

Polynômes de Jack et b -énumération de cartes

Houcine Ben Dali

Université de Lorraine, CNRS, IECL, France

Université de Paris Cité, CNRS, IRIF, France



sous la direction de

Guillaume Chapuy et Valentin Féray

17 Juin 2024

Cartes et polynômes de Jack

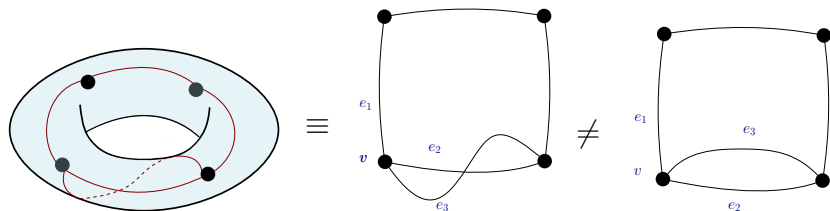
Objectif : Lier

des objets combinatoires à des objets algébriques

Les **cartes** **polynômes de Jack**
(graphes sur des surfaces) $\longleftrightarrow$ (une famille de fonctions symétriques)

Cartes connexes

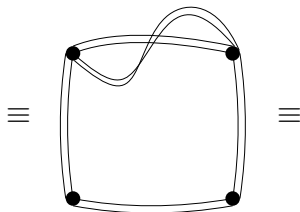
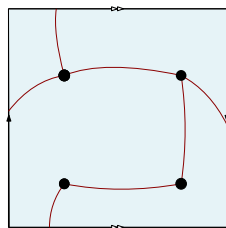
- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou non**, considérée à homéomorphisme près.



Une carte connexe orientable

Cartes connexes

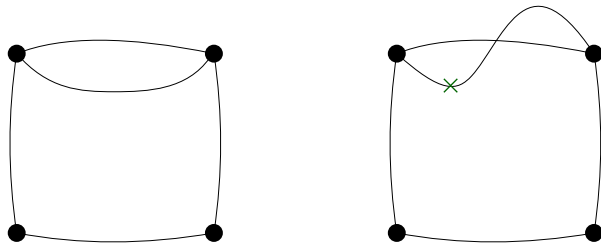
- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou non**, considérée à homéomorphisme près.



Une carte connexe non-orientable

Cartes

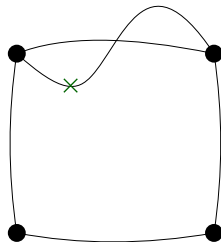
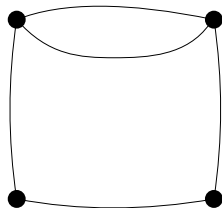
- Une carte est une collection de cartes connexes.



Une carte à deux composantes connexes

Cartes

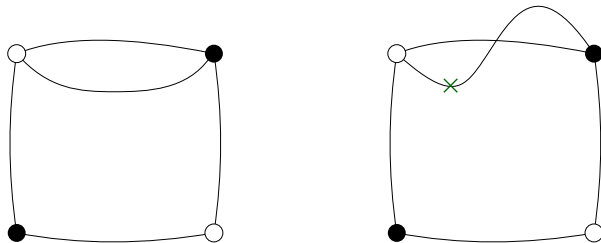
- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.



Une carte non-orientable

Cartes

- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.
- On considère ici des cartes **biparties** ; les sommets sont coloriés en noir et blanc et toute arête lie deux sommets de couleurs différentes.



Une carte bipartie non-orientable.

Différentes approches pour énumérer les cartes

Un outil important ; les séries génératrices. Si $\mathcal{C}$ est une classe de cartes, on lui associe une fonction :

$$F_{\mathcal{C}} = \sum_{M \in \mathcal{C}} \text{poids}(M).$$

Différentes approches pour énumérer les cartes

Un outil important ; les **séries génératrices**. Si $\mathcal{C}$ est une classe de cartes, on lui associe une fonction :

$$F_{\mathcal{C}} = \sum_{M \in \mathcal{C}} \text{poids}(M).$$

Exemple: $\mathcal{C}_g = \{\text{Cartes connexes de genre } g\}$ et

$$F_{\mathcal{C}_g}(t) = \sum_{M \in \mathcal{C}_g} t^{\# \text{arêtes}(M)}.$$

Différentes approches pour énumérer les cartes

Un outil important ; les **séries génératrices**. Si $\mathcal{C}$ est une classe de cartes, on lui associe une fonction :

$$F_{\mathcal{C}} = \sum_{M \in \mathcal{C}} \text{poids}(M).$$

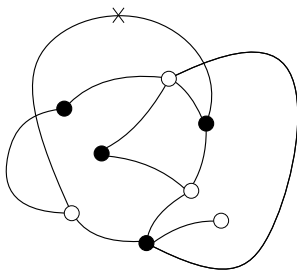
Exemple: $\mathcal{C}_g = \{\text{Cartes connexes de genre } g\}$ et

$$F_{\mathcal{C}_g}(t) = \sum_{M \in \mathcal{C}_g} t^{\# \text{arêtes}(M)}.$$

- Formules explicites (Tutte pour des cartes planaires, Harer et Zagier pour des cartes unicellulaires orientables...),
- Comprendre la structure de cartes aléatoires (limite d'échelle, limite locale..),
- Comprendre le comportement asymptotique (étude de singularité de la fonction génératrice, propriété de rationalité..),
- **Lier les séries génératrices de cartes à la théorie des fonctions symétriques.**

I. Cartes avec contrôle du profil

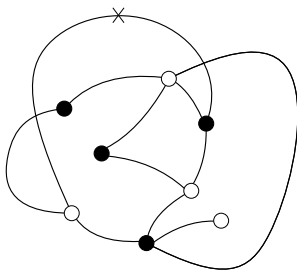
- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.



Une carte de taille 11.

I. Cartes avec contrôle du profil

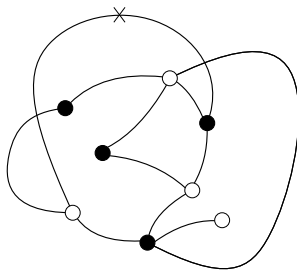
- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- On dit que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ est une **partition** de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. L'entier k est la **longueur** de λ et sera noté $\ell(\lambda)$.



Une carte de taille 11.

I. Cartes avec contrôle du profil

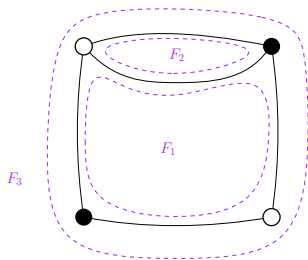
- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- On dit que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ est une **partition** de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. L'entier k est la **longueur** de λ et sera noté $\ell(\lambda)$.
- Le **type de sommets blancs** (resp. **type de sommets noirs**) de M est la partition $\circ(M)$ (resp. $\bullet(M)$) obtenue en réordonnant les degrés des sommets blancs (resp. sommets noirs) de M .



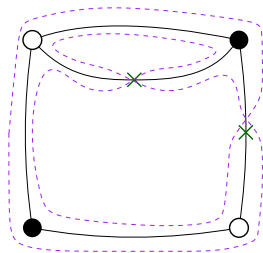
Une carte de type de sommets blancs $[4, 3, 3, 1]$, et de type de sommets noirs $[4, 3, 2, 2]$.

I. Cartes avec contrôle du profil

- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- On dit que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ est une **partition** de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. L'entier k est **la longueur** de λ et sera noté $\ell(\lambda)$.



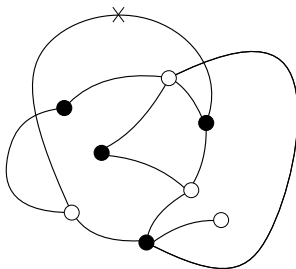
Une carte orientable avec 3 faces.



Une carte non-orientable avec 1 face.

I. Cartes avec contrôle du profil

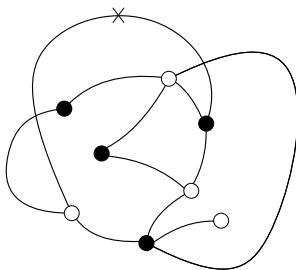
- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- On dit que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ est une **partition** de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. L'entier k est **la longueur** de λ et sera noté $\ell(\lambda)$.
- Le **type de faces** d'une carte bipartie M , noté $\diamond(M)$, est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de M par 2.



Une carte non-orientable de type de faces $[7, 2, 2]$.

I. Cartes avec contrôle du profil

- La **taille** d'une carte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- On dit que $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ est une **partition** de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. L'entier k est la **longueur** de λ et sera noté $\ell(\lambda)$.
- Le triplet de partitions $(\diamond(M), \circ(M), \bullet(M))$ s'appelle le **profil** de M .

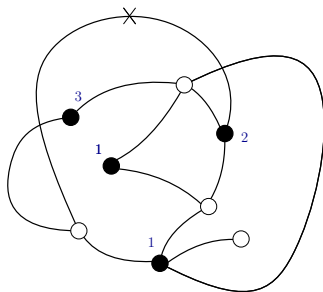


Une carte non-orientable de profil $([7, 2, 2], [4, 3, 3, 1], [4, 3, 2, 2])$.

II. Cartes en niveaux

Soit k un entier positif. Une carte M est dite en k niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans $1, 2, \dots, k$,

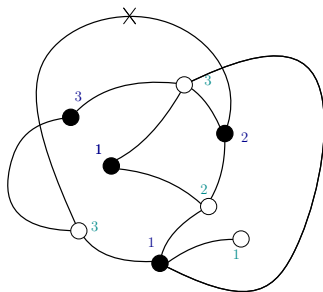


Une carte en 3 niveaux.

II. Cartes en niveaux

Soit k un entier positif. Une carte M est dite en k niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans $1, 2, \dots, k$,
- chaque sommet blanc porte la valeur maximale parmi celles de tous ses voisins noirs.



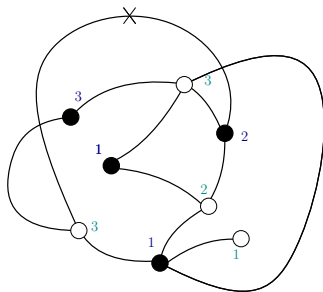
Une carte en 3 niveaux.

II. Cartes en niveaux

Soit k un entier positif. Une carte M est dite en k niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans $1, 2, \dots, k$,
- chaque sommet blanc porte la valeur maximale parmi celles de tous ses voisins noirs.

Les sommets de valeur i forment le niveau i de la carte.



Une carte en 3 niveaux.

Fonctions symétriques

On considère l'espace des fonctions symétriques en $x_1, x_2, \dots$

Fonctions symétriques

On considère l'espace des fonctions symétriques en $x_1, x_2, \dots$.
Cet espace admet plusieurs bases, indexées par des partitions.

❶ Base monomiale:

$$m_\lambda := \sum_{\beta \text{ réordonnements de } \lambda} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_s} x_{i_1}^{\beta_1} \dots x_{i_s}^{\beta_s} \right)$$

Exemple

$$m_{[1,1]} := \sum_{i < j} x_i x_j, \quad m_{[2,1]} := \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$$

Fonctions symétriques

On considère l'espace des fonctions symétriques en $x_1, x_2, \dots$.
Cet espace admet plusieurs bases, indexées par des partitions.

❶ Base monomiale:

$$m_\lambda := \sum_{\beta \text{ réordonnements de } \lambda} \left(\sum_{i_1 < \dots < i_s} x_{i_1}^{\beta_1} \dots x_{i_s}^{\beta_s} \right)$$

Exemple

$$m_{[1,1]} := \sum_{i < j} x_i x_j, \quad m_{[2,1]} := \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$$

❷ Base des sommes de puissances: Si $k \geq 1$ alors $p_k := \sum_{i \geq 1} x_i^k$ et
 $p_\lambda := p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_{\ell(\lambda)}}$.

Exemple

$$p_{[1,1]} = p_1^2 = \sum_{i,j \geq 1} x_i x_j, \quad p_2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2.$$

Fonctions symétriques

- ③ Fonctions de Schur s_λ , peuvent être définies avec des formules déterminants, avec des tableaux de Young, ou en utilisant les caractères du groupe symétrique

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu,$$

- où
- ▶ χ^λ : le caractère irréductible de $\mathfrak{S}_n$ associé à λ .
 - ▶ $z_\mu := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$, avec $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$

Fonctions symétriques

- ④ Les polynômes de Jack $J_{\lambda}^{(1+b)}$: c'est une famille de fonctions symétriques, qui dépendent d'un paramètre b et qui satisfait :
- ▶ une condition de triangularité par rapport à la base monomiale.
 - ▶ une condition d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire $\langle ., . \rangle_{1+b}$ dépendant de b .

Pour $b = 0$, les polynômes de Jack correspondent aux **fonctions de Schur**.

Fonctions symétriques

- ④ Les polynômes de Jack $J_{\lambda}^{(1+b)}$: c'est une famille de fonctions symétriques, qui dépendent d'un paramètre b et qui satisfait :
 - ▶ une condition de triangularité par rapport à la base monomiale.
 - ▶ une condition d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire $\langle ., . \rangle_{1+b}$ dépendant de b .

Pour $b = 0$, les polynômes de Jack correspondent aux **fonctions de Schur**.

- Peuvent être obtenus comme une limite des polynômes de Macdonald,
- liés à certains modèles de mécanique statistique, à la théorie des matrices aléatoires...
- ont une structure combinatoire riche (tableaux, fonctions chromatiques, **cartes**..).

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les
sommes de puissances.



Cartes biparties orientables.

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les sommes de puissances. $\longleftrightarrow$ Cartes biparties orientables.

Première direction $\longleftarrow$:

Exprimer la série des cartes **avec contrôle des trois partitions du profil** comme somme de fonctions de Schur.

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les sommes de puissances. $\longleftrightarrow$ Cartes biparties orientables.

Première direction $\longleftarrow$:

Exprimer la série des cartes **avec contrôle des trois partitions du profil** comme somme de fonctions de Schur.

Deuxième direction $\longrightarrow$:

Écrire une fonction de Schur comme une série génératrice de **cartes en niveaux**.

Première direction

On fixe une carte bipartie M . On associe

- à une arête un poids t ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc de degré i un poids q_i ,
- à un sommet noir de degré i un poids r_i ,

où p_i , q_i et r_i sont des fonctions sommes de puissances dans trois alphabets différents

Première direction

On fixe une carte bipartie M . On associe

- à une arête un poids t ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc de degré i un poids q_i ,
- à un sommet noir de degré i un poids r_i ,

où p_i , q_i et r_i sont des fonctions sommes de puissances dans trois alphabets différents $\longrightarrow$ La carte M a un poids $t^{|M|} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}$.

Première direction

On fixe une carte bipartie M . On associe

- à une arête un poids t ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc de degré i un poids q_i ,
- à un sommet noir de degré i un poids r_i ,

où p_i , q_i et r_i sont des fonctions sommes de puissances dans trois alphabets différents $\longrightarrow$ La carte M a un poids $t^{|M|} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}$.

Théorème

$$\sum_{\xi \text{ partition}} t^{|\xi|} \frac{J_{\xi}^{(1)}(\mathbf{p}) J_{\xi}^{(1)}(\mathbf{q}) J_{\xi}^{(1)}(\mathbf{r})}{j_{\xi}^{(1)}} = \sum_{\substack{\text{cartes} \\ \text{orientables } M}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)},$$

où $j_{\xi}^{(1)} := \langle J_{\xi}^{(1)}, J_{\xi}^{(1)} \rangle_1$.

Deuxième direction

On fixe une partition λ et carte bipartie en $\ell(\lambda)$ niveaux M . On associe

- à une arête un poids -1 ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc dans le niveau i un poids $-\lambda_i$.

Deuxième direction

On fixe une partition λ et carte bipartie en $\ell(\lambda)$ niveaux M . On associe

- à une arête un poids -1 ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc dans le niveau i un poids $-\lambda_i$.

→ La carte M a un poids

$$(-1)^{|M|} p_{\diamond(M)} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_o^{(i)}(M)|},$$

où $|\mathcal{V}_o^{(i)}(M)|$ est le nombre de sommets blancs dans le niveau i .

Deuxième direction

On fixe une partition λ et carte bipartie en $\ell(\lambda)$ niveaux M . On associe

- à une arête un poids -1 ,
- à une face de degré $2i$ un poids p_i ,
- à un sommet blanc dans le niveau i un poids $-\lambda_i$.

→ La carte M a un poids

$$(-1)^{|M|} p_{\diamond(M)} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_\circ^{(i)}(M)|},$$

où $|\mathcal{V}_\circ^{(i)}(M)|$ est le nombre de sommets blancs dans le niveau i .

Théorème (Féray '10)

$$J_\lambda^{(1)}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\text{cartes orientables } M \\ \text{en } \ell(\lambda) \text{ niveaux}}} \frac{(-1)^{|M|} p_{\diamond(M)}}{z_{\diamond(M)}} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_\circ^{(i)}(M)|}.$$

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les
sommes de puissances.



Cartes biparties orientables.

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les
sommes de puissances.



Cartes biparties orientables.

Polynômes de Jack pour $b = 1$
(fonctions zonales) dans les
sommes de puissances.



Cartes biparties orientables ou non.

- $\leftarrow$: Goulden–Jackson '96,
- $\rightarrow$: Féray–Śniady '11.

Fonctions symétriques et énumération de cartes

On s'intéresse au développement des polynômes de Jack dans les fonctions somme de puissances.

Théorie des représentations :

Polynômes de Jack pour $b=0$
(fonctions de Schur) dans les sommes de puissances. $\longleftrightarrow$ Cartes biparties **orientables**.

Polynômes de Jack pour $b = 1$
(fonctions zonales) dans les sommes de puissances. $\longleftrightarrow$ Cartes biparties **orientables ou non**.

Il existe deux conjectures de b -déformation:

Polynômes de Jack dans les fonctions sommes de puissances. $\longleftrightarrow$ Cartes biparties avec des **poids de non-orientabilité**.

Statistiques de non-orientabilités

Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte M associe un entier positif $\vartheta(M)$ telle que $\vartheta(M) = 0$ si et seulement si M est orientable.

Statistiques de non-orientabilités

Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte M associe un entier positif $\vartheta(M)$ telle que $\vartheta(M) = 0$ si et seulement si M est orientable.

Toutes les cartes seront comptées avec un poids $b^{\vartheta(M)}$.

Statistiques de non-orientabilités

Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte M associe un entier positif $\vartheta(M)$ telle que $\vartheta(M) = 0$ si et seulement si M est orientable.

Toutes les cartes seront comptées avec un poids $b^{\vartheta(M)}$.

Pour $b = 0$:

$$b^{\vartheta(M)} = \begin{cases} 1 & \text{si } M \text{ est orientable,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $b = 1$:

$$b^{\vartheta(M)} = 1 \quad \text{pour toute carte } M.$$

Conjectures de Goulden et Jackson

La conjecture Matchings-Jack (Goulden et Jackson '96)

Il existe une statistique de non-orientabilité ϑ , telle que

$$\sum_{\xi \text{ partition}} \frac{t^{|\xi|}}{j_{\xi}^{(1+b)}} J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{\text{cartes } M, \\ \text{orientables ou non}}} \frac{b^{\vartheta(M)} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}}{z_{\diamond(M)} (1+b)^{\ell(\diamond(M))}},$$

où $j_{\xi}^{(1+b)} := \langle J_{\xi}^{(1+b)}, J_{\xi}^{(1+b)} \rangle_{1+b}$.

*D'une manière équivalente, les coefficients de la série du terme gauche dans la base des sommes de puissances (après normalisation) sont des **polynômes** en b à coefficients **entiers** et **positifs**.*

Conjectures de Goulden et Jackson : Des résultats partiels

Théorème (B.D '22, conjecture Matching-Jack marginale)

Il existe une statistique de non-orientabilité explicite ϑ , telle que

$$\sum_{\xi \text{ partition}} \frac{t^{|\xi|}}{j_{\xi}^{(1+b)}} J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_{\xi}^{(1+b)}(\underline{u}) = \sum_{\substack{\text{cartes } M, \\ \text{orientables ou non}}} \frac{b^{\vartheta(M)} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} u^{|\bullet(M)|}}{z_{\diamond(M)} (1+b)^{\ell(\diamond(M))}},$$

où

$$J_{\xi}^{(1+b)}(\underline{u}) := J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{r})|_{r_i=u}.$$

Basé sur un résultat analogue de Chapuy–Dołęga '22 sur la b -conjecture.

Conjectures de Goulden et Jackson : Des résultats partiels

Théorème (B.D '23, Intégralité dans la conjecture Matching-Jack)

Les coefficients de la série

$$\sum_{\xi \text{ partition}} \frac{t^{|\xi|}}{j_{\xi}^{(1+b)}} J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{r})$$

*dans la base des fonctions sommes de puissances (après normalisation) sont des polynômes en b avec des coefficients **entiers**.*

Il reste à montrer la positivité pour obtenir la conjecture Matching-Jack.

Conjectures de Goulden et Jackson : Des résultats partiels

Théorème (B.D '23, Intégralité dans la conjecture Matching-Jack)

Les coefficients de la série

$$\sum_{\xi \text{ partition}} \frac{t^{|\xi|}}{j_{\xi}^{(1+b)}} J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_{\xi}^{(1+b)}(\mathbf{r})$$

*dans la base des fonctions sommes de puissances (après normalisation) sont des polynômes en b avec des coefficients **entiers**.*

Il reste à montrer la positivité pour obtenir la conjecture Matching-Jack.

Dolega-Féray '16 ont montré que ces coefficients sont des polynômes avec des coefficients **rationnels**.

Résultats principaux

Conjecture	Integralité	Positivité	Interprétation combinatoire
Sommes marginales de la conjecture Matching-Jack	Chapitre 2		
Conjecture Matching-Jack	Chapitre 3	-	-
Conjecture de Lassalle (Chapitre 4, avec Maciej Dołęga)	Chemins de Łukasiewicz	Cartes en niveaux	

Chapitre 5 : Utiliser l'interprétation combinatoire des caractères de Jack pour obtenir une équation différentielle sur les séries de cartes avec contrôle des trois partitions du profil.

Une conjecture duale

Rappel (Féray '10) :

$$J_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\text{cartes orientables } M \\ \text{en } \ell(\lambda) \text{ niveaux}}} \frac{(-1)^{|M|} p_{\diamond(M)}}{z_{\diamond(M)}} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}.$$

Une conjecture duale

Rappel (Féray '10) :

$$J_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\text{cartes orientables } M \\ \text{en } \ell(\lambda) \text{ niveaux}}} \frac{(-1)^{|M|} p_{\diamond(M)}}{z_{\diamond(M)}} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}.$$

Conjecture (Dołęga–Féray–Śniady '14)

Le polynôme de Jack $J_{\lambda}^{(1+b)}$ a une interprétation en termes de cartes en $\ell(\lambda)$ -niveaux *orientables ou non*, comptées avec des *poids de non orientabilité*.

Caractères de Jack

Fixons une partition μ .

$$\theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) := \begin{cases} 0, & \text{si } |\lambda| < |\mu|. \\ \binom{|\lambda| - |\mu| + m_1(\mu)}{m_1(\mu)} [p_{\mu, 1^{|\lambda| - |\mu|}}] J_{\lambda}^{(1+b)}, & \text{si } |\lambda| \geq |\mu|. \end{cases}$$

$m_1(\mu)$: le nombre de parts de taille 1 dans μ .

Caractères de Jack

Fixons une partition μ .

$$\theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) := \begin{cases} 0, & \text{si } |\lambda| < |\mu|. \\ \binom{|\lambda| - |\mu| + m_1(\mu)}{m_1(\mu)} [p_{\mu, 1^{|\lambda| - |\mu|}}] J_{\lambda}^{(1+b)}, & \text{si } |\lambda| \geq |\mu|. \end{cases}$$

$m_1(\mu)$: le nombre de parts de taille 1 dans μ .

En particulier,

$$J_{\lambda}^{(1+b)} = \sum_{\mu \vdash |\lambda|} \theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) p_{\mu}.$$

Caractères de Jack

Fixons une partition μ .

$$\theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) := \begin{cases} 0, & \text{si } |\lambda| < |\mu|. \\ \binom{|\lambda| - |\mu| + m_1(\mu)}{m_1(\mu)} [p_{\mu, 1^{|\lambda| - |\mu|}}] J_{\lambda}^{(1+b)}, & \text{si } |\lambda| \geq |\mu|. \end{cases}$$

$m_1(\mu)$: le nombre de parts de taille 1 dans μ .

En particulier,

$$J_{\lambda}^{(1+b)} = \sum_{\mu \vdash |\lambda|} \theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) p_{\mu}.$$

Conjecture de Lassalle (version simplifiée)

Conjecture (Lassalle '08)

*Les caractères de Jack normalisés $(-1)^{|\mu|} z_{\mu} \theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ sont des **polynômes** en $b, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots$, avec des coefficients **entiers** et **positifs**.*

Lassalle '08 + Dołęga–Féray–Śniady '14 : positivité quand λ est de forme rectangulaire (cartes en 1 niveau).

Résultats principaux

Conjecture	Integralité	Positivité	Interprétation combinatoire
Sommes marginales de la conjecture Matching-Jack	Chapitre 2		
Conjecture Matching-Jack	Chapitre 3	-	-
Conjecture de Lassalle (Chapitre 4, avec Maciej Dołęga)	Chemins de Łukasiewicz	Cartes en niveaux	

Chapitre 5 : Utiliser l'interprétation combinatoire des caractères de Jack pour obtenir une équation différentielle sur les séries de cartes avec contrôle des trois partitions du profil.

Caractères de Jack comme séries de cartes en niveaux

Théorème (B.D–Dołęga '23+)

Il existe une statistique de non orientabilité explicite ϑ sur les cartes en $\ell(\lambda)$ -niveaux telle que

$$\theta_{\mu}^{(1+b)}(\lambda) = \sum_{\substack{M \text{ en } \ell(\lambda)\text{-niveaux} \\ \text{avec } \diamond(M) = \mu}} \frac{(-1)^{|M|} b^{\vartheta(M)}}{2^{|\mathcal{V}_{\bullet}(M)| - cc(M)} (1+b)^{cc(M)}} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} \frac{(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}}{z_{\nu_{\bullet}^{(i)}(M)}},$$

- $|\mathcal{V}_{\bullet}(M)|$ est le nombre de sommets noirs M .
- $|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|$ est le nombre de sommets blancs de M dans le niveau i .
- $cc(M)$ est le nombre de composantes connexes de M .
- $b^{\vartheta(M)}$ poids de non orientabilité.
- $(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}$ poids lié à la structure en niveaux.

Point de départ de la preuve : Théorème de caractérisation

On dit qu'une fonction $f(u_1, u_2, \dots)$ est b -symétrique décalée si elle est symétrique dans les variables $u_i - \frac{i}{1+b}$.

Théorème (Féray '19)

Soit μ un partition. Le caractère de Jack $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est l'unique fonction telle que;

- $\theta_\mu^{(1+b)}$ est b -symétrique décalée de degré $|\mu|$.
- $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0, \dots) = 0$ pour toute partition $|\lambda| < |\mu|$.
- sa partie homogène de plus haut de degré est $\frac{(1+b)^{|\mu| - \ell(\mu)}}{z_\mu} p_\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.

Idée de la preuve

Objectif: On cherche une statistique de non orientabilité ϑ pour laquelle la série génératrice des cartes en niveaux vérifie les trois conditions de caractérisation.

$$F^{(k)}(t, \mathbf{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := \sum_{\text{cartes } M \text{ en } k \text{ niveaux}} \frac{p_{\diamond(M)}(-t)^{|M|} b^{\vartheta(M)}}{2^{|\mathcal{V}_{\bullet}(M)| - cc(M)} (1+b)^{cc(M)}} \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}}{z_{\nu_{\bullet}^{(i)}(M)}^{(i)}}.$$

Idée de la preuve

Objectif: On cherche une statistique de non orientabilité ϑ pour laquelle la série génératrice des cartes en niveaux vérifie les trois conditions de caractérisation.

$$F^{(k)}(t, \mathbf{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := \sum_{\text{cartes } M \text{ en } k \text{ niveaux}} \frac{p_{\diamond(M)}(-t)^{|M|} b^{\vartheta(M)}}{2^{|\mathcal{V}_{\bullet}(M)| - cc(M)} (1+b)^{cc(M)}} \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}}{z_{\nu_{\bullet}^{(i)}(M)}^{(i)}}.$$

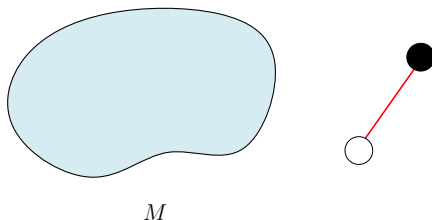
- On trouve une statistique ϑ pour laquelle la série $F^{(k)}$ s'écrit à l'aide d'**opérateurs différentiels**.
- On prouve des **relations de commutation** satisfaites par ces opérateurs différentiels, et qui permettent d'obtenir les conditions du théorème de caractérisation.

Ajouter une arête

On fixe une carte bipartie, avec un poids $p_{\diamond(M)}$.

$$p_1 \cdot p_{\diamond(M)} = p_{\diamond(N)},$$

N est la carte obtenue à partir de M en ajoutant une arête isolée.

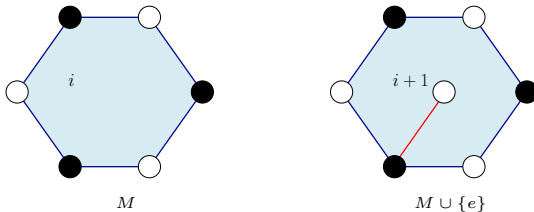


Ajouter une arête

On fixe une carte bipartie, avec un poids $p_{\diamond}(M)$.

$$\left(\sum_{i \geq 1} p_{i+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \right) p_{\diamond}(M) = \sum_e p_{\diamond}(M \cup \{e\})$$

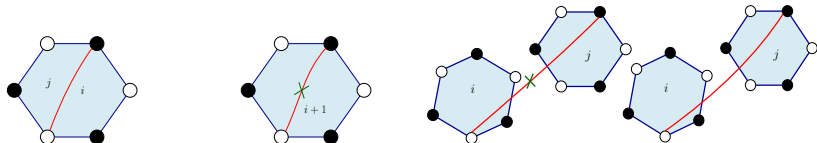
où la somme est sur toutes les façons d'ajouter une feuille blanche sur un coin noir de M .



Ajouter une arête

$$\left(\sum_{i,j \geq 1} p_i p_j \frac{(i+j-1)\partial}{\partial p_{i+j-1}} + \sum_{i \geq 1} p_{i+1} \frac{i^2 \partial}{\partial p_i} + 2 \sum_{i,j \geq 1} p_{i+j+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \frac{j \partial}{\partial p_j} \right) \cdot p_{\diamond}(M) = \sum_e p_{\diamond}(M \cup \{e\})$$

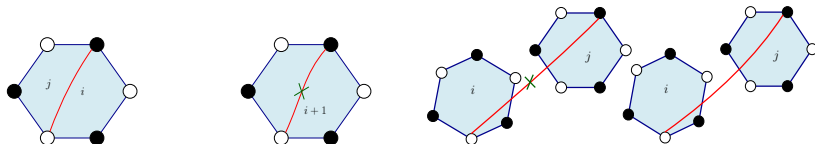
où la somme est sur toutes les façons d'ajouter une arête entre deux coins de M .



Ajouter une arête

$$\left(\sum_{i,j \geq 1} p_i p_j \frac{(i+j-1)\partial}{\partial p_{i+j-1}} + \sum_{i \geq 1} p_{i+1} \frac{i^2 \partial}{\partial p_i} + 2 \sum_{i,j \geq 1} p_{i+j+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \frac{j \partial}{\partial p_j} \right) \cdot p_{\diamond(M)} = \sum_e p_{\diamond(M \cup \{e\})}$$

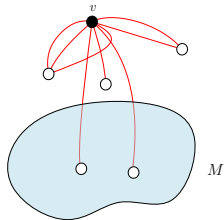
où la somme est sur toutes les façons d'ajouter une arête entre deux coins de M .



On peut intégrer le paramètre b dans cet opérateur pour associer à chaque arête un poids 1 ou b .

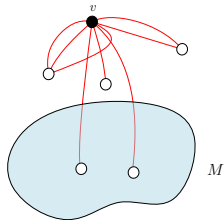
Opérateurs de Chapuy–Dołęga

Pour $n \geq 1$, on a un opérateur $\mathcal{B}_n(\mathbf{p}, u)$ qui ajoute un sommet noir avec un poids u pour chaque nouveau sommet blanc ajouté.



Opérateurs de Chapuy–Dołęga

Pour $n \geq 1$, on a un opérateur $\mathcal{B}_n(\mathbf{p}, u)$ qui ajoute un sommet noir avec un poids u pour chaque nouveau sommet blanc ajouté.



Expression différentielle : On considère un nouvel alphabet de variables $Y := (y_0, y_1, y_2, \dots)$.

$$\mathcal{B}_n(\mathbf{p}, u) := \Theta_Y (\Gamma_Y + uY_+)^n \frac{y_0}{1+b}.$$

où

$$Y_+ := \sum_{i \geq 0} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\Gamma_Y := \sum_{i,j \geq 1} y_i p_j \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + (1+b) \cdot \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j} \frac{i \partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + b \cdot \sum_{i \geq 1} y_{i+1} \frac{i \partial}{\partial y_i},$$

$$\Theta_Y := \sum_{i \geq 1} p_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

Expression différentielle

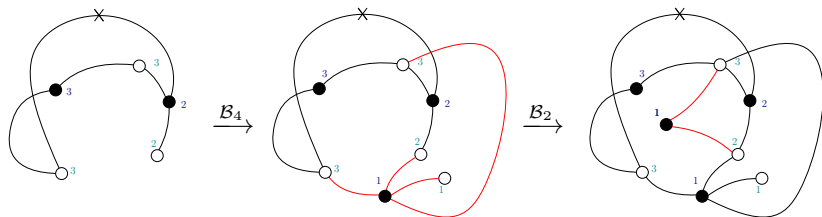
$$F^{(k+1)}(t, \mathbf{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} \mathcal{B}_n(\mathbf{p}, -\alpha \lambda_1) \right) \cdot F^{(k)}(t, \mathbf{p}, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}),$$

où $\mathcal{B}_n(\mathbf{p}, -\alpha \lambda_1)$ est un opérateur qui ajoute un sommet de degré n dans le niveau 1, en ajoutant éventuellement des sommets blancs (nécessairement dans le niveau 1).

Expression différentielle

$$F^{(k+1)}(t, \mathbf{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} \mathcal{B}_n(\mathbf{p}, -\alpha \lambda_1) \right) \cdot F^{(k)}(t, \mathbf{p}, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}),$$

où $\mathcal{B}_n(\mathbf{p}, -\alpha \lambda_1)$ est un opérateur qui ajoute un sommet de degré n dans le niveau 1, en ajoutant éventuellement des sommets blancs (nécessairement dans le niveau 1).



Relations de commutation

$$F^{(k+1)}(t, \mathbf{p}, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} \mathcal{B}_n(\mathbf{p}, -\alpha \lambda_1) \right) \cdot F^{(k)}(t, \mathbf{p}, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}),$$

Pour obtenir les conditions du théorème de caractérisation, on établit des relations de commutation

$$[B_n(\mathbf{p}, u), B_m(\mathbf{p}, u)] = 0, \text{ pour } n, m \geq 1,$$

$$\left[\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} B_n^>(\mathbf{p}, u), \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} B_n^>(\mathbf{p}, v) \right] = 0,$$

où

$$B_n^>(\mathbf{p}, u) := B_n(\mathbf{p}, u) - B_n(\mathbf{p}, 0).$$

Résultats principaux

Conjecture	Integralité	Positivité	Interprétation combinatoire
Sommes marginales de la conjecture Matching-Jack	Chapitre 2		
Conjecture Matching-Jack	Chapitre 3	-	-
Conjecture de Lassalle (Chapitre 4, avec Maciej Dołęga)	Chemins de Łukasiewicz	Cartes en niveaux	

Chapitre 5 : Utiliser l'interprétation combinatoire des caractères de Jack pour obtenir une équation différentielle sur les séries de cartes avec avec contrôle des trois partitions du profil.

Résultats principaux

Conjecture	Integralité	Positivité	Interprétation combinatoire
Sommes marginales de la conjecture Matching-Jack	Chapitre 2		
Conjecture Matching-Jack	Chapitre 3	-	-
Conjecture de Lassalle (Chapitre 4, avec Maciej Dołęga)	Chemins de Łukasiewicz	Cartes en niveaux	

Chapitre 5 : Utiliser l'interprétation combinatoire des caractères de Jack pour obtenir une équation différentielle sur les séries des cartes avec contrôle des trois partitions du profil.

Problèmes ouverts:

- Trouver une statistique de non-orientabilité pour la b -conjecture et la conjecture Matching-Jack.
- Comprendre le lien entre la combinatoire des cartes et celle des chemins de Łukasiewicz.
- Généraliser ces résultats aux polynômes de Macdonald (un premier pas dans cette direction dans un travail avec Michele D'Adderio).