'' . Be-

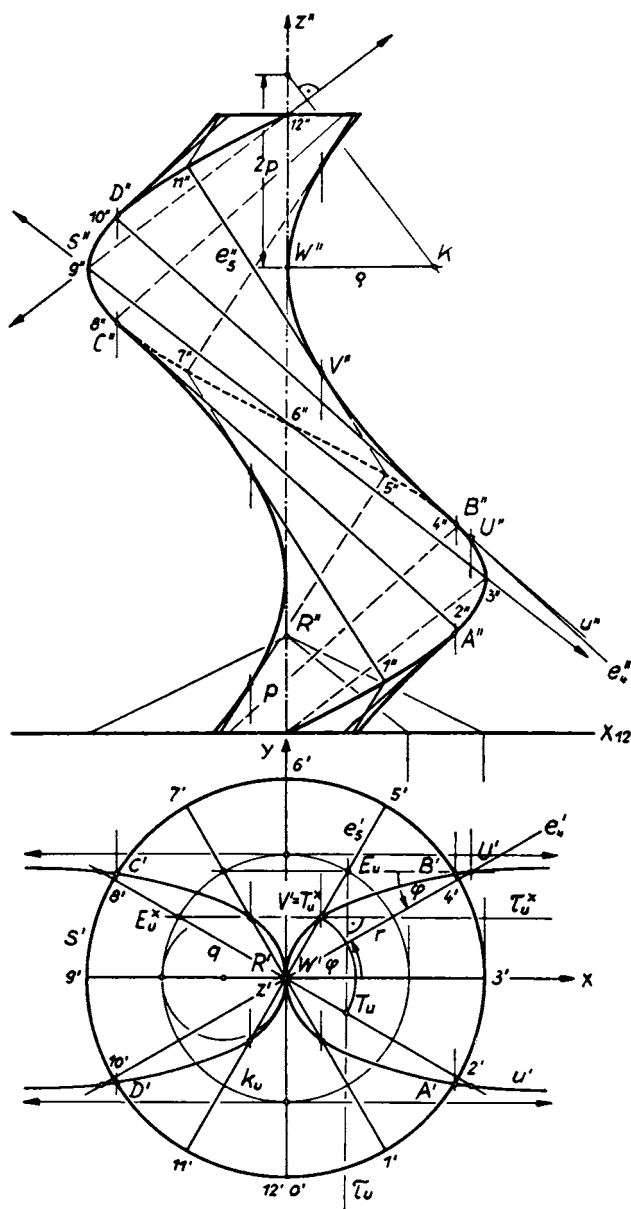


Fig. 197. Konstruktion des wahren Umrisses u und scheinbaren Umrisses u'' für den Aufriß einer scharfgängigen Regelschraubfläche. Der Grundriß u' des zweiten wahren Umrisses ist eine Kappakurve

trachtet man nur den innerhalb der Doppelschraublinie s liegenden Teil der scharfgängigen Regelschraubfläche, dann sind diese Punkte Anfangs- und Endpunkte des zweiten scheinbaren Umrisses u'' der Fläche.

Der *scheinbare Umriß* u'' der Fläche besteht aus unendlich vielen hyperbelartigen Zweigen (keine Hyperbeläste!), die ihre Scheitel auf der Schraubachse z'' haben und sich abwechselnd nach rechts und links öffnen; u'' ist keine algebraische sondern eine *transzendente Kurve*. Der *Mittelpunkt K des Scheitelschmieglekreises* eines dieser Zweige wird folgendermaßen gefunden (ohne Beweis): Man trägt auf der Schraubachse z'' vom Scheitel W'' aus den doppelten Parameter $2p$ an, fällt von dem Endpunkt das Lot auf die Asymptote von u'' und schneidet dieses mit der durch W'' gehenden Symmetrieachse der Kurve u'' im Punkt K .

Im *Grundriß* u' überdecken sich die unendlich vielen Zweige der Umrißkurve u , so daß eine einzige *algebraische Kurve* mit horizontaler und vertikaler Symmetrieachse entsteht. Wegen ihrer Gestalt, die an den griechischen Buchstaben κ (*Kappa*) erinnert, heißt diese Kurve u' , die (in anderem Zusammenhang) um 1660 schon bei GERARD VAN GUTSCHOVEN, einem Schüler und Mitarbeiter von DESCARTES, vorkommt, nach A. AUBRY (1895) *Kappakurve*. Aus der Konstruktion der Kurve u' in Fig. 186 liest man sofort ihre Polargleichung zu

$$(8) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{r} \quad \text{oder} \quad r = q \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$

ab, aus der sich ihre Gleichung in cartesischen Koordinaten (x, y) ergibt:

$$(9) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = q \cdot \frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2) y^2 - q^2 x^2 = 0.$$

Die Kappakurve ist somit eine *algebraische Kurve 4. Ordnung*, die sowohl bezüglich der x - wie der y -Achse symmetrisch liegt. Aus ihrer *Parameterdarstellung* (mit dem Polarwinkel φ als Parameter)

$$(10) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi = q \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, \\ y = r \sin \varphi = q \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

ist erneut zu entnehmen, daß

$$(11) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} y = +q, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi} y = -q$$

ist, d. h. daß die Geraden $y = \pm q$ *Asymptoten* der Kappakurve sind. Durch eine ähnliche Überlegung wie bei der Archimedischen Spirale findet man als *Schmieglekreisradius* ϱ_0 der Kappakurve im Scheitel den Wert

$$(12) \quad \varrho_0 = \frac{q}{2}.$$

75. Die schiefe offene Regelschraubfläche

Wird eine zur Schraubachse z windschiefe Gerade e verschraubt, so entsteht eine offene Regelschraubfläche. Im Gegensatz zu den geschlossenen Regelschraubflächen (Wendelfläche und scharfgängige Regelschraubfläche) gehört die Schraubachse jetzt nicht der Fläche an. Alle Erzeugenden der offenen Regelschraubfläche verlaufen außerhalb eines zur Schraubachse z coaxialen Berührungszylinders, dessen Radius gleich dem kürzesten Abstand a der Erzeugenden e von der Schraubachse z ist. Der Normalriß einer offenen Regelschraubfläche in Richtung der Schraubachse (Grundriß) weist daher eine von Erzeugenden nicht erfüllte kreisförmige Öffnung auf.

Eine offene Regelschraubfläche heißt *gerade*, wenn die zur Schraubachse windschiefen Erzeugenden die Schraubachse senkrecht kreuzen, und *schief*, wenn diese Erzeugenden gegen die Schraubachse einen von 0° und 90° verschiedenen Winkel bilden.

Eine *schiefe offene Regelschraubfläche* besitzt (ähnlich wie die schiefe geschlossene Regelschraubfläche) unendlich viele Bahnschraublinien als *Doppelkurven*, längs denen sich die Fläche selbst durchdringt. In Fig. 198 sei jene *ausgezeichnete Doppelkurve* s im Grundriß s' und Aufriß s'' gegeben, welche den *kleinsten Radius* hat und der Schraubachse z am nächsten liegt. Ihr Parameter $p = \frac{h}{2\pi}$ legt die Spitze R des *Richtkegels der Schraubung* fest. Damit nun s die Doppelkurve der Fläche ist, müssen durch s zwei verschiedene Mäntel der Fläche und somit durch jeden Punkt von s zwei verschiedene Erzeugende gehen. Verfolgt man diese beiden Erzeugenden ins Innere des zu s gehörigen Schraubzylinders, dann steigt die eine mit dem konstanten Winkel $\beta \neq 0$ an, während die andere mit demselben Winkel fällt.

Wir wählen $e_0 = [2, 10]$ als Erzeugende in frontaler Lage (parallel zur Aufrißebene); ihr Neigungswinkel β gegen die Grundrißebene erscheint im Aufriß in wahrer Größe. A_0 sei der Fußpunkt des Lotes von der Schraubachse z auf e_0 und a die Länge dieses Gemeinlotes zwischen z und e_0 , d. h. der kürzeste Abstand zwischen z und e_0 . Die Tangente an die Bahnschraublinie des Punktes A_0 habe gegen die Grundrißebene den Neigungswinkel α . Auch α erscheint im Aufriß in wahrer Größe.

1. In Fig. 198 behandeln wir zunächst den Fall, daß die Winkel β und α entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Die Erzeugende e_0 gehe durch die Punkte 2 und 10 der Doppelkurve s . Durch Verschrauben um jeweils $\frac{1}{12}$ der Ganghöhe h im Abwärts- bzw. Aufwärtssinn der Schrau-

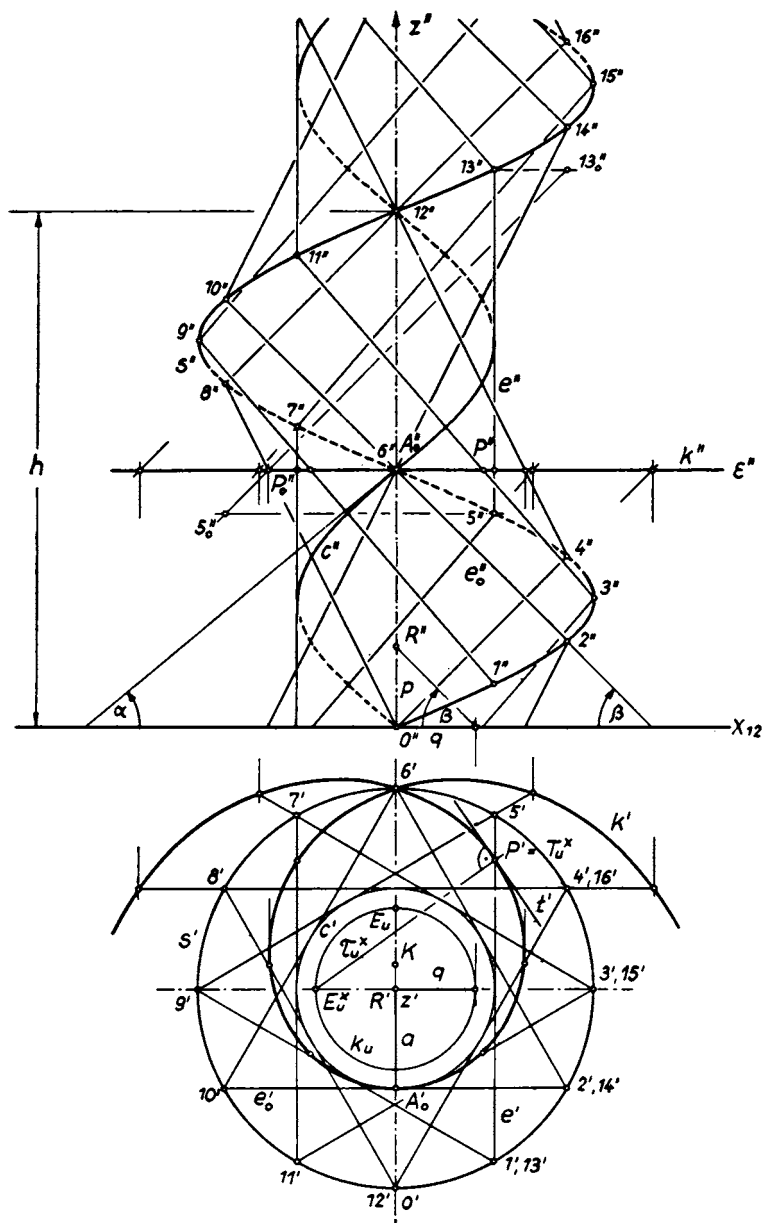


Fig. 108. Schiefe offene Regelschraubfläche mit Erzeugenden, Doppelkurve, Kehlschraublinie, Fluchtkreis, Tangentenebene τ im Punkte P , Normalschnitt k (Verallgemeinerung der Kreisevolvente und der Archimedischen Spirale). Die Bahntangente der Kehlschraublinie und die Erzeugende der Regelschraubfläche fallen nach verschiedenen Seiten (unter den Winkeln α bzw. β) gegen die Horizontalebene

bung ergeben sich dann die weiteren Erzeugenden $[1, 9]$, $[0, 8]$, ... bzw. $[3, 11]$, $[4, 12]$ usf. Durch den Punkt 8 auf s gehen dann z. B. die beiden Erzeugenden $[0, 8]$ und $[8, 16]$. In Fig. 198 sind diese Erzeugenden nur soweit eingezeichnet, als sie innerhalb des zu s gehörigen Schraubzylinders verlaufen. In Wirklichkeit setzen sie sich nach beiden Seiten unbegrenzt fort, so daß auch die Fläche sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt.

Im Grundriß umhüllen die Erzeugenden e einen Kreis c' , der den Grundriß eines Zylinders mit der Achse z und dem Radius a darstellt. Er wird von den einzelnen Erzeugenden in jenen Punkten berührt, in denen die Erzeugenden die kürzeste Entfernung von der Schraubachse haben. Jeder solche Berührungspunkt heißt *Kehlpunkt* der betreffenden Erzeugenden. Die Gesamtheit aller Kehlpunkte bildet eine Schraublinie c , nämlich die Bahnschraublinie des Punktes A_0 ; sie heißt *Kehllinie* (*Kehlschraublinie*) der offenen schiefen Regelschraubfläche.

Bemerkung 1: Allgemein ist die *Kehllinie einer windschiefen Regelfläche* folgendermaßen definiert: Zwei benachbarte Erzeugende e_1 und e_2 einer windschiefen Regelfläche sind zueinander windschief. Sie haben ein Gemeinlot, d. h. eine Gerade, die zugleich auf e_1 und e_2 senkrecht schneidet. Auf ihm liegt der kürzeste Abstand zwischen e_1 und e_2 . Läßt man nun die benachbarte Erzeugende e_2 auf der Fläche gegen die Erzeugende e_1 rücken, so nähert sich der Fußpunkt des Gemeinlotes auf e_1 einer ganz bestimmten Grenzlage A_1 , dem *Kehlpunkt* K der Erzeugenden e_1 . Die Gesamtheit der Kehlpunkte der einzelnen Erzeugenden bildet auf der Fläche die *Kehllinie* der windschiefen Regelfläche.

Bei einem *einschaligen Drehhyperboloid* ist die Kehllinie mit dem *Kehlkreis* identisch, bei einer *geschlossenen Regelschraubfläche* fällt sie mit der *Schraubachse* zusammen. Bei einer *abwickelbaren Regelfläche*, d. h. bei einer Regelfläche, die sich in die Ebene abwickeln (verebnen) läßt (*Torse*, z. B. Schraubtorse), deckt sich die Kehllinie mit der *Grallinie* der Torse, bei einem *Kegel*artet sie in die *Kegelspitze* aus.

Um den *Normalschnitt* k der schiefen offenen Regelschraubfläche zu konstruieren, legen wir etwa in der Höhe des Punktes 6 eine horizontale Ebene ε und schneiden die einzelnen Erzeugenden e im Aufriß mit ε'' (Fig. 198). Die Grundrisse dieser Schnittpunkte bestimmen den Grundriß k' des Normalschnittes. Liegt dabei die Erzeugende, wie im Falle von $[5, 13]$, in einer doppeltprojizierenden Ebene, so findet man den Grundriß P' ihres Durchstoßpunktes P mit ε durch Drehung von $[5, 13]$ um die z -Achse in die aufrißparallele Lage $[5_0, 13_0]$. Dabei ist ε fest; 5 und 13 wandern im Grundriß nach $5'_0 = 8'$ und $13'_0 = 16'$, im Aufriß nach $5''_0$ und $13''_0$. Aus dem gedrehten Spurpunkt P''_0 folgt dann sein Grundriß P' .

Die *Tangente* t in einem beliebigen Punkt des Normalschnittes k , z. B. im Spurpunkt P von $e = [5, 13]$ auf ε , ist die *Spur der Tangentenebene* τ in

P an die Fläche auf der Normalschnittebene ε . Diese Tangentenebene τ wird aufgespannt von der Erzeugenden e und der Tangente an die Bahn-schraublinie im Punkte P . Die durch die Spitze R des Richtkegels (Höhe $p = h/2\pi$) gelegten Parallelen zu den Erzeugenden e bestimmen den *Fluchtkegel* der Regelschraubfläche, dessen Basiskreis in der Grundrißebene ihr *Fluchtkreis* k_u (vom Radius $q = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$) ist. Die zu e parallele Mantellinie des Fluchtkegels legt den *Fluchtpunkt* E_u der Erzeugenden e auf k_u fest, aus dem durch eine positive Vierteldrehung der *Drehfluchtpunkt* E_u^x von e hervorgeht. Da der Drehfluchtpunkt T_u^x der Bahntangente von P mit dem

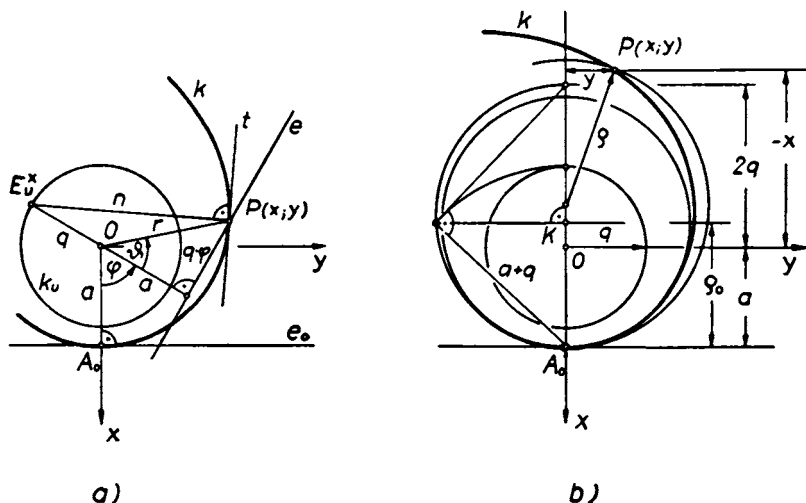


Fig. 199. a) Kinematisches Erzeugungsgesetz des Normalschnittes einer schiefen offenen Regelschraubfläche, b) Ermittlung und Konstruktion des Schmieglekreises im Scheitel A_0 dieses Normalschnittes

Grundriß P' zusammenfällt, ist $[P', E_u^x] = \tau_u^x$ die *Drehflucht der Tangentenebene* τ . Die (in Fig. 187 nicht eingezeichnete) zu τ_u^x senkrechte Gerade durch E_u ist dann die *Fluchtspur* τ_u der Tangentenebene, zu der die gesuchte Tangente t' an die Spurkurve k' in P' parallel ist. Man kann also (ohne Benützung von τ_u) sofort $t' \perp \tau_u^x$ einzeichnen.

Der Normalschnitt k der offenen schiefen Regelschraubfläche kann *kinematisch* auf folgende Weise erzeugt werden (Fig. 199a): Eine Gerade e der Ebene dreht sich um einen festen Punkt O , der nicht auf e liegt, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Gleichzeitig wandert ein Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit auf e . Dann beschreibt P die Kurve k .

Ist e_0 jene Lage von e , in welcher der Punkt P gerade mit dem Lotfußpunkt A_0 von O auf e_0 zusammenfällt, dann ergibt sich für den Polarradius

$r = OP$ des wandernden Punktes P die Beziehung

$$(1) \quad r^2 = a^2 + q^2 \varphi^2,$$

wobei a der Abstand der Erzeugenden e von O , φ der Winkel des Lotes von O auf e (nicht der Polarwinkel von P !), gezählt von der Nullrichtung $\overrightarrow{OA_0}$ aus, und q eine Konstante, nämlich der *Radius des Fluchtkreises* k_u ist. Führt man ein rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem $O(x, y)$ ein, dessen x -Achse mit $\overrightarrow{OA_0}$ zusammenfällt, so gilt (Bild 188 a):

$$(2) \quad \begin{cases} x = r \cos(\varphi + \vartheta) = r(\cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta), \\ y = r \sin(\varphi + \vartheta) = r(\sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta). \end{cases}$$

Da nun

$$(3) \quad \cos \vartheta = \frac{a}{r}, \quad \sin \vartheta = \frac{q\varphi}{r}$$

ist, erhält man in

$$(4) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi - q\varphi \sin \varphi, \\ y = a \sin \varphi + q\varphi \cos \varphi \end{cases}$$

eine *Parameterdarstellung des Normalschnittes* k der schiefen offenen Regelschraubfläche.

Da dieses Gleichungspaar für den *Sonderfall* $q = -a$ der *Schraubtorse* eine *Kreisevolvente* darstellt, ist der *Normalschnitt* k der *schiefen offenen Regelschraubfläche* eine *verallgemeinerte Kreisevolvente*. Für den Sonderfall $a = 0$ der geschlossenen schiefen Regelschraubfläche geht die Kurve k in eine *Archimedische Spirale* über, weshalb die Kurve k zugleich auch als eine *Verallgemeinerung der Archimedischen Spirale* angesehen werden kann.

Fig. 199 a zeigt nochmals die bereits bewiesene und in Fig. 198 eingetragene *Tangentenkonstruktion* für die Kurve k : Die Normale n des Kurvenpunktes P geht durch den Schnittpunkt E_u^x des Fluchtkreises k_u (Radius q) mit dem über O hinaus verlängerten Lot von O auf e .

Auch der *Schmiegekreisradius* ϱ_0 im Scheitel A_0 des Normalschnittes k kann leicht ermittelt werden (Fig. 199 b). Ein beliebiger die Kurve im Scheitel A_0 berührender Kreis (Radius ϱ) schneide die Kurve im Punkt $P(x, y)$ und dem dazu bezüglich der x -Achse symmetrischen Punkt $\bar{P}(x, -y)$. Dann gilt nach dem Sehnensatz für die lotrechte Sehne durch P :

$$(5) \quad (a - x)(2\varrho - a + x) = y^2$$

oder

$$(6) \quad 2\rho = \frac{y^2 + (a-x)^2}{a-x}$$

Setzt man hierin die Koordinaten x und y des Kurvenpunktes P aus (4) ein, dann findet man:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2\rho &= \frac{2a^2(1 - \cos \varphi) + q^2 \varphi^2 + 2aq\varphi \sin \varphi}{a(1 - \cos \varphi) + q\varphi \sin \varphi} \\ &= \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4q^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 8aq \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4q \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

oder; wenn man Zähler und Nenner durch $2 \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \neq 0$ dividiert,

$$(8) \quad 2\rho = \frac{2a^2 \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2 + 2q^2 + 4aq \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}}{a \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2 + 2q \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Läßt man nun $\varphi \rightarrow 0$ gehen, dann erhält man aus (8) wegen $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2} = 1$ für den *Scheitelschmiegleitkreisradius* ρ_0 von k die Beziehung

$$(9) \quad 2\rho_0 = \lim_{\varphi \rightarrow 0} 2\rho = \frac{2a^2 + 2q^2 + 4aq}{a + 2q} = 2 \cdot \frac{(a+q)^2}{a+2q}.$$

Es ist also $a+q$ das geometrische Mittel zwischen $a+2q$ und ρ_0 ; daher kann ρ_0 aus der Proportion

$$(10) \quad \rho_0 : (a+q) = (a+q) : (a+2q)$$

leicht (etwa mit Hilfe des Kathetensatzes im rechtwinkligen Dreieck) konstruiert und die Schmiegkreismitte K des Normalschnittes k im Scheitel A_0 gezeichnet werden (Fig. 199b).

Der *scheinbare Umriß* u'' der Regelschraubfläche im *Aufriß* ist die Hüllkurve der Aufrisse e'' ihrer Erzeugenden e . Ihm entspricht eine bestimmte Flächenkurve u , der *wahre zweite Umriß der Fläche*. Der Konstruktion der Kurve u liegt die gleiche Überlegung wie bei der geschlossenen schiefen Regelschraubfläche in 74. zugrunde. Die *Tangentenebene* τ in jedem Punkt der Umrißkurve u , z. B. im Punkt U_1 der Erzeugenden $e = [4, 12]$, ist *weitprojizierend* (Fig. 200). Ihre erste Spur τ_1 und damit auch ihre

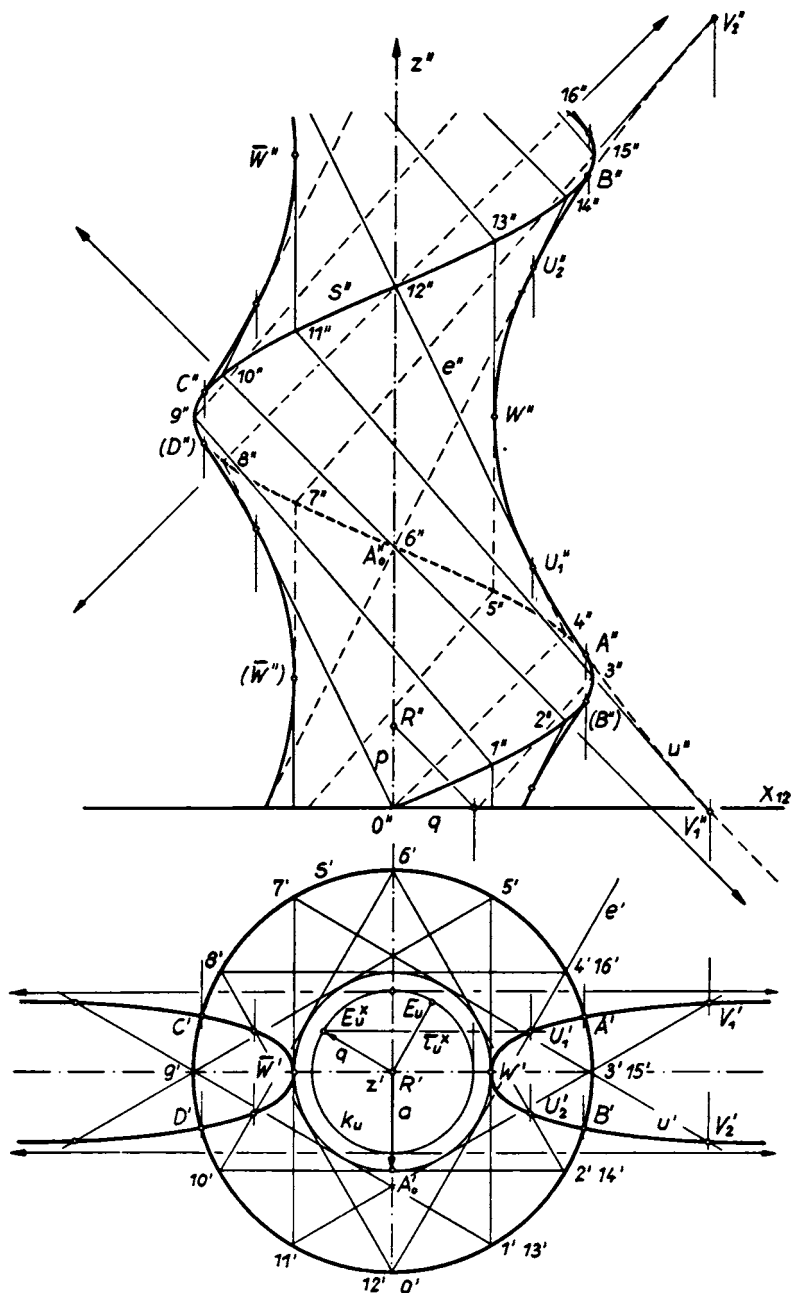


Fig. 200. Konstruktion des wahren Umrisses u und scheinbaren Umrisses u'' für den Aufriß einer offenen schiefen Regelschraubfläche. (Grundriß $u' =$ verallgemeinerte Kappakurve)

Fluchtspur τ_u stehen auf der Rißachse x_{12} senkrecht, ihre *Drehflucht* τ_u^\times ist somit zur *Rißachse* parallel. Die Drehflucht τ_u^\times geht durch den Drehfluchtpunkt E_u^\times der Erzeugenden e , der über deren Fluchtpunkt E_u auf dem Fluchtkreis k_u gewonnen wird. Der Schnittpunkt $U'_1 = [e', \tau_u^\times]$ ist der *Grundriß des Umrißpunktes* U_1 von e . Der Ort der Punkte U_1 auf den einzelnen Erzeugenden e ist dann die gesuchte *zweite wahre Umrißkurve* u . Frontale Erzeugenden, wie [2, 10] und [8, 16] führen zu Fernpunkten von u und weisen in die Asymptotenrichtungen von u . Der *Grundriß* u' des zweiten wahren Umrisses u erweist sich als eine (bezüglich z' horizontal- und vertikalsymmetrische) *algebraische Kurve 4. Ordnung* (*Verallgemeinerung der Kappakurve*) mit den Scheiteln W und \bar{W}' und den beiden horizontalen Tangenten des Fluchtkreises k_u als Asymptoten. Der *Aufriß* u'' , d. h. der *scheinbare Umriß der Fläche für den Aufriß* ist eine *transzendente Kurve, die sich aus unendlich vielen hyperbelartigen Zweigen* (keine Hyperbeläste!) *zusammensetzt*. Die Punkte W'' und \bar{W}'' sind die *Scheitel* zweier solcher Zweige, die Aufrisse [2'', 10''] und [8'', 16''] der frontalen Erzeugenden ihre *Asymptoten*. Die Punkte A', B', C', D' , in denen die Kurve u' den Grundriß s' der Doppelkurve s schneidet, führen, in den Aufriß übertragen, zu den Punkten A'', B'', C'', D'' , in denen die Umrißkurve u'' den Aufriß s'' der Doppelkurve berührt. Zeichnet man nur den Teil der Fläche, der sich ins Innere des Schraubzylinders von s erstreckt, so sind diese Punkte Anfangs- und Endpunkte des zweiten scheinbaren Umrisses u'' .

2. Nun behandeln wir noch den Fall einer schiefen offenen Regelschraubfläche, für die der Neigungswinkel β der Erzeugenden e dasselbe Vorzeichen hat wie der Neigungswinkel α der Bahnschraublinie des achsennächsten Punktes A_0 (Fig. 201).

Nach Konstruktion der Selbstdurchdringungskurve s (Schraublinie 0, 1, ..., 16) sei $e_0 = [10, 14]$ die Erzeugende in frontaler Lage, deren Neigungswinkel β im Aufriß in wahrer Größe auftritt. Aus ihr gewinnt man durch Verschrauben die weiteren Erzeugenden [9, 13], [8, 12], ... bzw. [11, 15], [12, 16] usw.

Die *Kehllinie* c der Fläche, d. h. die Bahnschraublinie des Punktes A_0 , wird wie in Fig. 198 konstruiert. In Fig. 201 ist nur ihr Grundriß c' eingezeichnet. Auch der *Normalschnitt* k , etwa in Höhe des Punktes 3, wird punktweise wie in Fig. 198 gewonnen, und auch die Konstruktion der Tangente t' in einem beliebigen Punkt P' von k' erfolgt wortwörtlich genau so wie zuvor. Der Normalschnitt k ist wieder eine *verallgemeinerte*

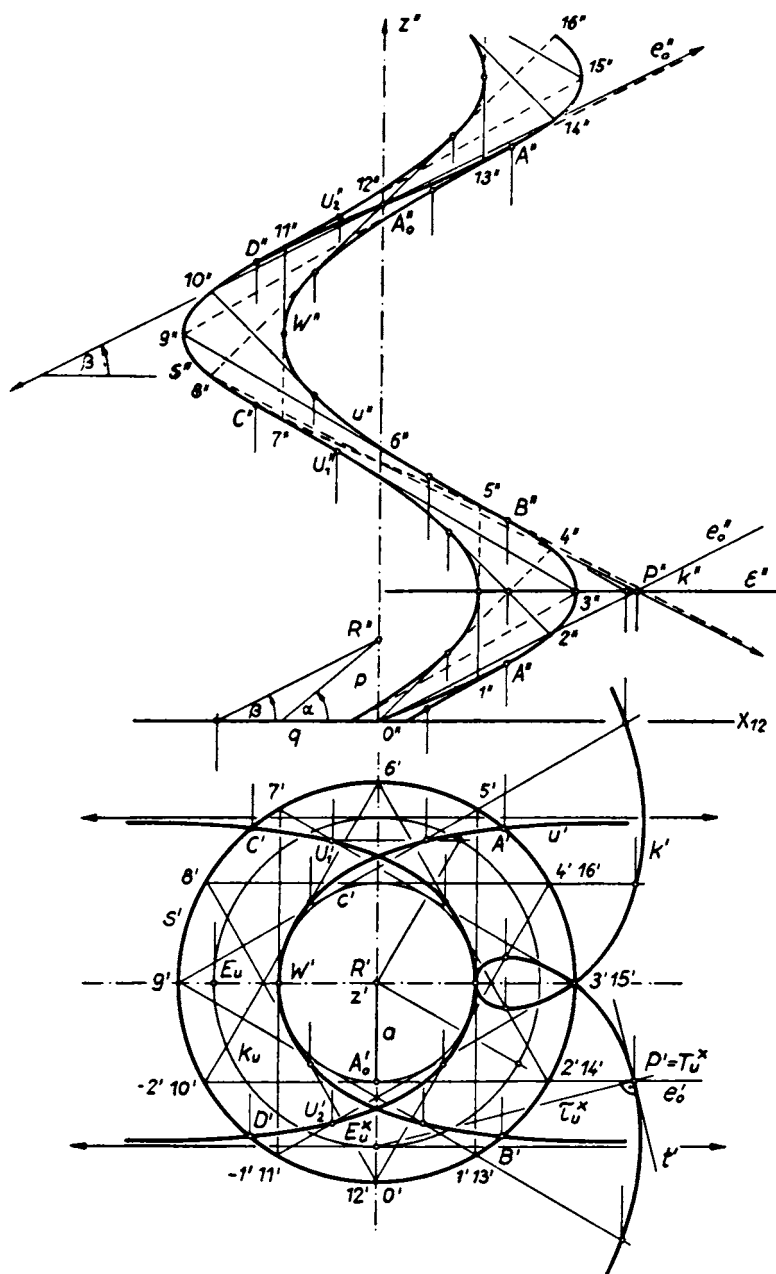


Fig. 201. Schiefe offene Regelschraubfläche mit Erzeugenden, Doppelkurve, Kehlschraublinie, Fluchtkeis, Normalschnitt, wahren und scheinbarem zweiten Umriß. Die Bahntangente der Kehlschraublinie und die Erzeugende der Regelschraubfläche fallen nach derselben Seite (unter den Winkeln α bzw. β) gegen die Horizontalebene

Kreisevolvente, wobei jedoch jetzt $q < 0$ ist. Im *Sonderfall* $q = -a$ sind wegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{a}$ und $\operatorname{tg} \beta = -\frac{p}{q} = \frac{p}{a}$ die Winkel α und β einander gleich. Der Normalschnitt k ist dann eine *Kreisevolvente*, die Fläche selbst eine *Schraubtorse*. Für sie fallen die Doppelkurve s und die Kehllinie c mit der Gratlinie der Schraubtorse zusammen.

Schließlich ist in Fig. 201 auch die Konstruktion des wahren Umrisses u für den Aufriß durchgeführt, die ebenso wie in Fig. 189 verläuft.

76. Die sphärische Abdehnung einer scharfgängigen Regelschraubfläche

Eine scharfgängige Regelschraubfläche sei durch ihre Doppelkurve (Schraublinie s) und ihre Ganghöhe h gegeben. Der Parameter $p = \frac{h}{2\pi}$ legt die Spitze R des zu s gehörigen Richtkegels fest. Die Hüllkurve u'' der Aufrisse der Erzeugenden $[0, 6], [1, 7], \dots, [8, 14], [9, 15], \dots$ ist der scheinbare Umriß der Fläche im Aufriß, dessen Grundriß die Kappakurve u' ist (Fig. 202).

Diese *scharfgängige Regelschraubfläche* soll nun *nach einer beliebigen Drehfläche, deren Achse mit der Schraubachse zusammenfällt, abgedreht werden*. Als Beispiel einer solchen Drehfläche wählen wir eine Halbkugel κ , deren Mittelpunkt auf der Schraubachse in der Höhe des Punktes 6 liegt und deren Radius a gleich dem Radius der Schraublinie s ist.

Um diese *sphärische Abdehnung* zu konstruieren, haben wir die einzelnen Erzeugenden e der Schraubfläche mit der Halbkugel κ zu schneiden. Dazu legen wir durch jede dieser Erzeugenden die erstprojizierende Ebene (*Meridianebene*), die, da die Regelschraubfläche als geschlossen vorausgesetzt wird, die Kugel κ in einem vertikalen Großkreis schneidet. Statt nun für jede einzelne Erzeugende e diesen Großkreis, der sich im Aufriß i. a. als Ellipse projiziert, zu konstruieren und e'' mit dieser Ellipse zu verschneiden, ist es bequemer, *die einzelnen Erzeugenden e der Regelschraubfläche und die zugehörigen Meridiankreise der Kugel um die Schraubachse z zu drehen, bis die Erzeugenden e die zur Aufrißebene parallele Lage e^0 erreicht haben*. Der gedrehte Großkreis der Kugel deckt sich dann mit dem zweiten Umrißkreis κ'' der Kugel κ . Die Schnittpunkte von e^0 mit diesem Umrißkreis sind dann die gesuchten Durchstoßpunkte der Erzeugenden e durch die Kugel in der gedrehten Lage. Dreht man die Erzeugenden e^0 in die Ausgangslage e zurück, dann wandern diese Schnittpunkte jeweils auf einem horizontalen Kreis, der sich im Aufriß als Lot zur Schraubachse projiziert.

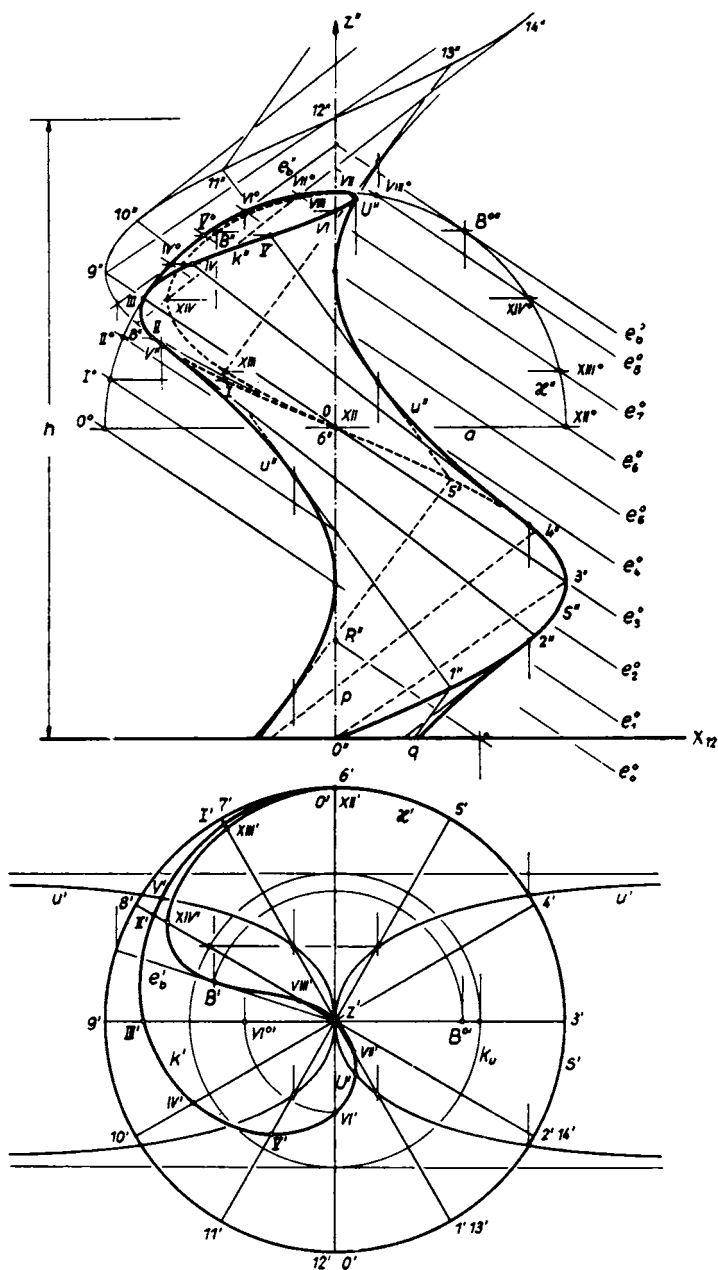


Fig. 202. Sphärische Abdringung einer scharfgängigen Regelschraubfläche

Aus den so im Aufriß konstruierten Durchstoßpunkten der Erzeugenden e erhält man dann auf e' ihren Grundriß.

Die erste Erzeugende, die in Fig. 202 die Halbkugel trifft, ist $e_0 = [0, 6]$, die die Schraubachse in der Höhe von 3 schneidet. Nach der Paralleldrehung gelangt e_0 in die Lage $e_0^0 \mid [3'', 9'']$; der Schnittpunkt 0^0 von e_0^0 mit dem Umrißkreis der Kugel führt zum Punkt 0 auf $e''_0 = z''$. Entsprechend gehört zur Erzeugenden $e_1 = [1, 7]$ die Paralleldrehung e_1^0 , die den Punkt I^0 liefert. Durch Zurückdrehen findet man auf e''_1 den Punkt I der *Durchdringungskurve k'' im Aufriß*. Die Erzeugende $e_3 = [3, 9]$ befindet sich schon in Parallellage, weshalb der Schnittpunkt III Berührungspunkt des Aufrisses der Schnittkurve mit dem zweiten Umrißkreis der abdrehenden Halbkugel ist. Beginnend mit e_6 , weisen die Erzeugenden jeweils zwei Schnittpunkte mit der Halbkugel auf, z. B. e_6 die Punkte VI und XII (im Aufriß auf z''). Die höchste Erzeugende, die die Kugel κ gerade noch trifft, ist jene, deren Paralleldrehung e_9^0 den Umrißkreis κ'' im Punkte $B^{0''}$ berührt. Der Punkt B'' selbst ergibt sich dann unter Benutzung des Grundrisses: Der Punkt B' liegt nämlich 1. auf dem Kreis um z' mit dem Radius $z'B^0$ und 2. auf jener Erzeugenden e'_6 , welche den Winkel zwischen e'_8 und e'_9 im gleichen Verhältnis teilt wie der Achsenschnittpunkt von e''_6 die Strecke zwischen den Achsenschnittpunkten von e''_8 und e''_9 . Überträgt man die konstruierten Punkte 0, I, II, ..., XII in den Grundriß, so erhält man den Grundriß k' der gesuchten *Abdrehkurve*. Die Schnittpunkte U' und V' mit dem Grundriß u' der zweiten wahren Umrißkurve u legen im Aufriß jene Punkte U'' und V'' fest, in denen die Kurve k'' den zweiten scheinbaren Umriß u'' der Fläche berührt.

Die *Abdrehkurve k* ist eine im Punkt 6 der Schraublinie s beginnende und in diesen Punkt zurücklaufende Kurve. Dabei ist die Tangente an k im Punkte 6 mit der Tangente an s identisch. Die Erzeugende e_6 berührt die Kurve k in beiden Rissen im Punkte B .

77. Die Schraubrohrfläche (Serpentine, Archimedisches Schlangenrohr)

Wird eine beliebige (ebene oder räumliche) Kurve k verschraubt, so erhält man eine *allgemeine Schraubfläche*. Jeder Punkt der verschraubten Kurve k beschreibt dabei eine Bahnschraublinie, und alle diese Bahnschraublinien haben denselben Parameter p und dieselbe Spitze R des Richtkegels.

Unter den allgemeinen Schraubflächen sind von besonderer Bedeutung die *zyklischen Schraubflächen*, die durch *Schraubung eines Kreises k in*

beliebiger Lage zur Schraubachse entstehen. Liegt insbesondere der verschraubte Kreis k in der Normalebene v der Bahnschraublinie m seines Mittelpunktes (Mittenkurve der Fläche), dann ist die zugehörige zyklische Schraubfläche eine Schraubrohrfläche oder ein Archimedisches Schlangenrohr (Serpentine). Diese Schraubfläche kann auch durch Schraubung einer Kugel κ , die denselben Radius r wie der Kreis k hat, erzeugt werden, deren Mitte dabei längs der Schraublinie m entlanggeführt wird. Die Schraubfläche ist dann die Hüllfläche der Schar der Kugeln κ .

Gegeben sei (Fig. 203) die Mittenkurve m einer Schraubrohrfläche. Ihre Ganghöhe sei h , der Radius des verschraubten Kreises k (bzw. der verschraubten Kugel κ) sei r , wobei r kleiner als der zu m gehörige Schraubradius a vorausgesetzt wird.

Der scheinbare Umriß u'_1 der Fläche für den Grundriß besteht aus zwei zu m' konzentrischen Kreisen vom Radius $a + r$ bzw. $a - r$, während der wahre erste Umriß u_1 von zwei auf der Fläche liegenden Schraublinien der Ganghöhe h gebildet wird. (Ihr Aufriß u'_1 ist in Fig. 203 nicht eingezeichnet.) Die innere Schraublinie, die von den der Schraubachse am nächsten liegenden Punkten der Fläche gebildet wird, ist die Kehlschraublinie, während die von der Schraubachse am weitesten entfernt liegenden Flächenpunkte die Wulstschraublinie des Schlangenrohres bilden.

Der scheinbare Umriß u'_2 der Schraubrohrfläche für den Aufriß ist die Hüllkurve der Aufrisse der frontalen Großkreise der Kugeln κ . Er besteht aus den beiden Parallelkurven der Sinuslinie m'' im Abstand r . Diese lassen sich punktweise dadurch konstruieren, daß man auf den Normalen der Sinuslinie m'' nach beiden Seiten den Radius r abträgt. Die Normalen gewinnt man dabei über die Tangenten der Sinuslinie, deren Konstruktion (mittels des Bahntangentenfluchtpunktes $T_u = T'_u = 1'$ und seines Aufnisses T''_u) in Fig. 192 für den Punkt 4 nochmals ausgeführt ist. Als Parallelkurve zum Aufriß m'' der Mittenkurve m hat die Kurve u''_2 die gleiche Evolute wie m'' . Insbesondere entsprechen den Wendepunkten $0''$, $6''$, $12''$ der Sinuslinie Wendepunkte der Parallelkurve u''_2 . Die Schmiegkreismitten K in den Scheiteln der Sinuskurve (Konstruktion nach 70.) sind zugleich auch Mittelpunkte für die Scheitelschmiegkreise der Kurve u''_2 . Dabei überkreuzt sich die innere Umrißkurve u''_2 , wenn, wie in Fig. 192 angenommen,

$$\varrho = \frac{p^2}{a} < r, \text{ also } p^2 < a \cdot r$$

ist, jeweils in Doppelpunkten in der Höhe des Scheitels unter zweimaliger Spitzenbildung, während für $p^2 \geq a \cdot r$ Doppelpunkte und Spitzen verschwinden.

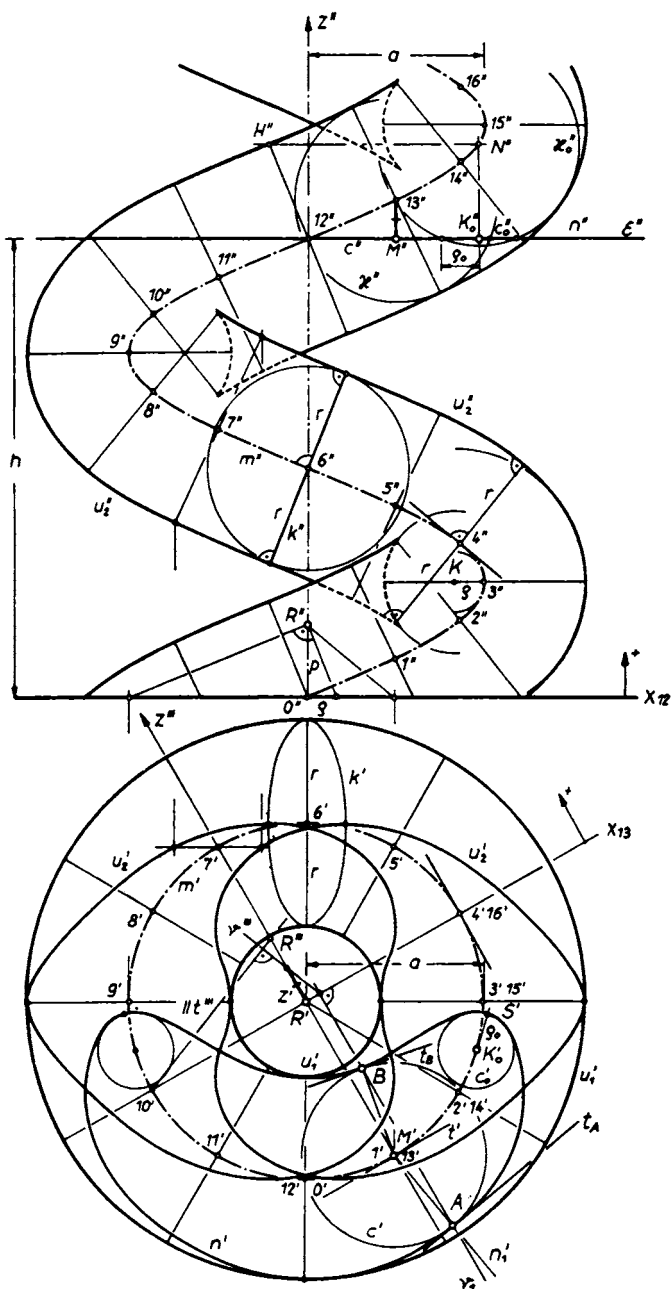


Fig. 203. Schraubrohrfläche (Archimedisches Schlangenrohr) mit Normalschnitt sowie wahren und scheinbarem zweiten Umriss u_2 bzw. u'_2

Zu dem scheinbaren Umriß u_2'' der Fläche für den Aufriß gehört als *zweiter wahrer Umriß* eine bestimmte Flächenkurve u_2 . Die Punkte von u_2 liegen jeweils auf dem im Aufriß gezeichneten, zur Aufrißebene parallelen Durchmesser der erzeugenden Kugel κ . Da sich dieser Durchmesser im Grundriß als Parallele zur Rißachse x_{12} darstellt, findet man den *Grundriß* u_2' des zweiten wahren Umrisses u_2 punktweise dadurch, daß man durch die Punkte von m' , etwa durch $7'$, die Horizontale legt und auf diese die Endpunkte der in $7''$ errichteten Normalen zu m'' herunterlotet. Man erhält zwei bezüglich der Vertikalen durch z' symmetrische (algebraische) Kurvenzweige u_2' von herzförmiger Gestalt.

Um den Grundriß n' des *achsennormalen Schnittes der Schraubrohrfläche* (Schnitt mit einer Horizontalebene ε), etwa in Höhe des Punktes 12 geführt, zu konstruieren, zeichnet man im Aufriß eine Anzahl der die Fläche einhüllenden Kugeln κ . Von der horizontalen Schnittebene ε wird jede solche Kugel in einem *horizontalen Kleinkreis* c geschnitten, der im Aufriß als horizontale Sehne c'' des zweiten Umrißkreises κ'' von κ erscheint. Sein Grundriß c' ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt M' auf m' liegt und der samt seinem Radius aus dem Aufriß hervorgeht. Der Grundriß n' des gesuchten *Normalschnittes* n ist dann die *Hüllkurve* dieser Kreise c' . Aus Symmetriegründen ist n' eine bezüglich der Vertikalen durch z' symmetrische nierenförmige Kurve. Fläche und Normalschnittebene sind nämlich axial symmetrisch bezüglich des Lotes, das man aus dem Punkte 12 der Mittenlinie m auf die Schraubachse z fallen kann.

Der *Normalschnitt* n kann auch leicht *punktweise samt Tangenten* konstruiert werden. Die z. B. zum Punkte 13 der Mittenkurve m gehörende Hüllkugel κ wird von der Schnittebene ε in dem Kleinkreis c geschnitten, dessen Mittelpunkt M sich im Grundriß mit $13'$ deckt. Um die beiden Punkte A und B zu finden, in denen der Grundriß n' des Normalschnittes n den Kreis c' berührt, legen wir durch die Schraubachse z eine Seitenrißebene, deren Rißachse x_{13} auf $[z', 13']$ senkrecht steht. In ihr fällt die Schraubachse z''' auf $[z', 13']$. Die Spitze R''' des Richtkegels liegt um den Parameter p über x_{13} auf z''' , und die zur Tangente t in 13 an die Schraublinie m parallele Erzeugende des Richtkegels ist die Gerade $[R''', 10']$. Die Normalebene v zur Schraublinie m im Punkte 13, in der jener Großkreis k der Kugel κ liegt, längs dessen die Kugel κ die Schraubfläche berührt, ist drittprojizierend, erscheint also im Seitenriß als Lot v''' zu $[R''', 10']$, und geht durch jenen Punkt $13'''$ auf z''' , der um dieselbe Strecke über z' liegt wie der Punkt $13''$ über ε'' . Durch den Schnittpunkt von v''' mit der Rißachse x_{13} verläuft dann die zu x_{13} senkrechte Spur v_1 der Normal-

ebene ν in der Ebene ε . Ihre Schnittpunkte A und B mit dem Kreis c' sind die Grundrisse der Schnittpunkte des Berührungskreises k der Hüllkugel κ mit dem Kreis c , d. h. die auf c' liegenden Punkte von n' . Zugleich sind die Tangenten t_A und t_B an den Kreis c' die Tangenten an n' in den Punkten A und B .

Verschraubt man die Kugel κ , deren Mittelpunkt der Punkt 13 ist, weiter nach oben, so wird der Schnittkreis c kleiner und zieht sich schließlich, wenn der Mittelpunkt von κ gerade um r über ε liegt, auf einen Punkt zusammen. Dieser Punkt liegt im Innern des Normalschnittes n . Dazwischen gibt es einen ausgezeichneten Kreis c_0 , für den die beiden Berührungspunkte A und B mit n gerade in einen Punkt S zusammengedrückt sind. Da dieser Kreis c_0 die Kurve n in S vierpunktig berührt, ist S ein Scheitel von n und c_0 sein *Scheitelschmieglekreis*. Er wird von jener Hüllkugel κ_0 aus ε ausgeschnitten, für die der zu m normale Großkreis (Berührungskreis) k_0 gerade die Ebene ε berührt. Befindet sich der Mittelpunkt der erzeugenden Kugel im Punkte 12 der Schraubenlinie m , so ist die Ebene des zu m normalen Großkreises zweitprojizierend, und der Höhenunterschied zwischen seinem Mittelpunkt und seinem tiefsten (oder höchsten) Punkt ist im Aufriß als Abstand des Punktes H'' von ε'' zu ersehen. Die Horizontale durch H'' schneidet daher auf m'' den Aufriß N'' des Mittelpunktes N jener Kugel κ_0 aus, deren Schnittkreis mit ε der gewünschte Scheitelschmieglekreis c_0 (Mittelpunkt K_0 , Radius ϱ_0) des Normalschnittes n ist.

78. Die gerade zyklische Schraubfläche

Außer der Schraubrohrlfläche gibt es noch zwei ausgezeichnete Typen zyklischer Schraubflächen.

Die *gerade zyklische Schraubfläche* entsteht durch Schraubung eines Kreises k , dessen Ebene zur Schraubachse normal ist. Sie tritt als *gewundene Säule* (*Barocksäule*) auf, wenn der erzeugende Kreis k die Schraubachse umschließt.

Enthält die Ebene des verschraubten Kreises k die Schraubachse, so entsteht eine *axiale zyklische Schraubfläche*, deren obere Hälfte, falls der Kreis k die Schraubachse nicht trifft, als Wölbung einer Wendeltreppe auftritt (*Wendelwölbfläche*). Eine solche schraubenförmige Gewölbefläche mit halbkreisförmigem Meridian wurde zuerst in der Abtei von Saint Gilles in Südfrankreich (in der Nähe von Arles) angewandt; ältere Bücher nennen sie daher auch *Schraubfläche von Saint Gilles*.

Im folgenden soll eine *gerade zyklische Schraubfläche* konstruiert werden. Ein horizontaler Kreis k_0 (Mittelpunkt O , Radius r) werde um die vertikale

Achse z verschraubt, wobei der Kreis die Schraubachse umfassen möge (Fig. 204). Sein Mittelpunkt beschreibt dabei eine Schraubenlinie m , die *Mitten-*

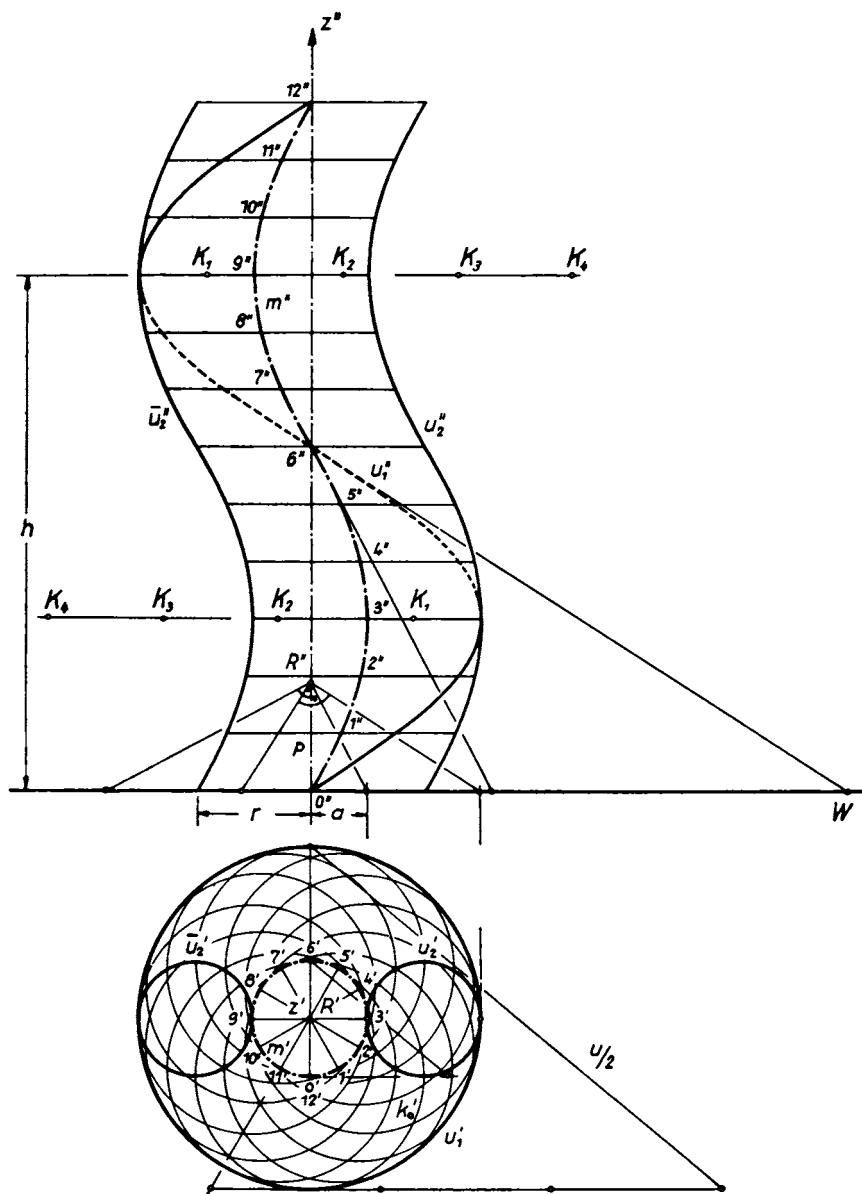


Fig. 204. Gerade zyklische Schraubfläche, erzeugt von horizontalen Kreisen vom Radius r , deren Mitten eine Bahnschraubenlinie m vom Radius $a < r$ beschreiben (hier: $a = r/2$)

kurve der Schraubfläche (Ganghöhe der Schraubung h , Parameter p , Schraubradius der Mittenkurve $a < r$).

Der erste wahre Umriß u_1 der Fläche ist eine Schraublinie vom Parameter p und dem Schraubradius $r + a$. Diese Wulstlinie projiziert sich im Grundriß als ein zu m' konzentrischer Kreis u'_1 vom Radius $r + a$ (erster scheinbarer Umriß der Fläche) und im Aufriß als Sinuslinie u''_1 . (Ist die Fläche durchsichtig, so gibt es noch als inneren ersten wahren Umriß eine Kehlschraublinie \bar{u}_1 vom Schraubradius $r - a$.)

Der zweite wahre Umriß u_2 der Fläche besteht aus zwei zur Schraublinie m kongruenten Schraublinien u_2 und \bar{u}_2 , deren Achsen um r nach rechts bzw. links gegenüber z versetzt sind. Ihre Aufrisse u''_2 und \bar{u}''_2 , d. h. der scheinbare Umriß für den Aufriß, stellen sich als zwei zu m'' kongruente Sinuslinien dar, die gegen m'' in horizontaler Richtung nach links und rechts um r verschoben sind; ihre Grundrisse u'_2 und \bar{u}'_2 bestehen aus zwei zu m' kongruenten Kreisen vom Radius a . Die Fläche kann also auch durch Schraubung einer solchen Schraublinie u_2 oder \bar{u}_2 erzeugt werden. In Fig. 204 sind auch noch die Scheitelschmiegekreismitten K_1 , K_2 , K_3 und K_4 der Sinuslinien u'_1 , \bar{u}'_2 , m'' und u''_2 eingezeichnet.

Die gerade zyklische Schraubfläche trägt gemäß ihrer Erzeugung eine Schar kongruenter Kreise k , die in parallelen (horizontalen) Ebenen liegen. Die Fläche kann demnach statt durch Schraubung auch durch Parallelverschiebung eines Kreises k erzeugt werden, bei der der Mittelpunkt des Kreises auf der Mittenschraublinie m der Fläche verschoben wird. Jeder Punkt des Kreises k beschreibt bei dieser krummen Schiebung eine zu m kongruente (aber zu m nicht koaxiale) Schraublinie; z. B. beschreibt der äußerste rechte Punkt von k die rechte Umrißschraublinie u_2 . Daher ist die gerade zyklische Schraubfläche auch eine Schiebfläche. Die Bahnkurven der einzelnen Kreispunkte bei dieser krummen Schiebung sind zu m kongruente Schraublinien vom Radius a , deren Achsen zu z parallel sind und von z den Abstand r haben.

Auf der geraden zyklischen Schraubfläche liegt daher außer der Schar kongruenter horizontaler Kreise k noch eine Schar zu m kongruenter und gleichgestellter Schraublinien u . Die Fläche kann demnach auch umgekehrt durch Schiebung einer solchen Schraublinie, etwa durch Schiebung von u_2 erzeugt werden, wobei die Bahnkurven dieser zweiten krummen Schiebung die kongruenten horizontalen Kreise k vom Radius r sind. Die horizontalen Kreise k und die zu m kongruenten aber exzentrischen Schraublinien u , von denen u_2 ein Vertreter ist, sind die beiden Scharen von Schiebkurven der geraden zyklischen Schraubfläche.

Zusammenfassend gilt somit

Satz 1: *Jede gerade zyklische Schraubfläche ist auch auf zwei Arten als Schiebfläche erzeugbar. Ihre beiden Scharen von Schiebkurven sind 1. horizontale Kreise k vom Radius r und 2. zur Mittenkurve m kongruente und gleichgestellte Schraublinien u vom Schraubradius a und Parameter p . Die Fläche entsteht dabei 1. durch krumme Schiebung eines der horizontalen Kreise k (z. B. von k_0) längs einer der gleichgestellten Schraublinien (z. B. längs u_2) oder 2. durch krumme Schiebung einer der gleichgestellten Schraublinien (z. B. von u_2) längs eines der horizontalen Kreise (z. B. längs k_0).*

XVII

Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung

79. Der Satz von Meusnier

Im folgenden sollen einige Sätze aus der Flächentheorie, die für die Darstellende Geometrie von Bedeutung sind, ohne Beweis¹⁾ zusammengestellt und an einigen Beispielen erläutert werden. Bei früherer Gelegenheit wurde von ihnen schon verschiedentlich Gebrauch gemacht (z. B. in 43., 45., 63., 64., 67.).

Alle folgenden Überlegungen setzen einen *regulären Punkt* P der *Fläche* φ voraus, d. h. einen Flächenpunkt mit einer eindeutig bestimmten Tangentenebene τ . Die Fläche φ soll überdies in P stetig gekrümmt sein.

Durch jeden solchen Punkt P lassen sich ∞^1 in der Tangentenebene τ liegende Geraden t legen, die sich als *Tangenten* von regulären Flächenkurven durch P ansehen lassen. Durch jede dieser Tangenten t gibt es je nach der Neigung zur Tangentenebene ∞^1 ebene Schnitte σ der Fläche, so daß also *durch jeden Flächenpunkt* ∞^2 *ebene Schnitte* σ *der Fläche* geführt werden können (Ebenenbündel mit dem Scheitel P). Welche *Zusammenhänge* bestehen *zwischen den Krümmungen* aller dieser ebenen Flächenschnitte im Punkte P der stetig gekrümmten Fläche φ ?

Im folgenden sei zunächst eine beliebige *festgewählte Flächentangente* t in P vorausgesetzt. Zu ihr gehören ∞^1 *ebene Flächenschnitte*, die von den durch t gelegten Ebenen erzeugt werden (*Ebenenbüschel mit der Achse* t). Wird die Fläche φ in der Richtung von t senkrecht auf eine Bildebene (Aufrißebene) projiziert, so deckt sich die Achse t dieses Ebenenbüschels im Aufriß mit dem Punkt P , und alle Ebenen σ des betrachteten Ebenenbüschels sind projizierend. Sie stellen sich im Aufriß dar als ein Geradenbüschel mit $P'' = t''$ als Mittelpunkt (Fig. 205). Diejenige Ebene des Ebenenbüschels, die auf der Tangentenebene τ senkrecht steht, die also die *Flächennormale* n enthält, liefert den zur Tangente t gehörenden

¹⁾ Bezüglich einer strengen und ausführlichen Herleitung dieser Sätze sei verwiesen auf: K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie* I/II/III, Sammlung Göschel, Berlin 1965²/1958/1959.

Normalschnitt ν der Fläche im Punkte P , während die Tangentenebene selbst zum *Tangentialschnitt* τ der Fläche in P führt. Jeder andere Schnitt heißt ein zur Tangente t gehöriger *schiefer Flächenschnitt* σ .

Die Normalebene ν durch t schneidet die Fläche φ in einer gewissen Kurve, die in P einen bestimmten *Schmiegekreis* hat. Sein Mittelpunkt heißt

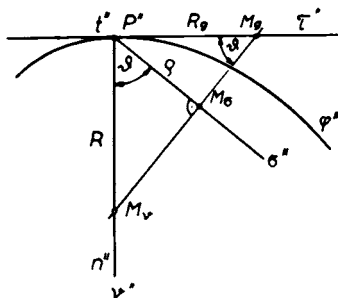


Fig. 205. Satz von MEUSNIER.

M_v = Schmiegkreismitte des Normalschnittes ν ; M_σ = Schmiegkreismitte des Schiefschnittes σ durch die (zur Bildebene normale) Tangente t der Fläche φ mit dem Berührungspunkte P

die zu t gehörige *Normalkrümmungsmitte* M_v , sein Radius ist der *Normalkrümmungsradius* R , dessen reziproker Wert als die *Normalkrümmung* $\frac{1}{R}$ der Fläche im Punkte P für die Tangentenrichtung t bezeichnet wird (Fig. 205).

Ein beliebiger *schiefer Schnitt* σ der Fläche durch die festgewählte Tangente t , der also die Flächennormale n nicht enthält, schließe mit dem Normalschnitt ν den Winkel θ ein. Bei der Darstellung in Fig. 205 erscheint dieser Winkel θ in wahrer Größe. M_σ sei der zu diesem schiefen Schnitt σ gehörige

Schmiegekreismittelpunkt (*Krümmungsmitte*) und ρ der zugehörige Schmiegkreismittelpunkt. Dann besteht zwischen dem Normalkrümmungsradius R , dem Krümmungsradius ρ für den schiefen Schnitt σ und dem Winkel θ zwischen der Ebene des Normalschnittes und des schiefen Schnittes der folgende von JEAN-BAPTISTE MEUSNIER (1754—1793) entdeckte einfache Zusammenhang, den man als den Satz von MEUSNIER (1776) bezeichnet:

$$(1) \quad R = \frac{\rho}{\cos \theta} \quad \text{oder} \quad \rho = R \cdot \cos \theta.$$

Demnach ist M_σ der Fußpunkt des Lotes von M_v auf die Ebene σ des schiefen Schnittes, d. h. es gilt in Worten der

Satz von Meusnier: Die Krümmungsmitte M_σ für den schiefen Schnitt σ einer Fläche ist der Normalriß der Krümmungsmitte M_v des zur gleichen Tangente t gehörigen Normalschnittes ν auf die Ebene σ des schiefen Schnittes.

Der Schmiegkreis für den Normalschnitt ν (Mittelpunkt M_v , Radius R) und der Schmiegkreis für den beliebigen zur gleichen Flächentangente t gehörigen schiefen Schnitt σ (Mittelpunkt M_σ , Radius ρ) liegen nach dem Satz von MEUSNIER auf einer bestimmten die Fläche in P berührenden Kugel κ (Mittelpunkt M_v , Radius R), die den Schmiegkreis des Normalschnittes ν als Großkreis besitzt. Sie heißt die zur Tangente t gehörige *Meusniersche Kugel des Flächenpunktes* P (Fig. 206).

Nach dem Satz von MEUSNIER hat die Schnittellipse σ im Punkte P (*Hauptscheitel*) den *Schmiegekreisradius*

$$(4) \quad \varrho = R \cdot \cos \vartheta = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Dieses Ergebnis wurde schon in (11. 10) auf anderem Wege gewonnen.

Bei der *Abwicklung des Zylinders* geht der *schiefe Schnitt* σ in eine *Sinuskurve* über, für die der Punkt P ein *Scheitel* ist. Ihr *Scheitelschmiegekreisradius* ist nach (2) gleich dem *geodätischen Krümmungsradius*

$$(5) \quad R_g = \frac{\varrho}{\sin \vartheta} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b^2}{e},$$

wobei $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrizität der Ellipse ist. Da e gerade gleich der Amplitude der Sinuslinie ist, erhalten wir ein Ergebnis, das mit dem in 70. hergeleiteten übereinstimmt.

Beispiel 2: Durchdringung zweier Drehzylinder, deren Achsen sich schneiden. Die beiden Drehzylinder ζ_1 (Radius R_1) und ζ_2 (Radius R_2), deren Achsen a_1 und a_2 sich im Punkt O schneiden und zur Aufrißebene parallel sind, durchdringen sich, wenn $R_1 \neq R_2$ ist, in einer nicht zerfallenden algebraischen *Raumkurve* 4. Ordnung c , die sich im *Aufriß* als *doppelt überdeckte Hyperbel* c'' projiziert (Fig. 208). In einem beliebigen Punkt der Kurve c kann die *Tangente* τ nach der *Normalenmethode* konstruiert werden (vgl. Fig. 173). Diese Methode führt im Schnittpunkt P der Konturerzeugenden der beiden Zylinder auf die zweitprojizierende Tangente t , deren Aufriß t'' mit P'' zusammenfällt. Der Aufriß t'' der Tangente t an die Raumkurve c in P ist daher nicht identisch mit der Tangente an den Aufriß c'' dieser Raumkurve. *Die Tangente an c'' in P'' kann daher nicht nach der Normalenmethode gefunden werden.* Zu ihrer Konstruktion bedienen wir uns des *Satzes von Meusnier*.

Wegen der Symmetrie der Raumkurve c bezüglich der Aufrißebene ist der Punkt P ein *Scheitel* von c , und seine *Schmiegeebene* σ berührt die Kurve c in P nicht bloß drei- sondern sogar *vierpunktig* (*stationär*). Diese Schmiegeebene σ von c in P ist aus Symmetriegründen *zweitprojizierend* und ihre *Aufrißspur* $\sigma_2 = \sigma''$ ist daher zugleich die *gesuchte Tangente an c'' in P''* . Die Schmiegeebene σ schneidet sowohl die zur Flächentangente t gehörige *Meusnier-Kugel* κ_1 (Mittelpunkt M_1 , Radius R_1) des Zylinders ζ_1 wie auch die *Meusnier-Kugel* κ_2 (Mittelpunkt M_2 , Radius R_2) des Zylinders ζ_2 in dem *Schmiegekreis* der Kurve c in P . Daher liegt der den beiden Kugeln

gemeinsame Kreis in der gesuchten Schmiegeebene σ . Ihr *Aufriß* σ'' , der mit der gesuchten Tangente an c'' zusammenfällt, ist daher die gemeinsame Sehne der zweiten Umrißkreise κ_1'' und κ_2'' der Kugeln κ_1 und κ_2 . Außerdem ist der Lotfußpunkt von M_1 bzw. M_2 auf σ , d. h. der Schnittpunkt der Geraden $[M_1M_2]$ mit σ , der Schmiegkreismittelpunkt M_σ der Durchdringungskurve c in ihrem Scheitel P .

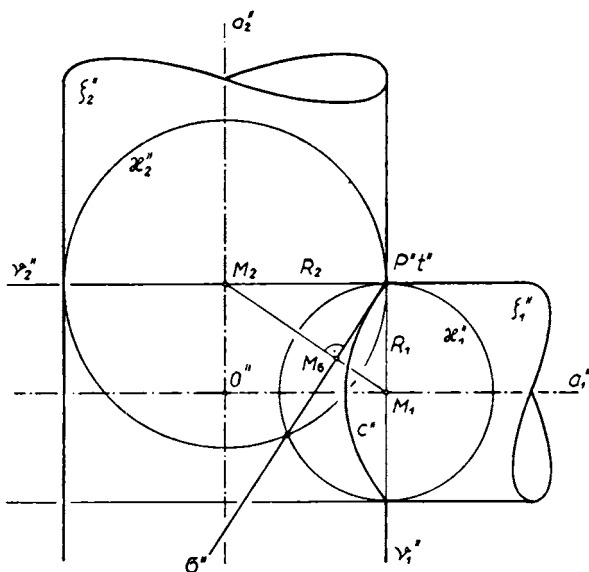


Fig. 208. Konstruktion der (vierpunktig berührenden) Schmiegeebene σ im Scheitel P der Durchdringungskurve zweier Drehzylinder mit sich (rechtwinkelig) schneidenden Achsen

80. Der Satz von Euler

Im folgenden betrachten wir *ausschließlich* Normalschnitte ν einer stetig gekrümmten Fläche φ in einem regulären Flächenpunkte P , da die Krümmungsverhältnisse von schiefen Schnitten σ sich durch den Satz von MEUSNIER stets auf die von Normalschnitten ν zurückführen lassen.

Wir legen 1. in den Flächenpunkt P den Nullpunkt O eines rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystems (x, y, z) , dessen (x, y) -Ebene 2. mit der Tangentenebene τ in P zusammenfällt (die z -Achse fällt dann in die Flächennormale n von P), und entwickeln die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ der Fläche in eine TAYLOR-Reihe. Wegen 1. und 2. ist

$$(1) \quad \varphi(0, 0) = 0, \quad \varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = 0.$$

Die TAYLOR-Entwicklung der Flächengleichung lautet daher

$$(2) \quad z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} x y + a_{22} y^2) + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Für die *Untersuchung der Krümmungseigenschaften der Fläche im Punkte* $P(0, 0, 0)$, welche nur von den Gliedern 2. Ordnung abhängen, kann man die *Glieder 3. und höherer Ordnung vernachlässigen*, d. h. man kann sich auf das Paraboloid

$$(3) \quad z = \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} x y + a_{22} y^2)$$

beschränken. Diese Ersatzfläche, die in ihrem Scheitel $P(0, 0, 0)$ dieselben Krümmungseigenschaften besitzt wie die gegebene Fläche φ , heißt das *oskulierende Scheitelparaboloid* der Fläche im Punkte P .

Falls $a_{11} \neq 0$ ist, kann die Gleichung des Paraboloids umgeformt werden in

$$(4) \quad z = \frac{1}{2a_{11}} [(a_{11} x + a_{12} y)^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) y^2].$$

Aus dieser Darstellung entnimmt man, daß die *Gestalt des oskulierenden Scheitelparaboloids* (3) von dem Vorzeichen der Diskriminante

$$(5) \quad D = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

abhängt. Es ergeben sich somit *drei Möglichkeiten*:

a) ein **elliptisches Paraboloid** liegt vor, wenn $D > 0$ ist.

Die Tangentenebene $z = 0$ im Punkte P hat mit dem Paraboloid nur den Punkt $P(0, 0, 0)$ gemeinsam. Die zu dieser Tangentenebene parallelen *Schichtenebenen* $z = \text{const}$ schneiden das Paraboloid in *ähnlichen Ellipsen*. Der Punkt P heißt ein **elliptischer Flächenpunkt**.

Beispiele: Alle Punkte einer Kugel, eines Ellipsoids, eines Drehparaboloids, die Wulstpunkte einer Drehfläche, z. B. die Wulstpunkte eines Torus sind elliptische Flächenpunkte.

b) ein **hyperbolisches Paraboloid** liegt vor, wenn $D < 0$ ist.

Die Tangentenebene $z = 0$ im Punkte P hat mit dem Paraboloid zwei reelle, sich in P schneidende Geraden a_1, a_2 gemeinsam. Die zu dieser Tangentenebene parallelen *Schichtenebenen* $z = \text{const}$ schneiden das Paraboloid in *ähnlichen Hyperbeln*, die a_1 und a_2 zu gemeinsamen Asymptoten haben. Für $z = \text{const} < 0$ erhält man dabei die zu den Hyperbeln $z = \text{const} > 0$ *konjugierten Hyperbeln*. Der Punkt P heißt ein **hyperbolischer Flächenpunkt**.

Beispiele: Alle Punkte eines einschaligen Drehhyperboloids, eines hyperbolischen Paraboloids, einer Wendelfläche oder windschiefen Regelfläche, die Kehlpunkte einer Drehfläche, z. B. die Kehlpunkte des Torus sind hyperbolische Flächenpunkte.

c) ein parabolischer Zylinder liegt vor, wenn $D = 0$ ist.

Die Tangentenebene $z = 0$ im Punkte P hat mit dem Paraboloid eine einzige (doppelt zählende) Gerade a durch P gemeinsam. Die zu dieser Tangentenebene parallelen Schichtenebenen $z = \text{const}$ schneiden das Paraboloid in zu a parallelen Geradenpaaren. Der Punkt P heißt ein parabolischer Flächenpunkt.

Beispiele: Alle regulären Punkte eines Zylinders, eines Kegels, einer Torse, die Grenzpunkte zwischen elliptisch und hyperbolisch gekrümmten Flächenstücken, z. B. die Punkte des höchsten und tiefsten Parallelkreises eines Torus sind parabolische Flächenpunkte.

In dem oben/zunächst ausgeschlossenen Fall, $a_{11} = 0$ ist die Diskriminante $D = -a_{12}^2$, und das oskulierende Scheitelparaboloid ist ein hyperbolisches Paraboloid wie in b) oder ein parabolischer Zylinder wie in c), je nachdem $a_{12} \neq 0$ oder $a_{12} = 0$ ist.

Fig. 209a—c zeigt den Schichtenplan des oskulierenden Scheitelparaboloids, d. h. die Normalprojektion der Schnittkurven $z = \text{const}$ auf die Tangentenebene $z = 0$ in den drei Fällen eines elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Flächenpunktes P . Diese Schichtenlinien, die angenähert auch den zur Tangentenebene τ parallelen ebenen Schnitten der gegebenen allgemeinen Fläche φ entsprechen, hängen nach Charles Dupin auf einfache Weise mit den Krümmungsradien der ∞^1 Normalschnitte der Fläche im Punkte P zusammen. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

a) **Elliptischer Flächenpunkt.** Es seien t_1 und t_2 jene beiden aufeinander senkrechten Flächentangenten in P , zu denen die Hauptachsen der Schar von Schichtlinien des oskulierenden (elliptischen) Scheitelparaboloids (ähnliche Ellipsen) gehören. Für sie habe die Fläche die Normalkrümmungsradien R_1 bzw. R_2 . Ist t eine beliebige Flächentangente in P , die mit der Tangente t_1 den Winkel φ einschließt, so gehört zu t ein Normalkrümmungsradius R , der sich berechnet nach dem von LEONHARD EULER (1707—1783) gefundenen Satz von Euler (1760):

$$(6) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

Daraus folgt dann der von CHARLES DUPIN (1784—1873) stammende

Satz von Dupin (1813): *Trägt man in dem elliptischen Flächenpunkt P auf den einzelnen Flächentangenten t nach beiden Seiten die Strecke*

(7) $\sqrt{R} = \sqrt{\text{Normalkrümmungsradius für die Tangente } t}$
auf, so liegen die Endpunkte auf einer Ellipse (Fig. 210a). Die Ellipse er-

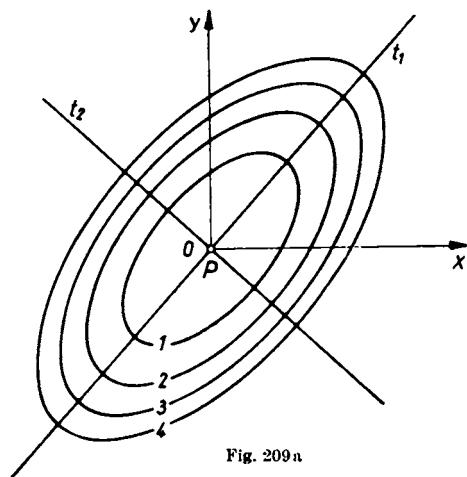


Fig. 209a

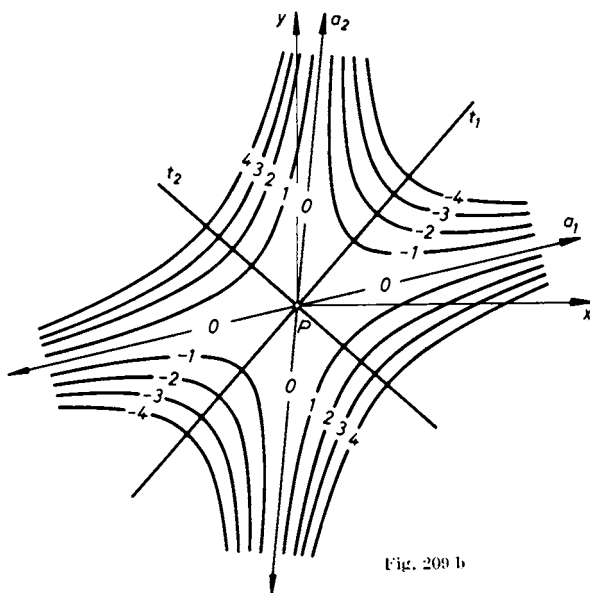


Fig. 209b

Fig. 209a und b. Schichtenplan (normale Projektion auf die Tangentenebene τ in P) des oskullierenden Scheitelparaboloids in einem a) elliptischen, b) hyperbolischen Flächenpunkt. Die Hauptachsen der ähnlichen und ähnlich gelegenen Schichtenlinien sind die beiden aufeinander senkrechten Hauptkrümmungsrichtungen t_1, t_2 der Fläche im Punkte P

weist sich als ähnlich zu der Schar der Schichtenlinien des oskulierenden Scheitelparaboloids. Sie heißt die **Dupinsche Indikatrix** des elliptischen Flächenpunktes P .

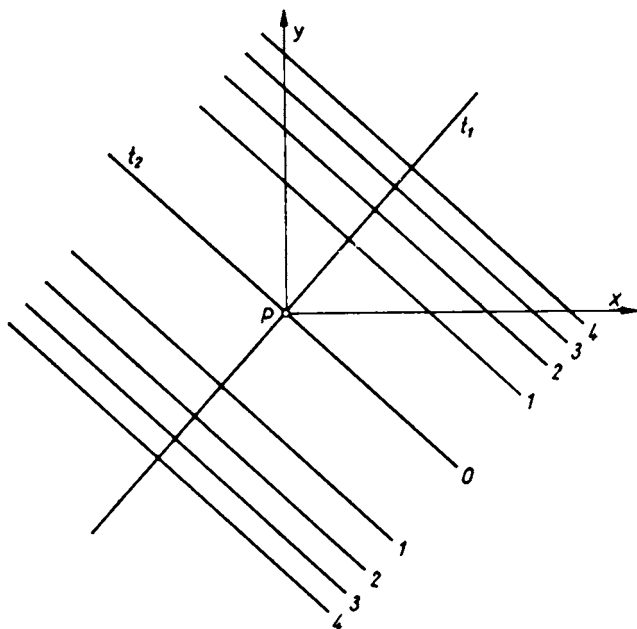


Fig. 209c. Schichtenplan (normale Projektion auf die Tangentenebene τ in P) des oskulierenden Scheitelparaboloids in einem parabolischen Flächenpunkt. Die Hauptachsen (Symmetrieachsen) der zueinander ähnlichen und ähnlich gelegenen Schichtenlinien sind die beiden aufeinander senkrechten Hauptkrümmungsrichtungen t_1 , t_2 der Fläche im Punkte P

In der Richtung der Hauptachsen t_1 und t_2 hat der Normalkrümmungsradius R jeweils einen extremen Wert. Diese Richtungen t_1 und t_2 , die aufeinander senkrecht stehen, heißen die *Hauptkrümmungsrichtungen* der Fläche, die zugehörigen Normalkrümmungsradien sind die *Hauptkrümmungsradien* R_1 und R_2 und ihre reziproken Werte $\kappa_1 = 1/R_1$ und $\kappa_2 = 1/R_2$ die *Hauptkrümmungen* in dem elliptischen Flächenpunkte P . Sind sie bekannt, dann folgt aus dem EULERSchen Satz die Normalkrümmung $\kappa = 1/R$ für jede beliebige Tangentenrichtung t , festgelegt durch den Winkel φ gegen die erste Hauptkrümmungsrichtung t_1 .

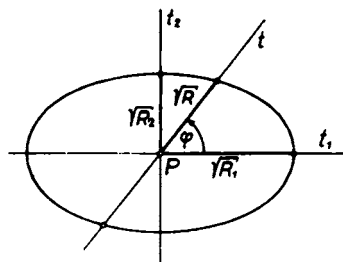


Fig. 210. a) DUPINSche Indikatrix eines elliptischen Flächenpunktes P (Ellipse, Hauptachsen t_1 , t_2 = Hauptkrümmungsrichtungen)

In einem elliptischen Flächenpunkt P liegen die Mitten M_1 und M_2 der beiden Hauptkrümmungskreise stets auf derselben Seite der Tangentenebene τ von P . Die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 haben daher dasselbe Vorzeichen, etwa $R_1 > 0, R_2 > 0$. Nach dem EULERSchen Satz ist dann auch $\frac{1}{R} > 0$, d. h. die Normalkrümmungsmittel für eine beliebige

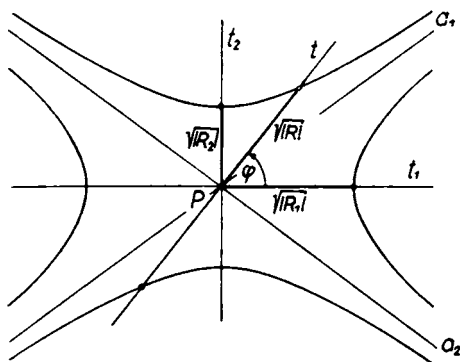


Fig. 210. b) DUPINSche Indikatrix eines hyperbolischen Flächenpunktes P (konjugiertes Hyperbelpaar, Hauptachsen t_1, t_2 = Hauptkrümmungsrichtungen, Asymptoten a_1, a_2 = Schmiegetangenten = Doppelpunktstangenten des Tangentialschnittes der Fläche in P)

Tangentenrichtung t von P liegt auf derselben Seite der Tangentenebene wie für die Hauptkrümmungsrichtungen t_1 und t_2 .

b) **Hyperbolischer Flächenpunkt.** Sind t_1 und t_2 jene beiden aufeinander senkrechten Flächentangenten in P , zu denen die Hauptachsen der Schichtenlinien des oskulierenden Scheitelparaboloids gehören (Schar ähnlicher Hyperbeln), und hat für sie der Normalkrümmungsradius den Betrag $|R_1|$ bzw. $|R_2|$, so gehört zu

der beliebigen Tangente t , die mit t_1 den Winkel φ bildet, der Normalkrümmungsradius $|R|$, für den nach dem Satz von Euler gilt:

$$(8) \quad \pm \frac{1}{|R|} = \frac{\cos^2 \varphi}{|R_1|} - \frac{\sin^2 \varphi}{|R_2|}.$$

Die Dupinsche Indikatrix des hyperbolischen Flächenpunktes ist daher ein Paar konjugierter Hyperbeln. Man erhält sie nach (7), wenn man von P aus in der Richtung von t nach beiden Seiten jeweils die Quadratwurzel aus dem Betrage des zugehörigen Normalkrümmungsradius R aufträgt (Fig. 210 b).

Die Hauptkrümmungsmitten M_1 und M_2 liegen für einen hyperbolischen Flächenpunkt P auf verschiedenen Seiten der Tangentenebene τ in P . Dies wird dadurch berücksichtigt, daß man R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen gibt, etwa $R_1 > 0, R_2 < 0$. Nach dem EULERSchen Satz ist dann die Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ der beliebigen Flächenrichtung t (je nach dem Wert von φ) positiv, null oder negativ. Versieht man in diesem Sinne den Normalkrümmungsradius R mit einem bestimmten Vorzeichen, dann

gilt der Satz von Euler in der Gestalt (6) auch für einen hyperbolischen Flächenpunkt, in dem die Fläche daher sattelförmige Gestalt hat.

In Richtung der Asymptoten der hyperbolischen Indikatrix ist $R = \infty$, also die Normalkrümmung $\frac{1}{R} = 0$. Diese beiden ausgezeichneten Richtungen in P , die sich aus

$$(9) \quad \frac{\cos^2 \varphi}{|R_1|} - \frac{\sin^2 \varphi}{|R_2|} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{|R_2|}{|R_1|}}$$

berechnen lassen, heißen die *Asymptotenrichtungen* oder *Schmiegrichtungen* a_1, a_2 des hyperbolischen Flächenpunktes P . Der Normalschnitt durch a_1 bzw. a_2 hat in P einen Wendepunkt.

Während in einem elliptischen Flächenpunkt P die Tangentenebene die Fläche berührt, ohne sie (in der Umgebung von P) zu schneiden, durchsetzt in einem hyperbolischen Flächenpunkt P die Tangentenebene die Fläche. Der Tangentialschnitt hat dabei in P einen Doppelpunkt, wobei die Doppelpunktstangenten die Asymptoten der hyperbolischen Indikatrix (Schmiegtangenten der Fläche in P) sind.

c) **Parabolischer Flächenpunkt.** Als Schichtenlinien des oskulierenden Scheitelparaboloids in einem parabolischen Flächenpunkt P erhielten wir eine Schar paralleler Geradenpaare. Ist t_1 die zu diesen Geraden senkrechte und t_2 die zu den Geraden parallele Flächentangente und gehört zu t_1 der Normalkrümmungsradius $R_1 > 0$, zu t_2 der Normalkrümmungsradius $R_2 = \infty$, so gehört zu der beliebigen Tangente t in P , die gegen t_1 den Winkel φ bildet, ein Normalkrümmungsradius $R > 0$, wobei nach dem Satz von Euler

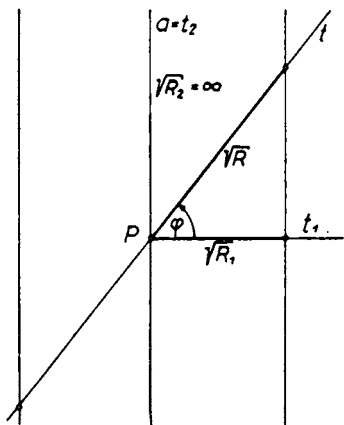


Fig. 210. c) DUPINSche Indikatrix eines parabolischen Flächenpunktes P (Parallelenpaar, Symmetrieachsen t_1, t_2 = Hauptkrümmungsrichtungen, $a = t_2$ = einzige Schmiegtangente = Tangente an Tangentialschnitt der Fläche in P)

$$(10) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1}$$

ist. Die Dupinsche Indikatrix des parabolischen Flächenpunktes besteht aus zwei zu t_2 parallelen Geraden im Abstand $\sqrt{R_1}$ von P (Fig. 210c). Die EULERSche Gleichung (10) für den parabolischen Flächenpunkt ist im allgemeinen EULERSchen Satz (6) für $\frac{1}{R_2} = 0$ als Sonderfall enthalten.

Man kann den parabolischen Flächenpunkt auch als Grenzfall eines hyperbolischen Flächenpunktes auffassen, wenn die beiden Asymptotenrichtungen a_1, a_2 gegen t_2 rücken. Es gibt daher in dem parabolischen Flächenpunkt P zwar zwei aufeinander senkrechte Hauptkrümmungsrichtungen t_1, t_2 , aber nur eine einzige Asymptotenrichtung a , die mit der einen Hauptkrümmungsrichtung t_2 zusammenfällt.

Schneidet man die Fläche mit der Tangentenebene τ des parabolischen Flächenpunktes P , dann hat die Schnittkurve (der *Tangentialschnitt*) in P i. a. eine *Spitze* oder einen *Selbstberührungspunkt*. *Spitzentangente* ist die (einzige) Asymptotenrichtung $a = t_2$ des parabolischen Flächenpunktes.

81. Der Tangentialschnitt in einem Kehlkreispunkt des Torus

Die DUPINSche Indikatrix in einem beliebigen Punkt P einer Fläche φ ist symmetrisch bezüglich der beiden Hauptkrümmungsrichtungen t_1 und t_2 . Ist φ speziell eine *Drehfläche* (Fig. 211), dann ist die *Meridiantangente* in P ,

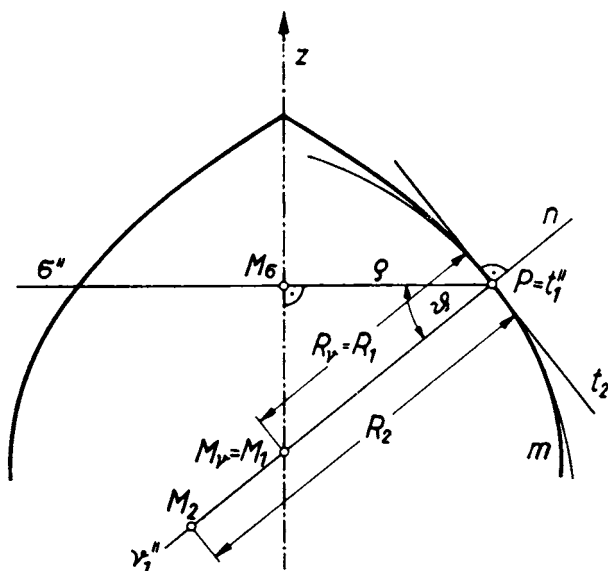


Fig. 211. Hauptkrümmungsrichtungen und -radien einer Drehfläche φ im Punkte P

da die Drehfläche zu jeder Meridianebene symmetrisch liegt, die eine *Achse* seiner *Dupinschen Indikatrix*, also eine *Hauptkrümmungsrichtung* t_2 . Die andere *Hauptkrümmungsrichtung* t_1 , die auf t_2 senkrecht steht, ist daher die *Parallelkreistangente*. Die Normalebene v_2 von φ durch die Meridiantangente t_2 in P schneidet die Drehfläche φ in dem durch P gehenden Meri-

dian. Daher ist der *Hauptkrümmungsradius* R_2 in P der *Krümmungsradius des Meridians* m in P . Den Krümmungsradius R_1 des Normalschnittes ν_1 durch die Parallelkreistangente t_1 des Punktes P finden wir mit Hilfe des Satzes von MEUSNIER. Der zur Drehachse normale Schnitt σ ist ein Kreis, dessen Krümmungsmitte M_σ auf der Drehachse liegt. Das Lot auf σ im Punkte M_σ trifft den Normalschnitt ν_1 in der Krümmungsmitte $M_\nu = M_1$ für den Normalschnitt. Da dieses Lot aber mit der Drehachse z zusammenfällt, liegt die Krümmungsmitte M_ν des Normalschnittes ν_1 durch die Parallelkreistangente t_1 gleichfalls auf der Drehachse, und der zugehörige *Hauptkrümmungsradius* $R_\nu = R_1 = PM_1$ ist gleich dem zwischen P und der Drehachse z liegenden Stück der Meridiannormalen n .

Fig. 212 zeigt einen Torus in Grund- und Aufriß (Achse z , Mittenkreis m , $R_2 =$ Radius des Meridiankreises, $R_1 =$ Radius des Kehlkreises). Im vordersten Punkt P des Kehlkreises werde die (zur Aufrißebene parallele) Tangentenebene σ gelegt und mit dem Torus geschnitten. Die Schnittkurve s (Tangentialschnitt von P) fällt im Grundriß mit σ' zusammen, während ihr Aufriß s'' eine bezüglich der Horizontalen und Vertikalen durch P'' symmetrische *algebraische Kurve 4. Ordnung in Gestalt einer Acht* ist. Sie läßt sich mit Hilfe von horizontalen Hilfsebenen leicht punktweise konstruieren. In dem hyperbolischen Flächenpunkt P hat der Tangentialschnitt s einen *Doppelpunkt*, dessen beide Tangenten sich nach den früher besprochenen Methoden nicht konstruieren lassen, da die Tangentenebene τ an die Fläche in P mit der Schnittebene σ identisch ist.

Wir finden die *Doppelpunktstangenten* a_1 und a_2 von s in P nach dem Satz von EULER, demzufolge sie die *Asymptoten* der zu P gehörigen *Dupin'schen Indikatrix* sind. Da der Torus eine Drehfläche ist, ist der *erste Hauptkrümmungsradius* gleich dem Stück der Flächennormalen zwischen P und der Drehachse z , d. h., da P auf dem Kehlkreis liegt, gleich dem *Kehlkreisradius* R_1 , während der *zweite Hauptkrümmungsradius* gleich dem Radius R_2 des Meridiankreises ist. Beide sind im Aufriß zu ersehen, wenn man den Punkt P durch eine Vierteldrehung um z in die Lage P^0 bringt. Die *Dupin'sche Indikatrix* des Punktes P ist eine *Hyperbel*, deren *Hauptachsen* die *Parallelkreistangente* t_1 und die *Meridiantangente* t_2 sind. Ihre Aufrisse sind daher die horizontale Gerade t_1'' bzw. die vertikale Gerade t_2'' durch P'' .

Die Halbachsen der DUPIN'schen Indikatrix haben die Länge $\sqrt{|R_1|}$ bzw. $\sqrt{|R_2|}$. Dabei haben R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen. Wir können $R_1 > 0$, also $R_2 < 0$ annehmen.

Um die Quadratwurzel aus einer Länge zu konstruieren, muß man zuvor über die Länge der *Einheitsstrecke* e verfügen. Wählen wir als Einheitsstrecke R_1 , indem wir

$$(1) \quad e = R_1 > 0$$

setzen, so ist

$$(2) \quad \sqrt{|R_1|} = \sqrt{e \cdot R_1} = \sqrt{R_1 \cdot R_1} = R_1$$

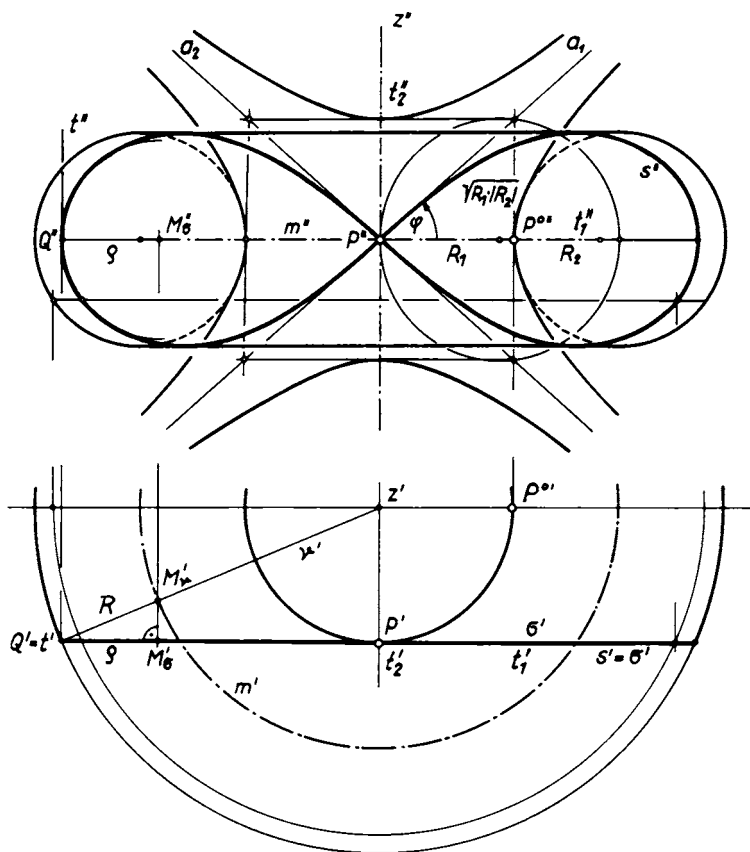


Fig. 212. Konstruktion der DUPINschen Indikatrix im Kehlkreispunkte P der Ringfläche (konjugiertes Hyperbelpaar). Die Asymptoten a_1, a_2 der Indikatrix sind die Doppelpunktstangenten des Tangentialschnittes der Ringfläche im Punkte P

die halbe Länge der Hauptachse der Hyperbel, während

$$(3) \quad \sqrt{|R_2|} = \sqrt{e \cdot |R_2|} = \sqrt{R_1 \cdot |R_2|}$$

die *halbe Länge der Nebenachse* wird. Man findet mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck $\sqrt{R_1 \cdot |R_2|}$ als geometrisches Mittel aus R_1 und $|R_2|$. Die Geraden durch P mit der Steigung

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\sqrt{R_1 \cdot |R_2|}}{R_1} = \pm \left| \frac{R_2}{R_1} \right|$$

sind dann die *Asymptoten der hyperbolischen Indikatrix* des Punktes P , d. h. die *gesuchten Doppelpunktstangenten* a_1 und a_2 der Kurve s in P .

Die *Indikatrix* des Kehlpunktes P selbst besteht dann aus den beiden *konjugierten Hyperbeln* mit den Halbachsen R_1 (horizontal) und $\sqrt{R_1 \cdot |R_2|}$ (vertikal).

Den *Radius ρ des Scheitelschmiegleises* im Punkte Q der Schnittkurve s findet man nach dem *Satz von Meusnier*. Zu der (vertikalen) Tangente t des Punktes Q gehört als Normalschnitt der Meridianschnitt ν , d. h. ein Kreis vom Radius $R = R_2$, dessen Mittelpunkt M_ν auf dem Mittenkreis m liegt. Das Lot von M_ν auf die schiefe Schnittebene σ , das im Grundriß unmittelbar konstruiert werden kann, schneidet σ in dem Krümmungsmittelpunkt M_σ des schiefen Schnittes σ . Dieser ist die *Schmiegleismitte* für den Scheitel Q des Tangentialschnittes s , sein Aufriß M''_σ somit *Schmiegleismitte* von s'' in Q'' .

82. Konstruktion der Doppelpunktstangenten der Schnittkurve zweier sich berührender Flächen

Die beiden (reellen) stetig gekrümmten Flächen mit den Gleichungen $z = \varphi(x, y)$ und $z = \psi(x, y)$ mögen sich im *Nullpunkt* $O(0, 0, 0)$ des cartesischen Koordinatensystems *berühren* und die *Ebene* $z = 0$ als *gemeinsame Tangentenebene* τ besitzen. Ihre TAYLOR-Entwicklungen haben dann die Gestalt

$$(1) \quad \begin{cases} z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2) + \dots \\ z = \psi(x, y) = \frac{1}{2} (b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2) + \dots \end{cases}$$

Wir nehmen an, daß die *quadratischen Glieder* dieser beiden Entwicklungen *nicht miteinander identisch* sind.

Ist $P(x, y, z)$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Flächen (1), d. h. ein *Punkt ihrer Schnittkurve* s , so erfüllen seine Koordinaten jede der beiden Gleichungen (1), also auch deren Differenz, aus der z herausfällt. Für den *Grundriß* s' der *Schnittkurve* s (ihre Normalprojektion auf die gemeinsame

Tangentenebene $z = 0$) gilt somit

$$(2) \quad \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2) + \dots = \frac{1}{2} (b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2) + \dots$$

Weil in (2) die konstanten und linearen Glieder fehlen, folgt

Satz 1: *Der Grundriß s' der Schnittkurve s der beiden sich berührenden Flächen (1) weist im Berührungspunkt O einen Doppelpunkt auf, dessen Doppelpunktstangenten (außer $z = 0$) der Gleichung*

$$(3) \quad \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2) = \frac{1}{2} (b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2) \quad ,$$

genügen. Diese Doppelpunktstangenten berühren, weil sie in der gemeinsamen Tangentenebene $z = 0$ der Flächen (1) liegen, auch die Schnittkurve s dieser Flächen und sind daher zugleich die Doppelpunktstangenten der Schnittkurve s in ihrem Doppelpunkte O .

Unterdrückt man in (1) die Glieder dritter und höherer Ordnung, so erhält man die Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} (a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2) \\ z = \frac{1}{2} (b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2) \end{cases}$$

der oskulierenden Scheitelparaboloide der Flächen (1), die sich ebenfalls im Punkte O , außerdem aber auch im Fernpunkt Z_u der z -Achse berühren. Ihre algebraische Schnittkurve 4. Ordnung zerfällt daher in zwei Kegelschnitte (Parabeln), die in Ebenen durch die Gerade $[OZ_u]$, d. h. durch die gemeinsame Flächennormale in O (z -Achse) liegen. Der Grundriß dieser beiden Ebenen ist ein Geradenpaar durch den Nullpunkt der (x, y) -Ebene, dessen Gleichung mit (3) identisch ist. Also folgt

Satz 2: *Die beiden oskulierenden Scheitelparaboloide (4) der sich berührenden Flächen (1) schneiden sich in zwei Parabeln (mit der z -Achse als Hauptachse), deren Spuren auf der gemeinsamen Tangentenebene $z = 0$ die Doppelpunktstangenten der Schnittkurve s der beiden sich berührenden Flächen (1) sind.*

Es genügt also für die Konstruktion der gesuchten Doppelpunktstangenten, die oskulierenden Scheitelparaboloide miteinander zu schneiden. Zu diesem Zweck legt man in der Höhe $z = h \neq 0$ eine Horizontalebene, die aus den beiden oskulierenden Scheitelparaboloiden die beiden Kegelschnitte

$$(5) \quad \begin{cases} 2h = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 \\ 2h = b_{11} x^2 + 2b_{12} xy + b_{22} y^2 \end{cases}$$

ausschneidet, die mit den (bei *gemeinsamer Wahl der Einheitsstrecke e* ermittelten) *Dupinschen Indikatriz* übereinstimmen. Die Gleichung (3) der gesuchten *Doppelpunktstangenten* ist dann mit der Gleichung der beiden *gemeinsamen Durchmessersehn* der beiden *Dupinschen Indikatriz* (\bar{o}) der Flächen (1) im Berührungspunkt O identisch. Daraus folgt

Satz 3: Um in dem gemeinsamen Berührungspunkt O der beiden stetig gekrümmten Flächen φ und ψ die beiden *Doppelpunktstangenten* der Schnittkurve s von φ und ψ zu finden, zeichne man (mit derselben Einheitsstrecke e) die *Dupinschen Indikatriz* der beiden Flächen im Punkte O ; deren gemeinsame Durchmessersehn sind dann die gesuchten *Doppelpunktstangenten* der Durchdringungskurve s im Berührungspunkte O .

Bemerkung 1: Wenn die beiden (reellen) sich berührenden Flächen sich sogar oskulieren, d. h. wenn sie auch noch in den *quadratischen Gliedern* ihrer TAYLOR-Entwicklungen (1) übereinstimmen und ihre oskulierenden Scheitelparaboloide (4) daher identisch sind, so heben sich in (2) die quadratischen Glieder weg, und das Verhalten der Schnittkurve s im Oskulationspunkt O wird durch die *kubischen Glieder* der Entwicklungen (1) bzw. (2) beschrieben. Der Oskulationspunkt O ist dann ein *dreifacher Punkt* der Durchdringungskurve s (mit drei Tangenten), d. h. durch O gehen drei Zweige von s , von denen wenigstens einer reell ist (die beiden anderen können reell verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex sein).

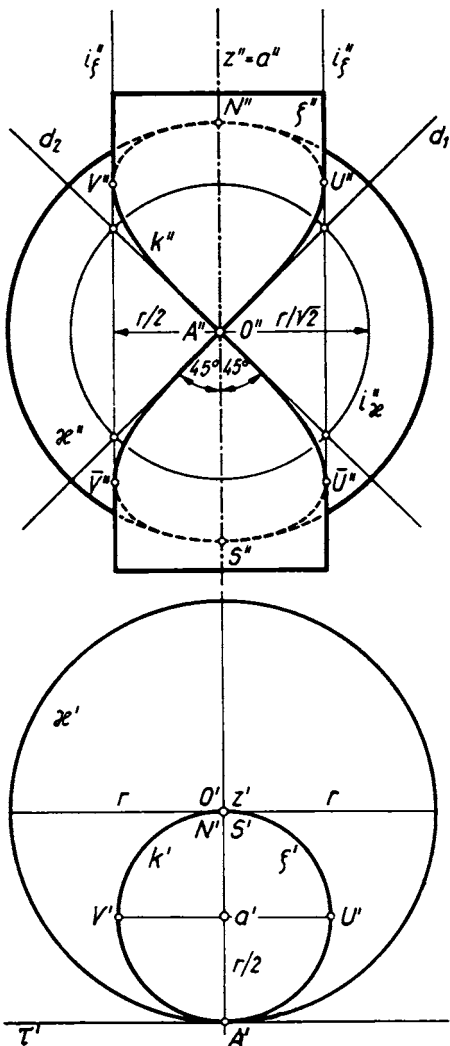


Fig. 213. Konstruktion der Doppelpunktstangenten der VIVIANischen Linie (Durchdringungskurve der Kugel κ mit einem sie im Punkte A berührenden Drehzylinder ζ durch die Kugelmittle O). Die Doppelpunktstangenten sind die gemeinsamen Durchmessersehn der Indikatriz i_κ und i_ζ von κ und ζ

Die Bestimmung der Tangenten der Schnittkurve in einem gewöhnlichen Berührungspunkt O zweier (stetig gekrümmter) Flächen ist danach ein *quadratisches Problem*; im Falle der Oskulation liegt jedoch ein *kubisches Problem* vor, das i. a. mit Zirkel und Lineal allein exakt nicht erledigt werden kann. Zur konstruktiven Bewältigung dieses und aller ähnlichen kubischen Probleme der Flächentheorie muß man die (quadratische) Indikatrix von DUPIN durch eine *kubische Indikatrix* der Fläche ersetzen¹⁾.

Beispiel 1: Wir haben in 63. die Durchdringungskurve k einer Kugel κ (Mittelpunkt O , Radius r) und eines Drehzylinders ζ (Achse a , Radius $r/2$) gezeichnet, die sich im vordersten Punkte A der Kugel berühren. Als Durchdringungskurve entstand in Fig. 180 eine *Vivianische Linie* in Gestalt einer sphärischen Acht, deren im Berührungspunkt A vorhandener *Doppelpunkt*, wie wir rechnerisch zeigten, zwei zueinander *orthogonale Doppelpunktstangenten* aufwies (Winkelhalbierende des Winkels von Parallelkreis und Meridian der Kugel κ in A).

Es ist nach obigem leicht, dieses rechnerische Ergebnis nunmehr konstruktiv zu bestätigen. Dazu haben wir nur im Punkte A die *Dupinschen Indikatrices* i_κ der Kugel κ und i_ζ des Zylinders ζ zu ermitteln und ihre gemeinsamen Durchmessersehnens in A zu zeichnen. Beide Indikatrices sind dabei mit derselben Einheitsstrecke e zu zeichnen; wir wählen

$$(6) \quad e = \frac{r}{2}.$$

Die *Dupinsche Indikatrix* i_ζ des Drehzylinders ζ (Radius $r/2 = e$) ist dann ein zu der Mantellinie von A paralleles Geradenpaar in der Tangentenebene τ von A , dessen horizontale Halbachse nach (80.10)

$$(7) \quad a = \sqrt{e \cdot \frac{r}{2}} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}$$

ist. Der Aufriß i_ζ'' der *Dupinschen Indikatrix* i_ζ des Drehzylinders ζ deckt sich daher mit dem Paare seiner Konturerzeugenden (Fig. 213).

Die *Dupinsche Indikatrix* i_κ der Kugel κ im Punkte A ist aus Symmetriegründen ein Kreis in der Tangentenebene τ von A mit der Mitte A , dessen Radius die Länge

$$(8) \quad l = \sqrt{e \cdot r} = \sqrt{\frac{r}{2} \cdot r} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

hat. Dieser Kreis i_κ erscheint im Aufriß in wahrer Größe und seine gemeinsamen Durchmesser (d_1, d_2) mit dem Parallelenpaar i_ζ (d. h. die *Doppelpunktstangenten* der *Vivianischen Linie*) bestehen tatsächlich aus den beiden *Winkelhalbierenden* der *Meridian- und Breitenkreisrichtung* der Kugel κ in ihrem Berührungspunkt A mit dem Zylinder ζ .

¹⁾ Eine lehrbuchmäßige Darstellung dieses Gegenstandes findet sich bei E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Wien 1957.

Namen- und Sachverzeichnis

Die Zahlen geben die Seiten an

A

Abbildung, geradentreue 4, 8
 Abbildungsprinzip, allgemeines 3
 Abdringung einer scharfgängigen Regelschraubfläche 311 ff.
 Abstand zweier windschiefer Geraden 77 ff.
 — eines Punktes von einer Geraden 74 ff.
 — eines Punktes von einer Ebene 72 ff.
 Abwickelbare Flächen 286
 — Regelflächen 219
 Abwicklung der Pyramide 102
 — des Prismas 104, 105
 Abwicklung des Drehkegels und seines elliptischen Schnittes 154 ff.
 — des Drehkegels und seines Parabelschnittes 165 ff.
 — des Drehzylinders und seines ebenen Schnittes 137 ff., 324
 — des schiefen Schnittes einer Fläche 323
 — einer Schraublinie 278
 Achse eines Kreises 91, 181, 182
 — einer perspektiven Affinität 12, 82, 84, 87
 — — perspektiven Kollineation 98
 Achsenkonstruktion der Ellipse aus gegebenem konjugiertem Durchmesserpaar 28 ff.
 Achsenkreuz 118, 120
 Achsenparalleler Schnitt einer Drehfläche 226 ff.
 Affine Eigenschaften der Ellipse 21 ff.
 Affinität 12, 14, 16, 54, 79, 82, 84, 87, 130, 132, 185, 196
 Affinitätsachse 12, 82, 84, 87, 186
 Affinitätsrichtung 12, 186
 Ähnlichkeit 93, 94, 236, 246
 Algebraische Flächen im Raum 207 ff.
 — Fläche 2. Ordnung 208, 211, 212
 — Fläche 4. Ordnung 227, 231, 256
 — Geometrie 212
 — Kurven in der Ebene 200 ff.
 — Kurve 3. Ordnung 203, 204
 — Kurve 4. Ordnung 203, 206, 207
 — Raumkurve 210 ff.
 — Raumkurve 4. Ordnung 211, 212, 235, 236, 246, 250, 252, 253, 261, 263, 301, 309, 324, 333, 336

Allgemeine Affinität 16
 — Drehfläche 222 ff.
 — Schraubfläche 313
 — s Verfahren zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Flächen 234
 Analytische Darstellung der Schraublinie 277
 — Darstellung einer ebenen perspektiven Affinität 14 ff.
 ANAXAGORAS (499–418 v. Chr.) 134
 Anschaulichkeit eines Bildes 3
 Antibrennpunkte 181
 APOLLONIOS VON PERGAE (262–190 v. Chr.) 23, 150
 ARCHIMEDES (287?–212 v. Chr.) 20, 26, 297
 Archimedische Spirale 297 ff., 306
 — s Schlangengerüst 314
 ARISTOPHANES (um 455 – um 385 v. Chr.) 134
 Asymptoten der Hyperbel 147, 158, 236
 — der hyperbolischen Indikatrix 331, 332, 335
 — der Umrißkurve einer scharfgängigen Regelschraubfläche 299
 — der Umrißkurve einer schiefen Regelschraubfläche 309
 — einer algebraischen Kurve 202, 205
 Asymptotenkegel 214, 215
 AUBRY, A. 301
 Aufgabe der Darstellenden Geometrie 1 ff.
 Aufriß einer Geraden 40, 42, 46
 — eines Kreises 91
 — eines Punktes 37
 Aufrißebene 36, 66, 67
 Aufrißspur einer Ebene 45
 Auge, Augpunkt 4, 280
 Axiale zyklische Schraubfläche 317
 Axonometrie 118 ff.
 Axonometrischer Aufriß 119
 — Grundriß 119
 — Kreußriß 119
 Axonometrisches Bild eines Drehzylinders 128, 129
 — — eines Körpers 121, 124
 — — eines Raumpunktes 119, 122

B

- Bahnschraublinien der scharfgängigen Regelschraubfläche 293
 — — schiefen offenen Regelschraubfläche 302
 — — Wendelfläche 286, 291
 Bahntangente der scharfgängigen Regelschraubfläche 295
 — — Schraublinie 280, 283
 Barocksäule 317
 Begleitendes Dreibein der Schraublinie 281
 Berührkreis einer Kurve 32
 Berührung 2. Ordnung 281
 BEZOUT, ETIENNE (1730–1783) 206, 210
 Bildpaar der Deckgeraden einer Ebene 53, 54
 — — Deckpunkte einer Geraden 53
 Bildspurpunkt einer Geraden 5, 8
 Bildtafeln 36
 Binormale der Schraublinie 281
 Böschungsfächen 286
 — linien 278
 BRASSEUR, JEAN BAPTISTE (1853) 39
 Brennpunkt der Ellipse 23, 32, 91, 144, 180, 185, 188
 — — Hyperbel 146
 — — Parabel 149, 162
 BRETON DE CHAMP 273

C

- Charakteristisches Teilverhältnis einer Ebene 54
 CUSANUS, NICOLAUS (1401–1464) 136

D

- DANDELIN, GERMINAL PIERRE (1794–1847) 144
 DANDELINSche Kugeln 144, 146, 148, 149
 Darstellung ebenflächig begrenzter Körper im Grund- und Aufrißverfahren 95 ff.
 — einer Ebene im Grund- und Aufrißverfahren 45 ff.
 — einer Geraden im Grund- und Aufrißverfahren 40 ff.
 — eines Kreises im Grund- und Aufrißverfahren 90 ff.
 — eines Quadrates im Grund- und Aufrißverfahren 83
 — eines Punktes im Grund- und Aufrißverfahren 37 ff.
 DE CHAMP, BRETON 273
 Deckebene 39, 41, 56
 Deckgerade einer Ebene 52 ff., 61
 Deckpunkt einer Geraden 41

- DESARGUES, GIRARD (1593–1662) 5, 11, 36, 61, 97, 98
 DESARGUESsche Achse 12, 61, 98
 DESCARTES, RENÉ (1596–1680) 95, 301
 Dimetrisches Achsenkreuz 120
 Dodekaeder 95, 97
 Doppelpunkt 202, 204, 211, 235, 236, 250, 314, 333, 336
 — stangenten 211, 251, 252, 331, 333, 335, 336, 338
 Doppeltprojizierende Ebene 51, 69
 Doppelt überdeckte Projektion einer Raumkurve 235, 236, 246, 249, 253, 256, 324
 Doppelschraublinie der scharfgängigen Regelschraubfläche 293, 297
 — — schiefen offenen Regelschraubfläche 302, 309
 Drehachse 274
 — der Drehfläche 222
 Drehbewegung 213; -ellipsoid 221; -fläche 209, 213 ff., 263; -flächen 2. Ordnung 213 ff.; -hyperboloid 214, 215, 304; -paraboloid 215 ff., 253, 326; -sehne 79, 110
 Drehflucht der Schmiegeebene der Schraublinie 284
 — — Tangentenebene der scharfgängigen Regelschraubfläche 296, 299
 — — Tangentenebene der schiefen Regelschraubfläche 305
 — — Tangentenebene der Wendelfläche 288, 292
 — einer Ebene 282
 Drehfluchtpunkt der Bahntangente der scharfgängigen Regelschraubfläche 299
 — — — Schraublinie 282 ff.
 — — — Wendelfläche 288
 — einer Erzeugenden der offenen Regelschraubfläche 305, 306
 — einer Geraden 282
 Drehkegel 212, 242 ff., 169, 213, 246, 266
 Drehkonstruktion von MONGE 70, 71
 Drehzylinder 128 ff., 209, 213, 235 ff., 246 ff., 249 ff., 256 ff., 289 ff.
 Dreibein 115, 281
 Dreiebenenverfahren 107
 Dreieck 65, 98
 Dreipunktige Berührung 32, 281
 Dreiteilung eines Winkels 134
 Drittprojizierende Ebene 68, 73
 Dualitätsprinzip 57 ff., 96
 DUPIN, CHARLES (1784–1873) 327
 DUPINSche Indikatrix 329 ff.
 Durchdringung dreier Drehzylinder 239 ff.
 — einer Kugel mit einem Drehzylinder 249 ff., 338

- Ringfläche mit einem Drehzylinder 256 ff.
- Rohrfläche mit einem Drehkegel 266 ff.
- Wendelfläche mit einem Drehzylinder 289
- eines Drehparaboloids mit einer Kugel 253 ff.
- eines Drehzylinders mit einem Drehkegel bei sich schneidenden Achsen 246
- zweier Drehflächen 234 ff.
- zweier Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen 235 ff., 324
- zweier ebenflächig begrenzter Körper 105 ff.
- zweier Dreiecke 65
- zwischen Prisma und Pyramide 105 ff.
- zwischen zwei Prismen 108
- zwischen zwei Pyramiden 108
- Durchdringungskurve zweier Flächen 210, 234
- Durchmesser der Ellipse 21, 31
- Durchstoßpunkt einer Geraden mit einer Ebene 63 ff.
- DÜRER, ALBRECHT (1471–1528) 1, 6

E

- Ebene 45 ff., 50, 51, 85, 101, 103, 128, 142, 167, 168, 180, 226
- Ebene algebraische Kurve 200 ff., 212, 227, 231
- perspektive Affinität 13 ff., 103, 110, 112, 115
- perspektive Kollineation 100, 101, 152, 163, 172
- Ebenenmethode 105, 107
- Ebener Flächenschnitt 321
- Schnitt einer Drehfläche 226 ff.
- — Kugel 180 ff.
- — Pyramide 101 ff.
- — eines Drehzylinders 128 ff., 323
- — eines Prismas 103 ff.
- — eines schiefen Kreiskegels 168 ff.
- — eines schiefen Kreiszylinders 167 ff.
- Ebenes Dreieck 115, 123, 125
- Ebenflächig begrenzte Körper 95 ff., 105 ff.
- ECKHART, LUDWIG (1890–1938) 121, 190
- Eiförmiges Drehellipsoid 213
- Eigenschaften der Ellipse 21 ff.
- Eigenschaftengrenze der Kugel 183
- Wendelfläche 292
- Eigentliche Punkte 200, 208
- Einfachheit einer geometrischen Konstruktion 78
- Einführung einer neuen Rißtafel 66 ff.
- Einschaliges Drehhyperboloid 215 ff., 304, 327

- Einschneiderichtung 122, 127
- Einschneideverfahren 121 ff., 190
- Einsiedlerpunkt 211
- Elementarkonstruktionen 78
- Ellipse 19 ff., 23 ff., 90, 143 ff., 167, 170, 172, 180, 235, 323, 328
- Ellipsen-tangente 24, 25
- -zirkel 28, 135
- Ellipsoid 213, 326
- Elliptischer Flächenpunkt 326, 327
- Schnitt des Drehkegels 143, 150 ff.
- Zylinder 168
- Elliptisches Scheitelparaboloid 326
- Ergänzungen zur Theorie der Flächenkrümmung 321 ff.
- Erlanger Programm 2
- Erste Falllinien einer Ebene 48, 85, 87, 92
- Hauptlinien einer Ebene 42, 46, 83, 85, 87
- Spur einer Ebene 45
- Spurnormalen einer Ebene 48
- Spurparallelen einer Ebene 46, 49
- Erster Spurpunkt einer Geraden 40, 41
- Erstprojizierende Ebene 40, 48, 50, 167
- Gerade 43
- Erzeugende der scharfgängigen Regelschraubfläche 311
- — schiefen offenen Regelschraubfläche 302
- — Torse 284
- — Wendelfläche 286
- Erzeugende des einschaligen Drehhyperboloids 218
- — geraden Kreiskegels 142
- — geraden Kreiszylinders 128
- — schiefen Kreiskegels 168
- — schiefen Kreiszylinders 167
- EUKLID (365?–300? v. Chr.) 95
- EULER, LEONHARD (1707–1783) 16, 95, 327
- EULERScher Polyedersatz 95, 242
- Evolute 268, 273
- Evolventenzirkel 135
- Exzentrizität der Ellipse 91, 145
- — Hyperbel 148

F

- Fadenevolvente des Kreises 285
- Falllinien einer Ebene 48
- Fernebene des Raumes 59, 209
- Ferngerade einer Ebene 4, 59, 99, 171, 201
- Fernpunkt einer Geraden 4, 5, 6, 11, 42, 59, 99, 158, 170 ff., 200, 236
- FIEDLER, WILHELM (1832–1912) 5
- Filevolvente 285
- Flächeninhalt affiner Figuren 20, 21
- -normale 288, 299, 321, 325

- Flächen-schnitt 321
 — -tangente 321
 — -theorie 321
 Fluchtgerade der perspektiven Kollineation 99, 163, 171
 Fluchtgerade der Schmiegeebene der Schraublinie 281, 282
 — — Tangentenebene der scharfgängigen Regelschraubfläche 295
 — — — schiefen offenen Regelschraubfläche 305
 — — — Wendelfläche 288
 Fluchtkreis der scharfgängigen Regelschraubfläche 295
 — — schiefen offenen Regelschraubfläche 305, 306
 Fluchtpunkt 163
 Fluchtpunkt der Bahntangente der Schraublinie 280, 282
 — — Flächennormale der Wendelfläche 289
 Fluchtpunkt einer Geraden 5, 99, 170
 Fluchtpunkt einer Erzeugenden der scharfgängigen Regelschraubfläche 295
 — — — schiefen offenen Regelschraubfläche 305
 — — Tangente der Bahnschraublinie der Wendelfläche 288
 Formzahl der Ellipse 145
 — — Hyperbel 148
 FRÉZIER, AMÉDÉE-FRANÇOIS (1682–1773) 36
 Frontale Axonometrie 120
 — Ebene 50
 Fundamentalsatz der Algebra 202, 203

G

- GALILEI, GALILEO (1564–1642) 253
 Ganghöhe der Schraubung 275, 277
 Gärtnerkonstruktion der Ellipse 23
 GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777–1855) IV, 2
 Gegenachsen der perspektiven Kollineation 172
 Gegenpunkte der perspektiven Kollineation 171
 Gemeinlot zweier windschiefer Geraden 77 ff.
 Geodätische Krümmung des Schiefchnittes einer Fläche 323, 324
 — Linie 278
 Geometrographische Beurteilung einer Konstruktion 79
 Gerade im Grund- und Aufrißverfahren 40 ff.
 Gerade Regelschraubfläche 302
 — zyklische Schraubfläche 317 ff.

- GERARD VAN GUTSCHOVEN 301
 GERGONNE, JOSEPH DIAZ (1771–1859) 60
 Geschlossene Regelschraubfläche 286, 304
 Gewundene Säule 317
 Gratlinie der Torse 284, 286, 304
 s'GRAVESANDE, WILHELM JAKOB (1688–1742) 99
 Großkreis der Kugel 183 ff., 187
 Grundbegriffe des Grund- und Aufrißverfahrens 36
 Grundeigenschaften der perspektiven Affinität 13
 Grundriß einer Geraden 40, 42, 46
 — eines Kreises 91
 — eines Punktes 37
 — spur einer Ebene 45
 — -ebene 36, 66, 67, 84
 Grund- und Aufrißverfahren 36 ff.
 Gruppe der affinen Abbildungen der Ebene 17

H

- Hauptachsen der Ellipse 22, 27, 28, 29, 32
 — der Umrißellipse des Schnellumrisses der Kugel 192 ff.
 Hauptkrümmungen der Fläche 329, 330, 332
 Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche in einem Punkt 329, 330, 332
 Hauptlinien einer Ebene 42, 46
 Hauptmeridian der Drehfläche 213, 223, 224
 Hauptnormale 281, 286
 Hauptsatz der Perspektive 6
 Hexaeder (= Würfel) 95, 97
 HILBERT, DAVID (1862–1943) 100
 Hilfsflächen 63, 65, 107, 108, 151, 227, 231, 234, 237, 248, 250, 253, 259, 261, 265
 Hilfsflächen zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Flächen 234, 237
 Hilfskugeln 234, 238, 248, 255, 259, 268
 HIRE, PHILIPPE DE LA (1640–1718) 26
 Homogene cartesische Koordinaten 200, 209
 Horizontale Ebene 50
 Horizontalspur einer Ebene 45
 Horizontalspurpunkt einer Geraden 40, 41
 Hüllfläche einer Kugelschar 266
 Hyperbel 142, 146 ff., 170, 174, 221 ff., 236, 324, 346
 Hyperbolischer Schnitt des Drehkegels 147, 157 ff.
 — Flächenpunkt 326, 330
 Hyperbolisches Paraboloid 326, 327
 Hyperboloid 222

I

- Ikosaeder 95, 97
- Indikatrix 329ff.
- Inhomogene cartesische Koordinaten 200, 207, 209
- Invarianten der Parallelprojektion 8ff.
- Inzidenz zwischen Punkten und Geraden 8
- Irreduzible algebraische Kurve 201
- — Fläche 208
- Isometrisches Achsenkreuz 120

K

- Kantenmethode 105
- Kappakurve 301
- Kavalierperspektive 121
- Kehlkreis des einschaligen Drehhyperboloids 216, 304
- — Torus 229, 333
- Kehllinie der geschlossenen Regelschraubfläche 304
- — schiefen offenen Regelschraubfläche 304, 309
- — einer windschiefen Regelfläche 304
- Kehlpunkt einer Erzeugenden des einschaligen Drehhyperboloids 218, 222
- Kehlschraubenlinie der geraden zyklischen Schraubfläche 319
- — schiefen offenen Regelschraubfläche 304
- — Schraubenrohrfläche 314
- Kegel 114, 115, 142, 144, 158, 168ff., 219, 222, 327
- -achse 114, 142
- -normale 158
- -räder 222
- -schnitt 149ff., 170, 203, 206, 214
- -spitze 142
- KEILL, JOHN (1671–1721) 32
- KEPLER, JOHANNES (1571–1630) 5
- KLEIN, FELIX (1849–1925) 2, 100
- Kleinkreis der Kugel 175, 181
- Knotenpunkt 45
- KOCHAN'SKY, ADAM AMANDUS (1631–1700) 135, 137, 279
- Koinzidenz-ebene 39, 56
- -gerade einer Ebene 52ff.
- -punkt einer Geraden 41
- Kollineation, perspektive 97ff., 170
- Kollineations-achse 98, 101, 170
- -strahl 98
- -zentrum 98, 101, 170
- Komplexe Punkte 132, 177, 200, 208
- Konischer Knotenpunkt 223
- Konjugierte Durchmesser der Ellipse 21, 22, 28, 30
- Hyperbeln 326, 330

- Konjugiert-komplexe Punkte 132, 177, 202, 238, 248
- Konstruktion mit unzugänglichen Punkten 93f.
- — Zirkel und Lineal 134
- Konstruktionsaufgaben im Grund- und Aufrißverfahren 57ff.
- Konstruktionsvorschrift für das ECKART'sche Einschneideverfahren 122
- Konstruktive Geometrie 57
- Kontur einer Drehfläche 245, 269
- — Rohrfläche 268
- Konturerzeugende des Kegels 115, 144
- — Zylinders 128
- — — im Schnellriß 245
- Kontur-kreis der Kugel 175
- -punkt 129, 232, 245ff.
- Konvexe Polyeder 95
- Konvexer Körper 239
- Koordinatensystem 109, 115, 118
- Koten eines Raumpunktes 37
- KOWALEWSKI, GERHARD (1876–1950) 5
- Kreis 90ff., 133ff., 142
- -achse 91, 181, 182
- -evolvente 215, 306
- -kegel 219
- -zylinder 219
- -schnitte des schiefen Kreiskegels 169
- — — Kreiszylinders 168
- -zylindrische Stichkappe in einer drehzylindrischen Tonne 263ff.
- Kreuzriß 52, 66, 69, 245
- Krümmung eines ebenen Flächenschnitts 321
- Krümmungseigenschaften der Fläche in einem Punkte 226ff.
- Krümmungskreis einer ebenen Kurve 32
- für den Normalschnitt der Fläche 322
- für den Schiefschnitt der Fläche 322
- Krümmungsmitte eines Normalschnitts der Fläche 322ff.
- — Schiefschnitts der Fläche 322
- Krümmungsradien der Normalschnitte in einem Flächenpunkt 327
- KRUPPA, ERWIN (geb. 1885) 57, 118
- Kubische Indikatrix 338
- Kugel 144, 175ff., 213, 249ff., 253ff., 311, 326
- Kugelförmige Stichkappe in einer zylindrischen Tonne 261

L

- Lage des Sehstrahls beim Schnellrißverfahren 190, 196
- eines Raumobjektes beim Schnellrißverfahren 196
- Lagenaufgaben 57ff.

- Länge einer Strecke 70, 71
 LAMBERT, JOHANN HEINRICH (1728–1777) 13
 LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1646–1716) 95
 Leitgerade der Ellipse 145, 146
 — — Hyperbel 148
 — — Parabel 149, 162
 Leitkreis 167, 168, 263
 LEMOINE, ÉMILE (1844–1912) 79
 LHUIER, SIMON (1750–1840) 87
 Lichttrichtung 183
 LINDEMANN, FERDINAND CARL LOUIS (1852–1939) 134
 Lineare Exzentrizität der Ellipse 91
 Linksschraubung 275
 Linsenförmiges Drehellipsoid 213
 L'ORME, PHILIBERT DE (1576) 36
 Lot auf eine Ebene 49, 86
 — -abstand 72 ff.
 — -fußpunkt 72, 73, 75

M

- MAGNUS, LUDWIG IMMANUEL (1790–1861) 98
 Mantellinien der Torse 284
 — des Kegels 142
 — des schiefen Kreiskegels 168
 — des schiefen Kreiszylinders 167
 — des Zylinders 128
 Maßaufgaben 57 ff., 70 ff.
 Maßstäbe beim Schnellrißverfahren 127
 Maßtreue eines Bildes 3
 MAUBOLICO, FRANCESCO (1494–1575) 96
 Mehrfacher Punkt 202, 204, 208
 Meridian der Drehfläche 222
 — -hyperbel des einschaligen Drehhyperboloids 216, 220
 Meridiantangente in einem Punkt der Drehfläche 224
 Methode der Tangentenebenen zur Tangentenkonstruktion 159, 228, 233, 234, 262, 265
 MEUSNIER, JEAN-BAPTISTE (1754–1793) 139, 322
 MEUSNIERSche Kugel 322, 324
 Militärperspektive 121
 MINDING, FERDINAND ADOLF (1806–1885) 323
 Mittenebene des Torus 229
 — -kreis des Torus 229 ff.
 Mittenkurve einer Rohrfläche 266
 MONGE, GASPARD (1746–1818) IV, 1, 36, 60, 70, 72, 75, 86
 MÜLLER, EMIL (1861–1927) 2, 3, 37, 57, 278

N

- Näherungskonstruktionen zur Rektifikation des Kreises 135
 Negative Schraubung 275
 Negativer Schraubparameter 276
 Neigungswinkel einer Geraden gegen die Bildebene 70, 71
 Netz der Pyramide 102
 — des Prismas 105
 Nicht-abwickelbare Regelschraubflächen 299
 Nicht-zerfallende algebraische Fläche 208
 — — — Kurve 201, 211
 — — Kegelschnitte 142
 Normale 49, 72, 225, 321
 Normale Axonometrie 118
 Normalebene 9, 74, 85, 228, 281
 Normalenkegel der Drehfläche 225, 228
 Normalenkegel der Kugel 179
 — des Drehkegels 158
 — des Torus 232
 Normalenmethode zur Tangentenkonstruktion 159, 228, 232, 234, 238, 248, 251, 255, 259, 261, 269, 324
 Normalkrümmung der Fläche 322
 Normalkrümmungs-mitte der Fläche 322
 — -radius der Fläche 322 ff.
 Normalprojektion 7
 Normalriß 7, 66, 118
 Normalschnitt des scharfgängigen Regelschraubfläche 299
 — — schiefen Regelschraubfläche 304, 309
 — — Schraubenrohrfläche 316
 — — Schraubtorse 284
 — des Drehzylinders 323
 — des Prismas 87, 103
 — einer Fläche 139, 322 ff., 325
 —, rektifizierbarer 133
 Normalumriß einer Ringfläche bei geneigter Achse 269 ff.
 Nullkreis 177
 Nullteilige Kugel 207
 — algebraische Kurve 200
 Nullteiliger Kreis 177
 Numerische Exzentrizität der Ellipse 145
 — — — Hyperbel 148
 NYSTRÖM, EVERT JOHANNES (1895–1960) 192, 197, 198
 NYSTRÖMSche Bedingung für orthogonale Schnellrisse 198

O

- Offene Regelschraubfläche 302
 Oktaeder 95, 96
 Ordner eines Punktes 38
 — -richtung für den Schnellriß 122, 123, 125, 126, 127

Ordnung einer algebraischen Fläche 207
 — — — Raumkurve 210
 — — ebenen algebraischen Kurve 200
 Ordnungslinie (Ordner) eines Punktes 38
 Orthogonale Affinität zwischen Ellipse
 und ihren Scheitelkreisen 26, 185, 196
 — Axonometrie 197
 — perspektive Affinität 15f.
 Orthogonaler Schnellriß 197ff.
 Orthonormiertes Dreibein 115, 123
 Oskulierendes Scheitelparaboloid 326, 336

P

Paar entsprechender rechter Winkel einer
 perspektiven Affinität 17, 85
 Papierstreifenkonstruktion der Ellipse
 26ff.
 Parabel 142, 148, 170, 172, 252, 253, 256,
 336
 Parabolischer Flächenpunkt 327, 331
 — Schnitt des Drehkegels 148, 160ff.
 — Zylinder 327
 Parallelkreis 128, 142, 216, 222
 Parallel-kreistangente 224
 — -kurven der Ellipse 273
 — — — Sinuslinie 314
 — -projektion 6, 8ff., 180
 — -riß eines Gegenstandes 6
 — -verschiebung der Rißachse 54ff.
 Parameterdarstellung der Kappakurve
 301
 — — Schraublinie 277
 — des Normalschnittes der schiefen offe-
 nen Regelschraubfläche 306
 Parameter der Schraubung 274, 280, 291,
 320
 Pendelebenen 108
 Perspektiv Affinität 8ff., 18ff., 53, 79,
 99, 130, 132, 186, 192
 — — zwischen Grund- und Aufriß einer
 ebenen Figur 53, 186
 — Kollineation 97ff., 152, 163, 170ff.,
 — orthogonale Affinität 82, 84, 87
 Perspektives Bild eines Gegenstandes 4
 Perspektivitätsachse 12, 98
 π 134
 PLATONISCHE Körper 59
 POHLKE, KARL WILHELM (1810–1876)
 116, 118
 POHLKESCHES Dreibein 116ff., 125
 Polarebene eines Punktes bezüglich einer
 Kugel 179
 Polare eines Punktes bezüglich eines
 Kreises 178
 Polarsubnormale 298
 Polarsystem der Kugel 179
 Pol einer Ebene bezüglich einer Kugel 179

— — Geraden bezüglich eines Kreises
 178
 Pole eines Kugelgroßkreises 181, 185
 — — Kugelkleinkreises 182
 Polyeder, reguläre 95ff.
 PONCELET, JEAN VICTOR (1788–1867) 60
 Positive Schraubung 275
 Positiver Schraubparameter 275
 Prisma 87ff., 103ff., 105, 117
 Prismenschnittaufgabe 87ff., 117
 Projektions-dreieck 110, 188
 — -richtung 6, 109, 116, 118
 — -zentrum 6
 Projektive Ebene 60, 200
 — Geometrie 100, 200
 — Sätze 60
 Projektiver Raum 59, 209
 Projizierende Ebene 50, 62, 64, 65
 PROKLOS, DIADOCHOS (410–485 n. Chr.) 28
 Pultebene 50
 Punkt auf einer Ebene 47
 — im Grund- und Aufrißverfahren 37ff.
 Punktkonstruktion der Ellipse 23ff., 30ff.
 — — Hyperbel 221
 — — Durchdringungskurve einer Kugel
 mit einem Drehzylinder 249ff.
 Punktkonstruktion der Durchdringungs-
 kurve einer Ringfläche mit einem
 Drehzylinder 259
 — — — scharfgängigen Regelschraub-
 fläche mit einer Halbkugel 311
 — — — Wendelfläche mit einem Dreh-
 zylinder 291
 — — — eines Drehparaboloids mit einer
 Kugel 253
 — — — eines Drehzylinders mit einem
 Drehkegel 248
 — — — zweier Drehzylinder mit sich
 schneidenden Achsen 237
 — — — zweier Flächen 234
 — — — zwischen einer Rohrfäche und
 einem Drehkegel 268
 — — — zwischen einer zylindrischen
 Tonne und einem schiefen Kreiszy-
 linder 265
 — — — zwischen einer zylindrischen
 Tonne und einer Kugel 261
 — des ebenen Schnittes des Torus 231
 — — — einer Drehfläche 227
 — — elliptischen Schnittes eines Dreh-
 kegels 151
 — — hyperbolischen Schnittes eines
 Drehkegels 158
 — — parabolischen Schnittes eines Dreh-
 kegels 162
 — — Normalschnittes der Schraubrohr-
 fläche 316
 Pyramide 97ff., 101ff., 105

Q

Quadranten des Raumes 38

Quadratur des Kreises 134

R

Radiant 274

Räumliche Geometrie der Lage 58

Rechtsgängige Schraublinie 277

Rechtsschraubung 275

Rechtwinkelpaar einer ebenen perspektiven Affinität 17 ff.

Rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem 109, 115, 118, 251, 256, 306, 325

Reduzible algebraische Kurve 201

— Fläche 208

Reduzierte Ganghöhe 275, 280

Reelle algebraische Kurve 200, 210

— Punkte 177, 208

Reeller Raumpunkt 132

Regelfläche 219, 284, 304

Regelschraubfläche 286, 293 ff., 311 ff.

Reguläre Polyeder 95 ff.

Reguläres Tetraeder 111

Rektifikation des Kreises 133 ff., 279

Richtkegel 279, 280, 288, 292, 293, 302

Ringfläche 210, 229, 256 ff., 269 ff., 326, 327, 333

Rißachsen 36, 54, 55, 68

Rißebene, Rißtafel 36, 66 ff.

Rohrfläche 266 ff.

Rückkehrtangenten 211

RYTZ, DAVID (1801–1868) 28

Rytzsche Achsenkonstruktion 28, 29, 199

S

Satz von BEZOUT 206, 210

— — DANDELIN 142 ff., 149, 188

— — DESARGUES 11 f., 97 ff.

— — DUPIN 328

— — EULER 327, 330, 331

— — MACLAURIN 204, 206, 207

— — MEUSNIER 139, 140, 166, 253, 256, 266, 322, 324, 333

— — POHLKE 114 ff., 118

— — WREN 218

— vom Fluchtpunkt 6

Scharfgängige Regelschraubfläche 293 ff., 302, 311 ff.

Scheinbarer Umriß der geraden zyklischen Schraubfläche 319

— — — Kugel 175, 179, 187, 190, 192

— — — Ringfläche 269, 271

— — — scharfgängigen Regelschraubfläche 299

— — — schiefen offenen Regelschraubfläche 307

— — — Schraubrohrfläche 314

— — — des Drehzylinders 130

— — — des schiefen Kreiskegels 172

— — — des schiefen Kreiszylinders 167

— — — einer Drehfläche 223, 269

— — — einer Rohrfläche 268

Scheitelkreis der Ellipse 25, 28

Scheitelschmieglekreis 253, 256, 266, 273, 282, 298, 306, 317, 324, 325, 335

— der Archimedischen Spirale 298, 299

— — Ellipse 34, 35, 91, 324

— — Hyperbel 160

— — Kappakurve 301

— — Parabel 164

— für die Abwicklung einer Kurve 140, 156, 166

SCHELLBACH, KARL HEINRICH (1809–1892) 33

Scherung 16, 169

Schichtenplan des oskulierenden Scheitelparaboloids 327

Schiebfläche 215, 219, 220

Schiebkurven der geraden zyklischen Schraubfläche 319

Schiefe Axonometrie 118 ff.

— geschlossene Regelschraubfläche 293

— offene Regelschraubfläche 302 ff.

— Parallelprojektion 6, 7, 109

Schiefer Flächenschnitt 322

— Kreiskegel 168 ff.

— Kreiszylinder 167

— Schnitt des Drehzylinders 323

— — einer Drehfläche 229

Schlangenrohr 314

Schließungssatz 12

SCHMID, THEODOR (1859–1937) 282

Schmiegeebene der Bahnschraublinie der Wendelfläche 288

— — Schraublinie 281

— — einer Kurve 323, 324

Schmieglekreis der Ellipse 31 ff., 34, 35, 91, 324

Schmieglekreismitte des Normalschnittes einer Fläche 322

— — Schiefchnittes einer Fläche 322

Schmieglekreisradius der Ellipse 33

Schmieglerichtungen des hyperbolischen Flächenpunktes 331

Schnellriß der Durchdringung dreier Drehzylinder 243 ff.

— des orthonormierten Dreibeins 123

— einer Balkenverbindung 124, 125

— einer Geraden 122, 123

— einer Kugel 190 ff.

— einer kugelförmigen Stichkappe in einer zylindrischen Tonne 262

— eines Punktes 122
 — eines Würfels 124
 — orthogonaler 197
 Schnellrißverfahren 121 ff., 190
 Schnitt eines dreiseitigen Prismas nach einem Dreieck vorgegebener Gestalt 87 ff.
 — zweier Geraden im Raum 44
 — -ellipse des Drehzylinders 324
 — -gerade zweier Ebenen 62 f., 85
 — -kurve zweier algebraischer Flächen 210
 — — berührender Flächen 235, 236
 — -punkte einer Geraden mit einer Ebene 63 ff., 68
 — -punkte ebener algebraischer Kurven 206
 Schrägriß eines Drehkegels 212 ff.
 — — Kreises 113
 — — Punktes 110
 — — regulären Tetraeders 111 f.
 — einer Würfecke 116
 — räumlicher Objekte 6, 8, 109 ff., 191
 — -verfahren 6, 8, 109 ff., 120, 188
 Schrägumriß der Kugel 181 ff., 187 ff.
 — -ellipse 181, 187, 189
 Schraubachse 274, 279, 291, 302, 311, 314
 Schraubparameter 275, 280, 291, 319
 Schraubradius 277, 287
 Schraubfläche 284, 293, 302, 304, 311, 313, 314, 317
 — von SAINT GILLES 317
 Schraublinie 274 ff., 319
 Schraubrohrfläche 313 ff.
 Schraubtorse 284 ff., 304
 Schraubzylinder 278, 302
 Schraubung 274, 280, 297
 SCHREIBER, GUIDO (1799–1871) 5, 37
 Schrotten 222
 Schubrichtung der Schraubung 274
 SCHWARZ, HERMANN AMANDUS (1843–1921) 118
 Sehebene 4, 8
 Sehstrahlrichtung 116, 190, 196
 Seitenriß 66 ff., 73, 84, 101
 Seitenrißebene 66, 67, 76
 Selbstdurchdringungskurve der scharfgängigen Regelschraubfläche 293
 Serpentine 313
 Sichtbarkeit 45, 66, 111, 185, 232
 Singulärer Punkt einer Drehfläche 223
 Sinuslinie 141, 278, 314, 325
 SNELL (= SNELLIUS), WILLEBRORD (1581–1626) 136, 153
 Sonderfälle der schiefen Axonometrie 120 f.
 Sonderlagen einer Ebene im Grund- und Aufrißverfahren 50

— — Geraden im Grund- und Aufrißverfahren 42
 Sphärische Abdehnung einer scharfgängigen Regelschraubfläche 311 ff.
 Spurgrade einer Ebene 45, 46
 Spurparallelen einer Ebene 46
 Spurnormalen einer Ebene 48
 Spurkurve der scharfgängigen Regelschraubfläche 297
 — — Schraubtorse 284
 Spurpunkt einer Geraden 40, 41, 63 ff.
 Steinschnitt 36
 STEVIN, SIMON (1548–1620) 27
 Stichkappe 261, 263
 Strahlenmaßstab in der schiefen Axonometrie 119
 Stützdreieck 70, 71
 Symmetrieebene 40, 41

T

Tangente an die Bahnschraublinie 288
 — — — Spurkurve der scharfgängigen Regelschraubfläche 297
 Tangentenebene einer Fläche 321, 325
 — in einem Punkt der Drehfläche 224
 — — — — Kugel 178
 — — — — scharfgängigen Regelschraubfläche 295, 299
 Tangentenebene in einem Punkt der schiefen offenen Regelschraubfläche 304, 307
 — — — — Schraubtorse 286
 — — — — Wendelfläche 288, 292
 — — — — des Drehhyperboloids 217
 Tangentenfläche 284
 Tangentenkegel der Drehfläche 224
 — — Kugel 179
 Tangentenkonstruktion der Ellipse 24 ff., 30 ff.
 — — Parabel 162, 163, 164
 — — Schraublinie 280
 — für den ebenen Schnitt des Torus 232
 — — — — einer Drehfläche 227
 — — — elliptischen Schnitt eines Drehkegels 151
 — — — hyperbolischen Schnitt eines Drehkegels 158
 — — — parabolischen Schnitt eines Drehkegels 162
 — — — Normalschnitt der schiefen offenen Regelschraubfläche 304, 306
 — — — — Schraubrohrfläche 316
 — — — — scheinbaren Umriß der Ringfläche 271
 — — die Durchdringungskurve einer Kugel mit einem Drehzylinder 251

- -- -- Ringfläche mit einem Drehzylinder 259
- -- -- Rohrfläche mit einem Drehkegel 269
- -- -- zylindrischen Tonne mit einem schiefen Kreiszylinder 265
- -- -- -- -- einer Kugel 261
- -- -- eines Drehparaboloids mit einer Kugel 255
- -- -- eines Drehzylinders mit einem Drehkegel bei sich schneidenden Achsen 248
- -- -- zweier Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen 238, 324
- -- -- zweier Flächen 234
- Tangentenrichtkegel der Schraublinie 279
- Tangentialschnitt der Fläche 322, 331, 332
- in einem Kehlkreispunkt des Torus 232 ff.
- TAYLOR, BROOK (1685–1731) 99
- Teilverhältnis 6, 10, 13, 44, 54, 101, 116, 123
- Tetraeder 95, 96, 97, 118
- Tonnengewölbe 261, 263
- Toroide 273
- Torse 284, 304, 327
- Torus 210, 229, 256 ff., 326, 327, 333
- Transzendente Fläche 289, 295
- Kurve 301, 309
- Transzendente Zahl 134
- Treffgerade zweier windschiefer Geraden 59
- Trimetrisches Achsenkreuz 120

U

- Umlaufsinn eines Dreiecks 66
- Umklappung einer Ebene 79
- Umlegung einer Ebene 79, 81 ff.
- Umprojektion 66
- Umprojizieren 67, 68, 73
- Umrißellipse der Kugel 192 ff.
- Umrißerzeugende des Kegels 144
- Zylinders 130
- -- im Schnellriß 245
- Umrißkurve der Kugel 175
- Umrißmantellinien des Kegels 115
- Zylinders 128
- -- im Schnellriß 245
- Umrißpunkt 129
- Umrißzylinder 175
- Uneigentliche Punkte 201, 208
- Unzugängliche Schnittpunkte 93 f.

V

- Verbiegung einer Fläche 323
- Verbindungsebene von drei Punkten 60 ff.

- Verdoppelung eines Würfels 134
- Verfahren der zugeordneten Normalrisse 36
- Verkürzungsdreieck 110 ff.
- Verschwindungsebene 4
- Verschwindungsgerade 99, 163, 171
- Verschwindungspunkt 5, 99, 163, 171
- Vertikalspur einer Ebene 45
- Geraden 40, 41
- Verzerrungseinheit 118
- Verzerrungsmaßstab in der Axonometrie 119
- Vielfach 95
- Vierpunktige Berührung 34
- VITRUVIUS POLLIO (um 25 v. Chr.) 36
- VIVIANI, VINCENTO (1622–1703) 253
- VIVIANISCHE Linie 253, 338

W

- Wahre Größe des Winkels zweier Ebenen 85 ff.
- einer ebenen Figur 81 ff.
- eines Dreiecks 82, 89
- -- Winkels 79
- Wahrer Umriß der Drehfläche 223
- -- geraden zyklischen Schraubfläche 319
- -- Kugel 175, 179, 187, 192 ff.
- -- Ringfläche 271
- -- scharfgängigen Regelschraubfläche 299
- -- schiefen offenen Regelschraubfläche 307
- -- Schraubrohrfläche 314
- -- des Drehhyperboloids 220
- -- schiefen Kreiskegels 172
- Wahrer Umriß des schiefen Kreiszylinders 167
- -- Zylinders 128
- -- einer Drehfläche 269
- -- Kugel 187, 192
- -- Rohrfläche 268
- Wendeasymptote einer algebraischen Kurve 202, 204
- Wendelfläche 286 ff., 289 ff., 302, 327
- Wendelwölbfläche 317
- Wendepunkt 156, 166
- Wendetangente 156, 166, 279, 280
- WIENER, CHRISTIAN (1826–1896) 37
- Windschiefe Geraden 44
- Regelfläche 219, 304
- Regelschraubfläche 289, 295, 296
- Winklebene 80
- WREN, CHRISTOPHER (1632–1723) 218
- Wulstkreis des Torus 229
- Wulstschraublinie der Schraubrohrfläche 314

Würfel 95

— -ecke 115, 116

Z

Zentralperspektive Dreiecke 98

Zentralprojektion 4ff., 100, 170, 179

Zentralriß eines Gegenstandes 4

Zentrische Ähnlichkeit 93f., 236, 246

Zentrum der perspektiven Kollineation 98

Zerfallende algebraische Fläche 208

— — Kurve 201, 211

— — — Raumkurve 4. Ordnung 235, 236

— — — 8. Ordnung 256

Zerfallender Kegelschnitt 142

Zugeordnete Normalrisse eines Objektes
121

Zusammenfallendes Bildpaar der Deck-
geraden einer Ebene 53, 54

— — — Deckpunkte einer Geraden 53

Zweipunktige Berührung 32

Zweischaliges Drehhyperboloid 214

Zweitafelverfahren 36

Zweite Hauptlinien 42

— Falllinien einer Ebene 48, 49, 92

— Hauptlinien einer Ebene 46

— Spur einer Ebene 45

— Spurnormalen einer Ebene 48

— Spurparallelen einer Ebene 46, 49

Zweiter Spurpunkt einer Geraden 40, 41

Zweitprojizierende Ebene 40, 51, 167, 299,
307, 324

— Gerade 43

Zyklische Schraubfläche 314, 317

Zylinder 128ff., 167ff., 327

— -räder 222

Zylindrische Schraubenlinien der Wendel-
fläche 291, 292

— Tonne 261, 263

STUDIA MATHEMATICA - MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER

Herausgegeben vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter
Leitung von Hellmuth Kneser, Claus Müller und Theodor Schneider

- XVII KARL-HEINRICH WEISE
Differentialgleichungen
1966. 358 Seiten, Leinen 48,— DM
- XIX LÁSZLÓ FUCHS
Teilweise geordnete algebraische Strukturen
1966. 311 Seiten, Leinen 45,— DM
- XVIII GERRIT BOL
Projektive Differentialgeometrie
3. Teil. 1966. Etwa 520 Seiten, Leinen etwa 80,— DM
- XVI J. C. H. GERRETSEN
Tangente und Flächeninhalt
Eine Einführung in die Infinitesimalrechnung auf anschaulicher Grundlage. Übersetzt von Jan Bol. 1964. 368 Seiten, Leinen 29,— DM
- EMANUEL SPERNER
Einführung in die
Analytische Geometrie und Algebra
- I I. Teil: 6., durchgesehene Aufl. 1963. 339 Seiten mit 45 Figuren, Leinen 23,— DM
- VI II. Teil: 5. Aufl. 1963. 388 Seiten, Leinen 24,80 DM.
Beide Teile zusammen Leinen 43,— DM
- GERRIT BOL
Elemente der Analytischen Geometrie
- II I. Teil: Grundzüge der ebenen und räumlichen Geometrie. 1948.
232 Seiten mit 103 Fig., kart. 14,— DM, Leinen 16,50 DM
- V II. Teil: Abbildungen und Transformationen. 1949. 156 Seiten mit
23 Fig., brosch. 8,80 DM, Hln. 10,50 DM
- III WALTER LIETZMANN
Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und
konstruktiven Methoden
1949. 292 Seiten mit 157 Fig., brosch. 12,50 DM, Leinen 14,80 DM

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN UND ZÜRICH

STUDIA MATHEMATICA – MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER

Herausgegeben vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach unter
Leitung von Hellmuth Kneser, Claus Müller und Theodor Schneider

GERRIT BOL

Projektive Differentialgeometrie

- IV 1. Teil: 1950. 372 Seiten mit 13 Fig., brosch. 19,80 DM, Hln. 22,50 DM
IX 2. Teil: 1954. 378 Seiten mit 19 Fig., Hln. 38,— DM
Beide Teile zusammen 55,— DM

VII GÜNTER PICKERT

Einführung in die höhere Algebra

1951. 298 Seiten, brosch. 12,80 DM, Leinen 14,80 DM

VIII WILHELM MAAK

Differential- und Integralrechnung

3. Auflage 1963. 382 Seiten mit 14 Abb., Leinen 26,— DM

X WERNER DÖRING

Einführung in die Quantenmechanik

3., durchgesehene Auflage 1963. 517 Seiten mit 31 Abb.,
Leinen 26,— DM

XI JOHANNES FLÜGGE

Leitfaden der geometrischen Optik und des Optikrechnens

1956. 203 Seiten mit 119 Fig. und zahlreichen Tab., Leinen 19,80 DM

XIII HELLMUTH KNESER

Funktionentheorie

2., durchgesehene und erweiterte Auflage 1966. 445 Seiten mit
31 Figuren, Leinen 34,— DM

XIV HERBERT MESCHKOWSKI

Differenzengleichungen

1959. 243 Seiten mit 14 Abb., Leinen 36,— DM

XV KLAUS SCHÄFER

Statistische Theorie der Materie

Band I: Allgemeine Grundlagen und Anwendungen auf Gase.
1959. 282 Seiten mit 27 Abb. und Tabellenanhang, Leinen 38,— DM

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN UND ZÜRICH
