

LES ŒUVRES COMPLÈTES D'ARCHIMÈDE

SUIVIES DES
COMMENTAIRES D'EUTOCIUS D'ASCALON

Traduites du grec en français
avec une introduction et des notes

PAR

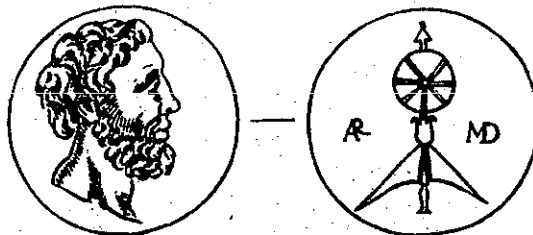
PAUL VER EECKE

INGÉNIEUR DES MINES (A. I. L.G.)
INSPECTEUR GÉNÉRAL HONORAIRE DU TRAVAIL

*Ouvrage honoré de Subventions par le Ministère de l'Instruction Publique
et la Fondation Universitaire de Belgique*

TOME I

Δός μοί ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν.
Donne-moi où je puisse me tenir ferme,
et j'ébranlerai la terre



LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

ALBERT BLANCHARD

9, RUE DE MÉDICIS, PARIS

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

LIVRE I

Archimède à Dosithée, Salut !

Parmi les propositions que je t'ai envoyées précédemment comme ayant été examinées par moi-même, j'avais écrit la suivante, accompagnée de sa démonstration : Tout segment délimité par une droite et par une section de cône rectangle ⁽¹⁾ vaut les quatre tiers du triangle ayant même base que le segment et une hauteur égale. Ayant rencontré depuis lors des théorèmes qui méritent d'être signalés, je me suis occupé de leurs démonstrations. Ce sont les suivants : d'abord, l'aire de toute sphère est quadruple de son plus grand cercle ; ensuite, l'aire de tout segment de sphère vaut le cercle dont le rayon ⁽²⁾ est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment ⁽³⁾ ; en outre, pour toute sphère, le cylindre ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère vaut une fois et demie cette sphère, et son aire vaut une fois et demie celle de cette sphère.

Ces propriétés, d'un caractère primordial dans les figures dont nous venons de parler, ont cependant été ignorées par ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, et aucun d'eux n'avait discerné que

1. ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, littéralement : section de cône rectangle, c.-à-d. une parabole (Voir note au traité *De la Quadrature de la Parabole*).

2. ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, littéralement : la (droite) menée du centre ; périphrase par laquelle Archimède désigne toujours le rayon du cercle.

3. Proposition XXX.

ces figures avaient une commune mesure. Aussi, n'ai-je pas hésité à mettre ces propriétés en parallèle avec celles qui ont été traitées par les autres géomètres, ainsi qu'avec celles, relatives aux figures solides, examinées par Eudoxe, qui paraissent être beaucoup plus importantes; notamment que toute pyramide vaut le tiers du prisme ayant même base que la pyramide et hauteur égale, et que tout cône vaut le tiers du cylindre ayant même base que le cône et hauteur égale. Or, bien que ces propriétés eussent aussi un caractère primordial dans ces figures, il se fait cependant que tous les géomètres qui, avant Eudoxe, furent nombreux et dignes d'être mentionnés, les ont ignorées, et qu'aucun d'eux ne les a discernées. Il sera d'ailleurs loisible d'examiner mes propositions à ceux qui en seront capables. Il eût fallu toutefois qu'elles fussent publiées du vivant de Conon, car j'estime que lui surtout aurait été à même de les comprendre et capable de donner une appréciation à leur sujet. Cependant, estimant qu'il y a avantage à les porter à la connaissance de ceux auxquels les mathématiques sont familières, je t'envoie les démonstrations que j'en ai écrites; il sera loisible de les examiner à ceux qui sont habiles en mathématiques. Sois en bonne santé.

Ecrivons d'abord les axiomes ⁽¹⁾ et les choses que nous admettons en vue des démonstrations de ces propositions :

DEFINITIONS

1. Il y a dans le plan certaines lignes courbes ⁽²⁾ terminées qui sont entièrement situées d'un même côté des droites reliant leurs extrémités, ou dont rien n'est situé de l'autre côté de ces droites.

2. J'appelle concave dans la même direction une ligne telle, qu'ayant pris deux points quelconques sur cette ligne, les droites qui joignent ces points tombent, soit toutes du même côté de la ligne, soit, les unes du même côté, d'autres sur la ligne même, sans que toutefois aucune d'elles ne tombe de l'autre côté ⁽³⁾.

1. Le texte porte ἀξιώματα, axiomes, bien qu'il s'agisse plutôt de définitions.

2. καμπύλαι γραμμαι, littéralement : lignes pliées, recourbées. Il faut entendre ici non seulement les lignes à courbure continue, mais des lignes mixtes composées de lignes droites et courbes, comme cela ressort du texte de la définition suivante.

3. C'est-à-dire que si la ligne est à courbure continue dans la même direction, toutes les droites qui relient deux points quelconques seront situées du côté concave;

3. Pareillement, il y a aussi certaines surfaces terminées, non situées dans un plan, mais ayant leurs extrémités dans ce plan, qui sont entièrement situées du même côté du plan dans lequel leurs extrémités sont placées, ou qui n'ont rien qui soit situé de l'autre côté.

4. J'appelle concaves dans la même direction les surfaces telles, qu'ayant pris deux points, les droites qui joignent ces points tombent toutes du même côté de cette surface, soit les unes du même côté, d'autres dans la surface même ⁽¹⁾, sans qu'aucune d'elles ne tombe de l'autre côté de cette surface.

5. Lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, j'appelle secteur solide la figure délimitée par la surface du cône et par la surface de la sphère qui est intérieure au cône.

6. Lorsque deux cônes ayant même base ont leurs sommets de part et d'autre du plan dans lequel la base est située, de manière que leurs axes soient placés en ligne droite, j'appelle rhombe solide la figure composée de l'un et de l'autre cône.

POSTULATS

J'admets les choses suivantes :

1. La droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités ⁽²⁾.

si la ligne est mixte, composée de parties courbes et de parties droites, certaines droites qui relient deux points pris sur une partie droite se confondront avec cette partie droite, mais aucune droite ne tombera du côté convexe de la ligne courbe.

1. Dans le cas d'une surface réglée.

2. En présentant la notion de la ligne droite parmi ses postulats, se bornant ainsi à admettre une propriété de la ligne droite, ou à énoncer en réalité un théorème susceptible d'une démonstration très délicate, Archimède se séparait nettement de ses prédécesseurs tels que Platon et Euclide qui présentent cette notion comme une définition. Dès lors, il est étonnant que les termes employés par Archimède, ou des termes analogues, notamment que la droite est le plus court chemin d'un point à un autre, aient été reproduits si longtemps dans nos manuels classiques à titre d'axiome ou de définition. Platon avait défini la ligne droite « celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extrêmes ». Euclide nous donne la définition suivante : *εὐθεῖα γραμμὴ ἐστὶν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*, c'est-à-dire : la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. (EUCLIDE, traduction Peyrard, Paris, 1809, in-8°). Une autre traduction du début du XVII^e siècle rend le texte d'Euclide comme suit : « La droite est celle-là laquelle est également étendue entre ses points », c'est-à-dire, commente le traducteur, « en laquelle aucun des points, de tous ceux qui sont posés entre les extrémités, n'est plus eslevé ou abaissé ». (EUCLIDE, traduction LE MARDELÉ, Paris, 1632, in-12). La dernière définition de la droite est celle que H. Poincaré emprunte à la considération du mouvement des corps solides : « la ligne droite est un axe de rotation. »

2. Quant aux autres lignes ⁽¹⁾, lorsque, situées dans un plan, elles ont les mêmes extrémités, elles sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la droite ayant mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune ; et la ligne comprise est la plus petite.

3. Pareillement aussi, lorsque des surfaces ont les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, la surface de ce plan sera la plus petite.

4. Parmi d'autres surfaces ayant mêmes extrémités, lorsque ces extrémités sont situées dans un plan, celles-là sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la surface plane ayant mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune ; et la surface comprise est la plus petite.

5. D'autre part, parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle que celle-ci étant ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières.

Ces choses étant posées, si un polygone est inscrit dans un cercle, il est clair que le périmètre du polygone est plus petit que la circonférence du cercle ; car chacun des côtés du polygone est plus petit que l'arc du cercle qu'il découpe ⁽²⁾.

PROPOSITION I

Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle.

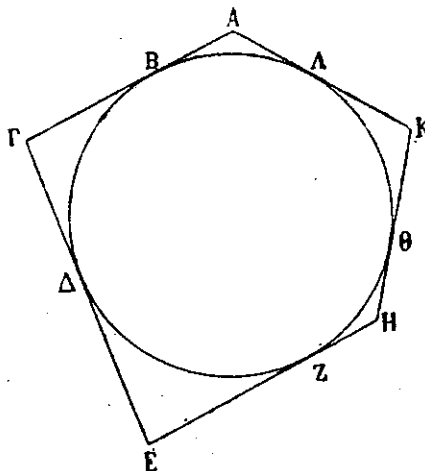
Circonscrivons un polygone au cercle donné ci-dessous ; je dis que le périmètre de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle. En effet, puisque la somme de BA , AA est plus grande que l'arc BA , parce que ces droites comprennent un arc ayant les mêmes extrémités ⁽³⁾, il en est aussi de même pour la somme de $\Delta\Gamma$,

1. C.-à-d. autres que des lignes droites.

2. Postulat 1.

3. Postulat 2.

ΓB , plus grande que l'arc ΔB ; pour la somme de ΔK , $K\Theta$, plus grande que l'arc $\Lambda\Theta$, et pour la somme de ZH , $H\Theta$, plus grande que l'arc $Z\Theta$; enfin pour la somme de ΔE , EZ , plus grande que l'arc ΔZ . Par conséquent, le périmètre entier du polygone est plus grand que la circonférence du cercle.

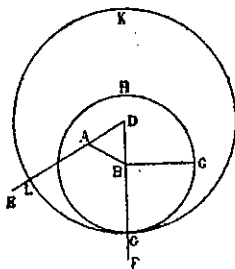
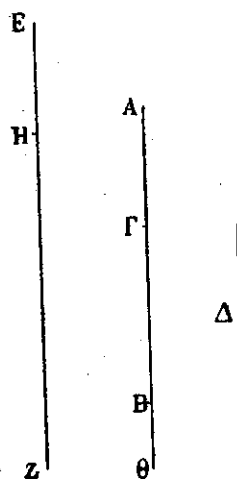


PROPOSITION II

Deux grandeurs inégales étant données, il est possible de trouver deux droites inégales telles que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient AB , Δ deux grandeurs inégales, et soit AB la plus grande. Je dis qu'il est possible de trouver deux droites inégales réalisant la condition que nous venons de dire.

Posons $B\Gamma$ égal à Δ [d'après la seconde proposition du premier livre d'Euclide]⁽¹⁾, et posons une certaine ligne droite ZH . Or, la grandeur ΓA surajoutée à elle-même dépassera la grandeur Δ ⁽²⁾. Multiplions-la donc ; qu'elle soit $A\Theta$, et que ZH soit multiple de HE autant de fois que $A\Theta$ est multiple de $A\Gamma$. Dès lors, ZH est à HE comme ΘA est à ΓA .



2. Postulat 5.

1. Cette proposition est énoncée comme suit par Euclide : « Par un point donné établir une droite égale à une droite donnée ». Il en donne une solution fort longue que l'on peut résumer ainsi : Soit A le point donné, BC la droite donnée. Joignons AB. La 1^{re} proposition d'Euclide permet de construire le triangle équilatéral DAB dont on prolonge les côtés AD, DB. Décrivons la circonférence de centre B et de rayon BC, ainsi que la circonférence de centre D et de rayon DG. Dès lors, on a : $BC = BG$; $DL = DG$. Or, $DA = DB$, d'où $AL = BG$, d'où $AL = BC$. Donc, par A on a mené AL égale à BC donnée.

à $A\Gamma$ ⁽¹⁾, et inversement, $A\Gamma$ est à $A\Theta$ comme EH est à HZ . Et puisque $A\Theta$ est plus grand que Δ , c'est-à-dire plus grand que ΓB , le rapport de ΓA à $A\Theta$ sera plus petit que celui de ΓA à ΓB ⁽²⁾. Mais EH est à HZ comme ΓA est à $A\Theta$; donc le rapport de EH à HZ est plus petit que celui de ΓA à ΓB , et, par composition, le rapport de EZ à ZH est plus petit que celui de AB à $B\Gamma$. Or, $B\Gamma$ est égal à Δ ; par conséquent, le rapport de EZ à ZH est plus petit que celui de AB à Δ ⁽³⁾. Donc, on a trouvé deux droites inégales qui réalisent la condition énoncée, c'est-à-dire que le rapport de la plus grande à la plus petite est moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

PROPOSITION III

Deux grandeurs inégales et un cercle étant donnés, il est possible d'inscrire un polygone dans ce cercle et de lui en circoncrire un autre, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient données les deux grandeurs A , B ⁽⁴⁾, et soit donné le cercle ci-dessous. Je dis qu'il est possible de réaliser ce que nous nous sommes imposé.

En effet, soient trouvées deux droites Θ , $K\Lambda$, dont Θ est la plus grande, de manière que le rapport de Θ à $K\Lambda$ soit plus petit que celui de la plus grande grandeur à la plus petite ⁽⁵⁾. Du point Λ menons ΛM perpendiculaire à ΛK , du point K menons KM égal à Θ , et menons deux diamètres du cercle perpendiculaires l'un sur l'autre ΓE ,

1. EUCLIDE, livre V, prop. 15 : « Les parties ont entre elles même rapport que leurs équi-multiples. » (Voir édition précitée de la traduction de PEYRARD.)

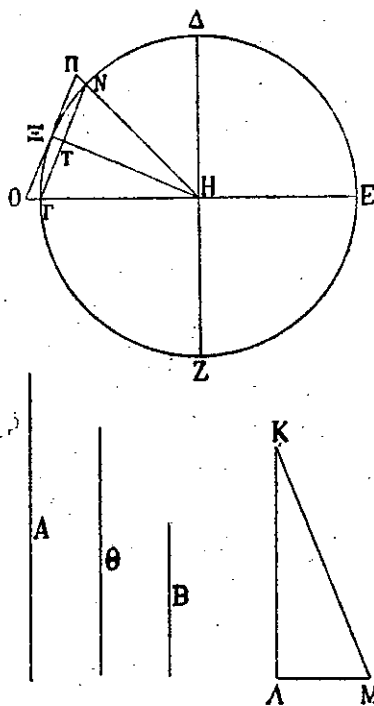
2. EUCLIDE, livre V, prop. 8.

3. On a : $\frac{\Gamma A}{A\Theta} = \frac{EH}{HZ}$. Or, $A\Theta > \Gamma B$, d'où : $\frac{\Gamma A}{A\Theta} < \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, d'où : $\frac{EH}{HZ} < \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$, et (EUCLIDE, livre V, prop. 18) $\frac{EH + HZ}{HZ} < \frac{\Gamma A + \Gamma B}{\Gamma B}$, ou $\frac{EZ}{ZH} < \frac{AB}{\Gamma B}$. Or, $B\Gamma = \Delta$, d'où : $\frac{EZ}{ZH} < \frac{AB}{\Delta}$.

4. Sous-entendu : $A > B$.

5. La relation $\frac{\Theta}{K\Lambda} < \frac{A}{B}$ est possible en vertu de la prop. II.

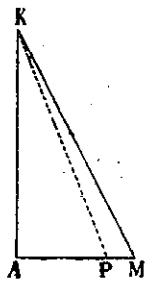
ΔZ . Dès lors, si nous divisons l'angle compris sous ΔH , $H\Gamma$ en deux parties égales, sa moitié en deux parties égales, et, procédant ainsi continuellement, il restera un certain angle plus petit que le double de l'angle compris sous ΔK , KM . Que ce reste obtenu soit l'angle compris sous NH , HT , et menons la droite de jonction NT . La droite NT est donc le côté d'un polygone équilatéral ⁽¹⁾. Que la droite $H\Xi$ coupe l'angle sous ΓH , HN en deux parties égales, que la droite $O\Xi\Pi$ soit tangente au cercle en Ξ , et prolongeons les droites $HN\Pi$, $H\Gamma O$. Ainsi ΠO est également le côté d'un polygone circonscrit au cercle et équilatéral ⁽²⁾. Or, puisque l'angle sous NH , HT est plus petit que le double de l'angle sous ΔK , KM , et que, d'autre part, il est double de l'angle sous TH , HT , l'angle sous TH , HT est donc plus petit que l'angle sous ΔK , KM . De plus, les angles situés aux points Λ , T sont droits ; par conséquent, le rapport de MK à ΔK est plus grand que celui de ΓH à HT ⁽³⁾. Or, ΓH est égal à $H\Xi$, donc le rapport de $H\Xi$ à HT , c'est-à-dire celui de ΠO à NT , est plus petit que le rapport de MK à $K\Lambda$. De plus, le rapport de MK à $K\Lambda$ est plus petit que celui de A à B , et



1. Nous reportons ici en note la traduction d'un texte de 36 mots que nous considérons comme une interpolation : « puisque l'angle NHT mesure l'angle ΔHT qui est droit, l'arc NT mesure donc aussi l'arc $\Gamma\Delta$ qui est le quart du cercle, de manière qu'il mesure le cercle. On a donc le côté d'un polygone équilatéral, car cela est manifeste. »

2. Nous abandonnons ici encore un texte de 10 mots que nous considérons comme une interpolation : « Il est manifeste qu'il sera semblable au polygone inscrit dont le côté est NT . »

3. On est arrivé à un angle restant $NHT < 2 \Delta KM$. Or, angle $NHT = 2$ angles $TH\Gamma$, d'où : angle $TH\Gamma < \text{angle } \Delta KM$. Considérons les triangles $TH\Gamma$, ΔKM ; les angles en T et Λ sont droits. Ils seraient semblables si les angles en K et H étaient égaux. Soit l'angle ΔKP égal à l'angle $TH\Gamma$; les triangles rectangles étant dès lors semblables,



on aura : $\frac{PK}{\Delta K} = \frac{\Gamma H}{HT}$. Or, $PK < MK$, d'où : $\frac{MK}{\Delta K} > \frac{\Gamma H}{HT}$.

ΠO est le côté du polygone circonscrit, tandis que ΓN est celui du polygone inscrit ⁽¹⁾ ; ce que l'on se proposait de trouver.

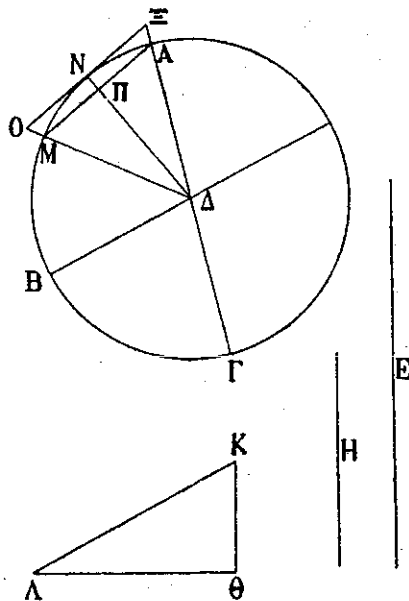
PROPOSITION IV

Soient de nouveau deux grandeurs inégales et un secteur ; il est possible de circonscrire un polygone à ce secteur et de lui en inscrire un autre de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que celui de la plus grande grandeur à la plus petite.

Soient de nouveau E, Z deux grandeurs inégales dont la plus grande est E . Soit, d'autre part, un cercle $AB\Gamma$ dont le centre est le point Δ , et construisons au point Δ le secteur $A\Delta B$. On doit donc circonscrire et inscrire au secteur $A\Delta B$ un polygone ayant les côtés égaux, à l'exception des côtés $B\Delta, \Delta A$, de manière à réaliser ce qui est imposé.

En effet, trouvons deux droites inégales $H, \Theta K$, dont la plus grande soit H , de manière que le rapport de H à ΘK soit plus petit que celui de la plus grande grandeur à la plus petite ⁽²⁾. Du point Θ

menons pareillement ⁽³⁾ une droite perpendiculaire à $K\Theta$ et menons la droite $K\Lambda$ égale à H ⁽⁴⁾. Dès lors, si nous divisons l'angle compris sous $A\Delta, \Delta B$ en deux parties égales, ainsi que sa moitié en deux parties égales, et procédant ainsi continuellement, il restera un certain



1. En observant que $\Gamma H = H\Xi$, la relation $\frac{MK}{\Lambda K} > \frac{\Gamma H}{HT}$ devient : $\frac{HE}{HT} < \frac{MK}{\Lambda K}$. Or, on a pris $MK = \Theta$, et, par hypothèse, on a : $\frac{\Theta}{\Lambda K} < \frac{A}{B}$. Donc $\frac{MK}{\Lambda K} < \frac{A}{B}$, d'où : $\frac{\Pi O}{NT} < \frac{A}{B}$, ce qui est la condition cherchée.

2. La relation $\frac{H}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$ est possible en

vertu de la proposition II.

3. C.-à-d. comme dans la proposition III.

4. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « ce qui est possible, puisque H est plus grand que ΘK .

angle plus petit que le double de l'angle compris sous ΛK , $K\Theta$. Que l'angle restant soit celui qui est compris sous $A\Delta$, ΔM . La droite AM devient donc le côté d'un polygone inscrit dans le cercle. Et si nous divisons l'angle compris sous $A\Delta$, ΔM en deux parties égales par la droite ΔN , et si au point N nous menons la tangente au cercle $N\Xi O$, cette droite sera le côté d'un polygone circonscrit à ce même cercle, semblable à celui dont nous venons de parler. Et, de même que précédemment ⁽¹⁾, le rapport de ΞO à AM sera plus petit que celui de E à Z ⁽²⁾.

PROPOSITION V

Etant donnés un cercle et deux grandeurs inégales, circonscrire un polygone à ce cercle et lui en inscrire un autre de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite.

Etablissons le cercle A ainsi que deux grandeurs inégales E , Z , dont E est la plus grande. On doit donc inscrire un polygone dans le cercle et lui en circonscrire un autre aux fins de réaliser ce qui est imposé.

En effet, je prends deux droites inégales Γ , Δ , dont la plus grande est Γ , de manière que le rapport de Γ à Δ soit moindre que celui de E à Z ⁽³⁾; et, si l'on prend H moyenne proportionnelle entre Γ et Δ , Γ sera donc aussi plus grand que H ⁽⁴⁾. Dès lors, circonscrivons un polygone au cercle et inscrivons-lui-en un autre de

1. Voir proposition III.

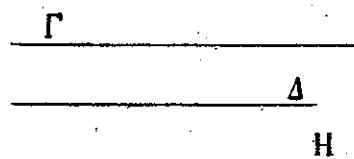
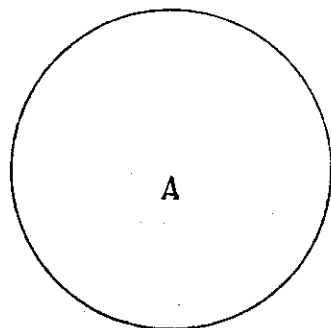
2. L'angle restant $A\Delta M < 2 \angle AK\Theta$. Or, angle $A\Delta M = 2$ angles $M\Delta\Pi$, d'où angle $M\Delta\Pi < \angle AK\Theta$. Considérant les triangles rectangles $M\Delta\Pi$, $\Delta K\Theta$, qui seraient semblables si les angles en Δ et K étaient égaux, ils donneront, comme dans la proposition précédente :

$\frac{\Delta K}{\Theta K} > \frac{M\Delta}{\Pi\Delta}$. Or, $M\Delta = N\Delta$, d'où : $\frac{\Delta K}{\Theta K} > \frac{N\Delta}{\Pi\Delta}$. Or, par similitude de triangles, on a : $\frac{N\Delta}{\Pi\Delta} = \frac{NO}{\Pi M} = \frac{2 NO}{2 \Pi M} = \frac{EO}{AM}$, d'où : $\frac{EO}{AM} < \frac{\Delta K}{\Theta K}$. Or, $\Delta K = H$, et, par hypothèse, $\frac{H}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$, d'où : $\frac{\Delta K}{\Theta K} < \frac{E}{Z}$, d'où : $\frac{EO}{AM} < \frac{E}{Z}$.

3. La relation $\frac{\Gamma}{\Delta} < \frac{E}{Z}$ est possible en vertu de la proposition II.

4. H est pris tel que $\frac{\Gamma}{H} = \frac{H}{\Delta}$, d'où $\Gamma \cdot \Delta = H^2$; or, $\Gamma > \Delta$, d'où $\Gamma^2 > \Gamma \cdot \Delta$; donc $\Gamma^2 > H^2$, d'où $\Gamma > H$.

manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du poly-



Z

gone inscrit soit moindre que le rapport de Γ à H ⁽¹⁾. Il en résulte que le carré du premier rapport est moindre que le carré du second. De plus, le carré du rapport de côté à côté est égal au rapport de polygone à polygone ⁽²⁾, tandis que le carré du rapport de Γ à H est égal au rapport de Γ à Δ ⁽³⁾ ; par conséquent, le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est aussi moindre que le rapport de Γ à Δ . Donc, à fortiori, le rapport du po-

lygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que le rapport de E à Z .

PROPOSITION VI

On démontrera d'ailleurs de la même manière qu'étant donnés deux grandeurs inégales et un secteur, il est possible de circonscrire un polygone au secteur et de lui en inscrire un autre qui lui soit semblable, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite ⁽⁴⁾.

Or, il est clair aussi qu'étant donnés un cercle ou un secteur et une certaine aire, il est possible qu'ayant inscrit des polygones équilatéraux dans le cercle ou dans le secteur, et ainsi continuellement dans les segments restants, il reste dans le cercle ou dans le secteur certains segments qui soient plus petits que l'aire donnée ; car cela

1. La possibilité de cette relation résulte de la proposition III.

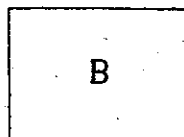
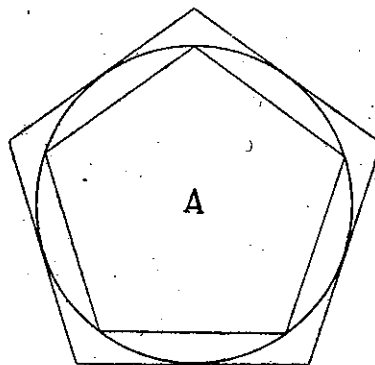
2. EUCLIDE, livre VI, prop. 20. Les polygones réguliers circonscrits et inscrits sont semblables, et leurs aires sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

3. On a : $H^2 = \Gamma \cdot \Delta$, d'où : $\frac{H^2}{\Gamma^2} = \frac{\Gamma \cdot \Delta}{\Gamma^2}$, ou, comme le texte : $\frac{\Gamma^2}{H^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

4. Voir proposition IV.

nous a été transmis dans les *Eléments* ⁽¹⁾. Mais, on doit démontrer qu'étant donnés un cercle ou un secteur et une aire, il est possible de circonscrire un polygone au cercle ou au secteur de manière que les segments restants ⁽²⁾ de la figure circonscrite soient plus petits que l'aire donnée ; car la démonstration relative au cercle sera rapportée au secteur par le même raisonnement.

Soient donnés le cercle A et une certaine aire B. Dès lors, il est possible de circonscrire un polygone au cercle de manière que les segments situés entre le cercle et le polygone soient plus petits que l'aire B. En effet, étant données les deux grandeurs inégales dont la plus grande est l'ensemble de l'aire et du cercle et la plus petite le cercle, circonscrivons un polygone au cercle et inscrivons-lui-en un autre de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit moindre que le rapport de la plus grande grandeur à la plus petite ⁽³⁾. Le polygone circonscrit sera d'ailleurs tel que les segments restants seront plus petits que l'aire donnée B. En effet, si le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B au cercle même, tandis que le cercle est plus grand que le polygone inscrit ⁽⁴⁾, le rapport du polygone circonscrit au cercle est, à fortiori, moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B à ce même cercle. Dès lors, par différence, le rapport des segments du polygone circonscrit au cercle est moindre que le rapport de l'aire B au cercle ; donc, les segments restants du polygone circonscrit seront plus petits que l'aire B ⁽⁵⁾. Ou bien ainsi :



1. En effet, Euclide, au livre XII, prop. 2 de ses *Eléments*, démontre cela préalablement, en invoquant du reste la 1^{re} proposition de son livre X, pour démontrer que les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.

2. C.-à-d. la somme de ces segments restants.

3. Ce qui est possible en vertu de la proposition V.

4. Voir le principe émis à la fin des postulats.

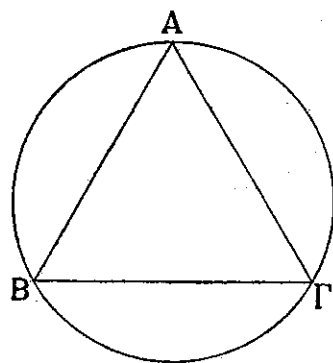
5. $\frac{\text{Polyg. circonscrit}}{\text{Polyg. inscrit}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$; or, cercle A > polyg. inscrit, donc,

puisque le rapport du polygone circonscrit au cercle est moindre que le rapport de l'ensemble du cercle et de l'aire B au cercle, le polygone circonscrit sera dès lors plus petit que cet ensemble ; de manière que la somme des segments restants sera plus petite que l'aire B ⁽¹⁾. Il en sera aussi de même pour ce qui concerne le secteur.

PROPOSITION VII

Si l'on inscrit une pyramide ayant une base équilatérale dans un cône isocèle ⁽²⁾, l'aire de cette pyramide, la base étant exceptée, vaut le triangle ayant la base égale au périmètre de la base et dont la hauteur est la perpendiculaire abaissée du sommet sur un côté de la base.

Soit un cône isocèle dont la base est le cercle ABΓ, et inscrivons-lui la pyramide ayant la base équilatérale ABΓ. Je dis que son aire, exception faite de la base, est équivalente au triangle que nous avons dit.



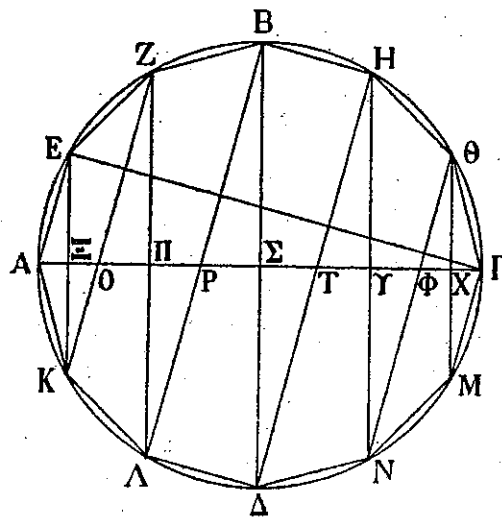
En effet, puisque le cône est isocèle et que la base de la pyramide est équilatérale, les hauteurs des triangles qui enveloppent la pyramide sont égales entre elles ⁽³⁾. Ces triangles ont comme bases les droites AB, BΓ, ΓA et comme hauteur celle que nous venons de dire ; en sorte que la somme de ces triangles ⁽⁴⁾ vaut le triangle ayant

- à fortiori : $\frac{\text{polyg. circonscrit}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$,
d'où : $\frac{\text{polyg. circ.} - \text{cercle A}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B} - \text{cercle A}}{\text{cercle A}}$,
ou $\frac{\sum \text{segments restants}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{aire B}}{\text{cercle A}}$, d'où : somme des segments restants < aire B.
1. C.-à-d. plus simplement : $\frac{\text{polyg. circonscrit}}{\text{cercle A}} < \frac{\text{cercle A} + \text{aire B}}{\text{cercle A}}$, d'où : polygone circonscrit < cercle A + aire B, ou polyg. circ. — cercle A < aire B, ou somme segments restants < aire B.
 2. ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ, dans un cône isocèle, c.-à-d. dans un cône droit à base circulaire.
 3. Les arêtes de cette pyramide régulière sont des obliques qui s'écartent également du pied de la hauteur ; elles sont donc égales, les faces latérales sont donc des triangles isocèles égaux entre eux, ayant même hauteur, qui est l'apothème de la pyramide.
 4. C.-à-d. l'aire latérale de la pyramide.

que le cône OIIP vaut le rhombe $EB\Delta Z$; donc le cône restant $\Theta K\Lambda$ vaudra le fragment restant ⁽¹⁾.

PROPOSITION XXI

Si, dans un cercle, l'on inscrit un polygone d'un nombre pair de côtés et équilatéral, et si l'on mène les droites qui joignent les côtés ⁽²⁾ du polygone de manière qu'elles soient parallèles à l'une quelconque des droites qui sous-tendent deux côtés du polygone, le rapport de l'ensemble de toutes les droites de jonction au diamètre du cercle est le même que le rapport de la droite qui sous-tend la moitié des côtés moins un au côté du polygone.



Soit le cercle $AB\Gamma\Delta$, inscrivons-y le polygone $AEZBH\Theta\Gamma MN\Delta K$, et menons les droites de jonction $EK, Z\Lambda, B\Delta, HN, \Theta M$. Dès lors, il est évident qu'elles sont parallèles à une droite qui sous-tend deux côtés du polygone ⁽³⁾. Je dis donc que le rapport de l'ensemble de toutes les droites en question au diamètre $A\Gamma$ est le même que celui de la droite ΓE à la droite EA .

1. Toute la démonstration se déroule comme suit : Par hypothèse : base cône MNE = surf. cône $AB\Gamma$. Or, surf. cône $AB\Gamma$ = surf. cône EBZ + surf. $EATZ$, d'où : base cône MNE = surf. cône EBZ + surface $EATZ$. Or, par hypothèse : surf. cône EBZ = base cône OIIP, et surface $EATZ$ = base cône $\Theta K\Lambda$, d'où : base cône MNE = base cône OIIP + base cône $\Theta K\Lambda$. Mais ces trois cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, d'où : cône MNE = cône $\Theta K\Lambda$ + cône OIIP. Or, observant que base cône MNE = surf. cône $AB\Gamma$ et que ΔH = hauteur cône MNE , tandis que base cône OIIP = surf. cône EBZ et que ΔH = hauteur cône OIIP, la proposition XVIII donne : cône MNE = rhombe $AB\Gamma\Delta$ et cône OIIP = rhombe $EBZ\Delta$. Substituons dans la relation entre les cônes auxiliaires qui précède, il vient :

rhombe $AB\Gamma\Delta$ = cône $\Theta K\Lambda$ + rhombe $EBZ\Delta$. Retranchons le rhombe $EBZ\Delta$ de part et d'autre, il vient, comme le texte : cône $\Theta K\Lambda$ = fragment $EATZ$.

2. Le texte porte $\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma$, côtés, au lieu du mot $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma$, angles, qui eût été plus exact.

3. Car les angles inscrits $ZAB, \Lambda BA$, etc. qui ont pour mesure la moitié d'arcs égaux $ZB, \Lambda A$, etc., sont égaux et, dès lors, les droites $Z\Lambda, B\Delta$, etc., sont parallèles.

En effet, menons les droites de jonction ZK , ΛB , $H\Lambda$, ΘN . Dès lors, ZK est parallèle à EA , $B\Lambda$ parallèle à ZK et, de plus, ΔH est parallèle à $B\Lambda$, ΘN parallèle à ΔH et ΓM parallèle à ΘN ⁽¹⁾ ; par conséquent, $K\Xi$ est à ΞO comme $E\Xi$ est à ΞA . Or, $Z\Pi$ est à ΠO comme $K\Xi$ est à ΞO , $\Lambda\Pi$ est à ΠP comme $Z\Pi$ est à ΠO , et $B\Sigma$ est à ΣP comme ΛP est à ΠP ; ensuite $\Delta\Sigma$ est à ΣT comme $B\Sigma$ est à ΣP , tandis que $H\Upsilon$ est à ΥT comme $\Delta\Sigma$ est à ΣT ; ensuite $N\Upsilon$ est à $\Upsilon\Phi$ comme $H\Upsilon$ est à ΥT , tandis que ΘX est à $X\Phi$ comme $N\Upsilon$ est à $\Upsilon\Phi$; enfin MX est à $X\Gamma$ comme ΘX est à $X\Phi$ ⁽²⁾. En conséquence, la somme de EK , $Z\Lambda$, $B\Delta$, $H\Lambda$, ΘM est au diamètre $A\Gamma$ comme $E\Xi$ est à ΞA . Or, ΓE est à EA comme $E\Xi$ est à ΞA ; donc la somme de EK , $Z\Lambda$, $B\Delta$, $H\Lambda$, ΘM est au diamètre $A\Gamma$ comme ΓE est à EA ⁽³⁾.

PROPOSITION XXII

Si, dans un segment de cercle, l'on inscrit un polygone ayant, la base exceptée, des côtés égaux et en nombre pair, et si l'on mène les parallèles à la base qui joignent les côtés ⁽⁴⁾ du polygone, le rapport de l'ensemble des droites menées, augmenté de la moitié de la base, à la hauteur du segment est le même que celui de la droite de jonction, menée du diamètre du cercle à un côté du polygone, au côté du polygone ⁽⁵⁾.

1. Le texte présente ici l'interpolation suivante : « et puisque EA , KZ sont deux parallèles, et que l'on a mené les deux droites EK , AO . »

2. Une autre interpolation dit ici : « et toutes sont donc à toutes dans le rapport d'une à une. »

3. Tous les angles inscrits dans le cercle étant mesurés par des arcs égaux sont égaux ; on a donc une série de triangles semblables qui donnent :

$$\frac{E\Xi}{EA} = \frac{K\Xi}{EO} = \frac{Z\Pi}{\Pi O} = \frac{\Lambda\Pi}{\Pi P} = \frac{B\Sigma}{\Sigma P} = \frac{\Delta\Sigma}{\Sigma T} = \frac{H\Upsilon}{\Upsilon T} = \frac{N\Upsilon}{\Upsilon\Phi} = \frac{\Theta X}{X\Phi} = \frac{MX}{X\Gamma}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{E\Xi}{EA} = \frac{E\Xi + K\Xi + Z\Pi + \Lambda\Pi + \text{etc.}}{EA + EO + \Pi O + \Pi P + \text{etc.}} = \frac{EK + Z\Lambda + B\Delta + H\Lambda + \Theta M}{A\Gamma}. \text{ Or, dans les triangles}$$

rectangles $E\Xi A$, $\Gamma E A$, les angles en E et en Γ sont égaux comme inscrits et mesurés par des arcs égaux ; ces triangles sont donc semblables, d'où : $\frac{E\Xi}{EA} = \frac{\Gamma E}{EA}$, d'où, comme

$$\text{le texte : } \frac{EK + Z\Lambda + B\Delta + H\Lambda + \Theta M}{A\Gamma} = \frac{\Gamma E}{EA}.$$

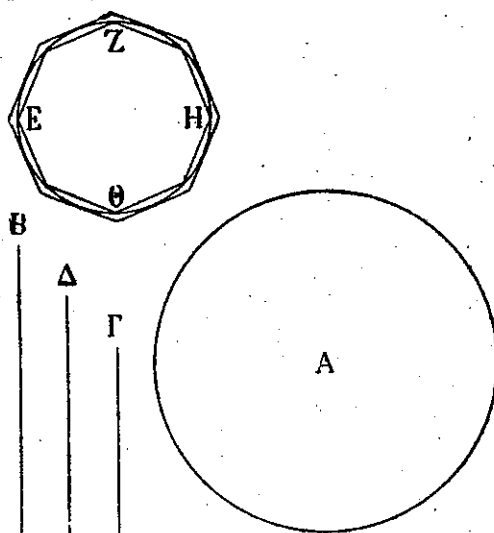
4. De même que dans la proposition précédente (voir note 2, page 45), le texte porte improprement le mot « côtés » au lieu « d'angles ».

5. La fin de cet énoncé manque de précision, à la suite, peut-être, de quelque altération du texte original. Il s'agit, en effet, de la droite qui relie l'extrémité du diamètre du cercle à l'extrémité du côté du polygone inscrit dans le segment.

PROPOSITION XXXIII

L'aire de toute sphère est quadruple du plus grand de ses cercles.

En effet, soit une sphère, et soit A un cercle quadruple du plus grand cercle. Je dis que le cercle A équivaut à l'aire de la sphère. Car, sinon, il est plus grand ou plus petit que cette aire. Que l'aire de la sphère soit d'abord plus grande que le cercle. Dès lors, on a deux grandeurs inégales, l'aire de la sphère et le cercle A. Il est donc possible de prendre deux droites inégales, de manière que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que le rapport de l'aire de la sphère au cercle ⁽¹⁾. Prenons les droites B, Γ , et soit Δ la moyenne proportionnelle entre B et Γ . Imaginons encore que la sphère soit coupée par un plan passant par son centre, suivant le cercle EZH Θ , tandis que nous imaginons aussi un polygone inscrit et un polygone circonscrit à ce cercle, de manière que le polygone circonscrit soit semblable au polygone inscrit, et que le rapport du côté du polygone circonscrit ⁽²⁾ soit moindre que le rapport de B à Δ ⁽³⁾. Le carré du premier rapport sera donc aussi moindre que le carré du second, et le carré du rapport de B à Δ est le rapport de B à Γ , tandis que le rapport de l'aire du solide circonscrit à l'aire du solide inscrit est le carré du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit ⁽⁴⁾. Par conséquent, le rapport



1. Voir proposition II.

2. Le texte est incomplet, mais il est évident qu'un copiste aura négligé les mots πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, c.-à-d. au (côté) du (polygone) inscrit.

3. Voir proposition III.

4. Il y a lieu de douter de l'authenticité du texte de toute la phrase à partir de celle qui fait l'objet de la note précédente. Ce n'est peut-être qu'un commentaire interpolé; car, outre sa forme grammaticale négligée, il emploie le mot στερεός, solide, au lieu du mot σχῆματος, figure, qui est employé par Archimède dans tout le cours de cette démonstration.

de l'aire de la figure circonscrite à la sphère à l'aire de la figure inscrite est moindre que le rapport de l'aire de la sphère au cercle A ; ce qui est impossible. En effet, l'aire de la figure circonscrite est plus grande que l'aire de la sphère, tandis que l'aire de la figure inscrite est plus petite que le cercle A ; car il a été démontré que l'aire du polygone inscrit est plus petite que le quadruple du plus grand cercle de la sphère, et le cercle A est le quadruple de ce plus grand cercle. Par conséquent, l'aire de la sphère n'est pas plus grande que le cercle A ⁽¹⁾.

Je dis, d'autre part, qu'elle n'est pas plus petite. En effet, qu'elle soit plus petite, s'il se peut. Trouvons pareillement des droites B, Γ, telles que le rapport B à Γ soit moindre que le rapport du cercle A à l'aire de la sphère ⁽²⁾, et une droite Δ qui soit la moyenne proportionnelle entre B et Γ. Inscrivons et circonscrivons de nouveau des polygones, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit ⁽³⁾ soit moindre que le rapport de B à Δ ⁽⁴⁾. Par conséquent, le rapport de l'aire de la figure circonscrite à l'aire de celle qui est inscrite est moindre que le rapport ⁽⁵⁾ du cercle A à l'aire de la sphère ; ce qui est absurde. En effet, l'aire de la figure circonscrite est plus grande que le cercle A, tandis que l'aire de la figure inscrite est plus petite

1. La 1^{re} partie de la démonstration se déroule comme suit : La relation $\frac{\text{côté polyg. circonscrit}}{\text{côté polyg. inscrit}} < \frac{B}{\Delta}$ est possible en vertu de la proposition III, d'où : $\frac{(\text{côté polyg. circonscrit})^2}{(\text{côté polyg. inscrit})^2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$. Or, on a posé : $\Delta^2 = B \times \Gamma$, d'où : $\frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma}$, et la proposition XXXII donne : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} = \frac{(\text{côté polyg. circonscr.})^2}{(\text{côté polyg. inscr.})^2}$, d'où, par substitution : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} < \frac{B}{\Gamma}$. Or, par hypothèse : $\frac{B}{\Gamma} < \frac{\text{aire sphère}}{\text{cercle A}}$, d'où : $\frac{\text{aire polyg. circonscr.}}{\text{aire polyg. inscr.}} < \frac{\text{aire sphère}}{\text{cercle A}}$, relation impossible, vu que (prop. XXVIII), $\text{aire polyg. circonscr.} > \text{aire sphère}$, que (proposition XXV) : $\text{aire polyg. inscrit} < 4 \text{ grands cercles}$ et que, par hypothèse, $\text{cercle A} = 4 \text{ grands cercles}$.

2. Voir proposition II.

3. De même que plus haut, les mots : « au côté du polygone inscrit » manquent ici dans le texte grec.

4. Voir proposition III. Une interpolation ajoute ici : $\kappa\alpha\iota \tau\alpha \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\alpha \acute{\alpha}\rho\alpha$, c.-à-d. « donc les carrés aussi », ce qui veut dire que le carré du premier rapport est aussi moindre que le carré du second rapport.

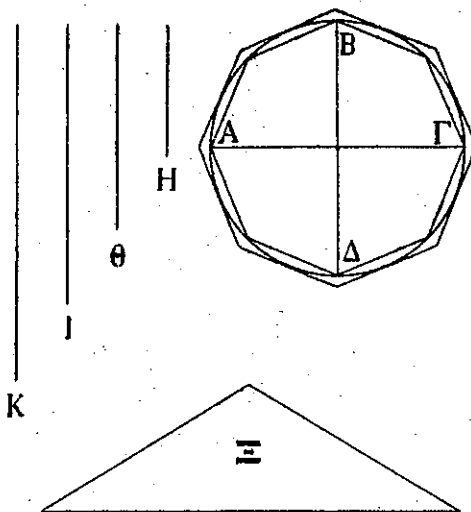
5. A la différence des éditions anciennes, le texte critique d'Heiberg présente cette petite interpolation relevée dans le palimpseste de Jérusalem : « ... de B à Γ, tandis que le rapport de B à Γ est moindre que celui de... ». Elle est due à un commentateur qui a voulu attirer l'attention sur une relation intermédiaire. (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 125).

que l'aire de la sphère ⁽¹⁾. En conséquence, l'aire de la sphère n'est pas plus petite que le cercle A. Or, on a démontré qu'elle n'est pas plus grande ; donc l'aire de la sphère équivaut au cercle A, c'est-à-dire au quadruple du plus grand cercle.

PROPOSITION XXXIV

Toute sphère est quadruple du cône ayant le plus grand cercle de la sphère comme base et le rayon de la sphère comme hauteur.

En effet, soit une sphère et, dans celle-ci, le plus grand cercle ABΓΔ. Si cette sphère n'est pas le quadruple du cône que nous avons dit, qu'elle soit plus grande que le quadruple, s'il se peut. Soit un cône Ξ ayant la base quadruple du cercle ABΓΔ et la hauteur égale au rayon de la sphère ; la sphère est donc plus grande que le cône Ξ ⁽²⁾. Dès lors, on aura deux grandeurs inégales, une sphère et un cône ; il est donc possible de prendre deux droites inégales de manière que le rapport de la plus grande à la plus petite soit moindre que celui de la sphère au cône ⁽³⁾. Soient donc les droites K, H, et prenons des droites I, Θ, de manière que K dépasse I, que I dépasse Θ et que Θ dépasse H d'une même grandeur ⁽⁴⁾. De plus, imaginons un polygone inscrit dans le cercle ABΓΔ,



1. Plus explicitement, on arrive, comme dans la note relative à la première partie de la démonstration, à la relation : $\frac{\text{aire polygone circonscrit}}{\text{aire polygone inscrit}} < \frac{\text{cercle A}}{\text{aire sphère}}$ dont l'impossibilité résulte de ce que (proposition XXIII) : aire polygone inscrit < aire sphère, et (proposition XXX) : aire polygone circonscrit > 4 grands cercles. Or, cercle A = 4 grands cercles, d'où : aire polygone circonscrit > cercle A.

2. Le cône Ξ de base équivalente à 4 grands cercles ABΓΔ et de hauteur égale à celle du cône de base cercle ABΓΔ vaudra 4 cônes de base ABΓΔ. Or, par hypothèse première : sphère > 4 cônes de base ABΓΔ, d'où : sphère > cône Ξ.

3. Voir proposition II.

4. Les droites I, Θ, moyennes arithmétiques entre les droites K, H s'obtiendront

dont le nombre de côtés soit divisible par quatre, et un autre polygone circonscrit, semblable à celui qui est inscrit, comme dans les propositions précédentes. Que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit moindre que celui de K à I ⁽¹⁾, et soient AF , $B\Delta$ des diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre. Dès lors, si le diamètre AF restant fixe, l'on fait tourner le plan dans lequel se trouvent les polygones, on aura, d'une part, une figure inscrite dans la sphère, d'autre part, une figure circonscrite, et le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera égal au cube du rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit dans le cercle $AB\Gamma\Delta$ ⁽²⁾. Or, le rapport de côté à côté est moindre que celui de K à I ⁽³⁾; de manière que le rapport de la figure circonscrite ⁽⁴⁾ est moindre que le cube du rapport de K à I . Or, le rapport de K à H est aussi plus grand que le cube du rapport de K à I ⁽⁵⁾, [car cela

en divisant en trois parties égales la différence entre les droites K et H . Dès lors on aura : $I = H + \frac{2}{3}(K - H) = \frac{1}{3}(H + 2K)$, et $\Theta = H + \frac{1}{3}(K - H) = \frac{2}{3}(K + H)$.

1. Voir proposition III.

2. Voir proposition XXXII.

3. Par hypothèse permise en vertu de la proposition III.

4. Le texte omet de nouveau les mots nécessaires : « à la figure inscrite ».

5. La relation intermédiaire $\frac{K}{H} > \frac{K^3}{I^3}$, invoquée par Archimède, est longuement démontrée par Eutocius dans son commentaire sur cette proposition XXXIV. Cette démonstration peut se résumer comme suit en notations usuelles : Soient K , I , Θ , H des droites en progression arithmétique ; soit, en outre, une droite M telle que $\frac{K}{I} = \frac{I}{M}$, d'où : $\frac{K - I}{K} = \frac{I - M}{I}$. Or, $K > I$, d'où : $K - I > I - M$. Mais, par hypothèse : $K - I = I - \Theta$, d'où : $I - \Theta > I - M$, ou $M > \Theta$. D'autre part, soit une droite N , telle que $\frac{I}{M} = \frac{M}{N}$, d'où : $\frac{I - M}{I} = \frac{M - N}{M}$. Or, $I > M$, d'où : $I - M > M - N$. Mais on vient de voir que $I - \Theta > I - M$, d'où, à fortiori : $I - \Theta > M - N$. Or, par hypothèse : $I - \Theta = \Theta - H$, d'où : $\Theta - H > M - N$. Or, on vient de voir que $M > \Theta$, donc $N > H$. Mais M , N ont été pris tels que K , I , M , N sont en proportion continue. Et dès lors, on a : $\frac{K^3}{I^3} = \frac{K}{N}$. Or, $N > H$, d'où : $\frac{K^3}{I^3} < \frac{K}{H}$. C. q. f. d.

En invoquant subsidiairement la relation $\frac{K^3}{I^3} = \frac{K}{N}$, Eutocius s'appuie sur la définition 10 du livre V d'Euclide, que nous traduisons littéralement comme suit : « Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la troisième est dit le carré du rapport de la première à la seconde, et lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la quatrième est dit le cube du rapport de la première à la seconde, et ainsi de suite, dans l'ordre d'une unité de plus, tant que se poursuit la proportion ». Algébriquement on a immédiatement : Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, on a $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$, mais $b^2 = a.c$, d'où $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c}$. Et si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$,

est évident d'après les lemmes] ⁽¹⁾ ; par conséquent, à fortiori, le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que celui de K à H. Or, le rapport de K à H est moindre que celui de la sphère au cône Ξ ⁽²⁾, et, par permutation ⁽³⁾ ; ce qui est impossible, car la figure circonscrite est plus grande que la sphère ⁽⁴⁾, tandis que la figure inscrite est plus petite que le cône Ξ , parce que le cône Ξ est quadruple du cône ayant la base égale au cercle $AB\Gamma\Delta$ et la hauteur égale au rayon de la sphère, et que, d'autre part, la figure inscrite est plus petite que le quadruple du cône que nous venons de dire ⁽⁵⁾. Dès lors, la sphère n'est pas plus grande que le quadruple du cône que nous avons dit.

Qu'elle soit maintenant plus petite que le quadruple, s'il se peut. La sphère est ainsi plus petite que le cône Ξ ⁽⁶⁾. Dès lors, prenons des droites K, H telles que K soit plus grande que H et que son rapport avec elle soit moindre que celui du cône Ξ à la sphère ⁽⁷⁾. En outre, posons les droites Θ , I, comme précédemment ⁽⁸⁾, et imaginons un polygone inscrit dans le cercle $AB\Gamma\Delta$ ainsi qu'un autre circonscrit, en sorte que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du

on a $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3}$, mais $b^2 = a.c$ et $c^2 = b.d$, d'où $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b.a.c}{c.b.d} = \frac{a}{d}$. On peut d'ailleurs démontrer directement la relation invoquée par le texte comme suit :

Si les droites K, I, H, Θ sont en progression arithmétique décroissante, on a $K = I + d = \Theta + 2d = H + 3d$, d'où $K = H + 3d$ et $I = H + 2d$. Or, on peut écrire : $\frac{K}{H} = \frac{K^3}{H.K^2} = \frac{K^3}{H.(H+3d)^2}$. Mais, $I^3 = (H+2d)^3 > H.(H+3d)^2$, d'où $\frac{K}{H} > \frac{K^3}{I^3}$. C. q. f. d.

1. La phrase placée entre crochets a probablement été interpolée.

2. Par hypothèse première, en vertu de la proposition II.

3. Les mots $\kappa\alpha\iota\ \epsilon\upsilon\chi\lambda\lambda\alpha\zeta\epsilon\iota$, « par permutation » doivent être précédés et suivis de quelque phrase perdue par les copistes. Heiberg (Cfr. *loc. cit.*, vol. I, p. 129) a relevé dans le manuscrit de la version latine, du XIII^e siècle, de Guillaume de Moerbeke, une phrase qui précède les mots en question, et dont voici la traduction : « donc le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est moindre que celui de la sphère au cône. » D'autre part, Heiberg (*ibidem*) a proposé de restituer le texte suivant à la suite des mots en question : « ...le rapport de la figure circonscrite à la sphère est moindre que celui de la figure inscrite au cône. »

La phrase reconstituée se présenterait donc ainsi en notations usuelles : On a eu : $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{fig. inscrite}} < \frac{K}{H}$; or, $\frac{K}{H} < \frac{\text{sphère}}{\text{cône } \Xi}$, d'où $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{fig. inscrite}} < \frac{\text{sphère}}{\text{cône } \Xi}$ et, par permutation : $\frac{\text{fig. circonscrite}}{\text{sphère}} < \frac{\text{fig. inscrite}}{\text{cône } \Xi}$, ce qui est impossible.

4. Voir prop. XXVIII.

5. Voir prop. XXVII.

6. Voir première partie de la démonstration, pag. 65, note 2.

7. Voir proposition II.

8. C.-à-d. que Θ , I soient moyennes proportionnelles entre K et H.

polygone inscrit soit moindre que le rapport de K à I ⁽¹⁾ ; le reste étant établi de la même manière que précédemment. Dès lors, le rapport de la figure solide circonscrite à celle qui est inscrite sera encore le cube du rapport du côté de la figure circonscrite au cercle $AB\Gamma\Delta$ au côté de la figure qui lui est inscrite ⁽²⁾. Or, ce rapport de côté à côté est moindre que celui de K à I ; par conséquent, le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera moindre que le cube du rapport de K à I . Or, le rapport de K à H est plus grand que le cube du rapport de K à I ⁽³⁾ ; en sorte que le rapport de la figure circonscrite à celle qui est inscrite est moindre que le rapport de K à H . Or, le rapport de K à H est moindre que celui du cône Ξ à la sphère ⁽⁴⁾ ; ce qui est impossible, car, d'une part, la figure inscrite est plus petite que la sphère ⁽⁵⁾ et, d'autre part, la figure circonscrite est plus grande que le cône Ξ ⁽⁶⁾. En conséquence, la sphère n'est pas davantage plus petite que le quadruple du cône ayant une base égale au cercle $AB\Gamma\Delta$ et une hauteur égale au rayon de la sphère. Or, on a démontré qu'elle n'est pas plus grande ; elle est donc quadruple de ce cône.

COROLLAIRE

Les choses qui précèdent étant démontrées, il est clair que tout cylindre, ayant comme base le grand cercle d'une sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère, vaut une fois et demie cette sphère, et que son aire, les bases comprises, vaut une fois et demie l'aire de cette sphère.

En effet, le cylindre que nous venons de définir est sextuple du cône ayant même base que lui et une hauteur égale au rayon ⁽⁷⁾, tandis qu'il a été démontré que la sphère est le quadruple de ce même

1. Voir proposition III.

2. Voir proposition XXXII.

3. Voir la note qui précède au sujet de cette relation.

4. Par hypothèse. De même que dans la première partie de la démonstration, il doit y avoir quelque lacune, et il faut s'en rapporter à la restauration du texte qui a été proposée dans une note précédente.

5. Voir proposition XXVIII.

6. Voir proposition XXXI, corollaire.

7. Le cylindre vaut trois fois le cône de même base et de même hauteur (EUCLIDE, livre XII, prop. 10) ; donc le cylindre circonscrit à la sphère vaut 6 fois le cône de même base et d'une hauteur moindre de moitié, c'est-à-dire d'une hauteur égale au rayon.

cône ⁽¹⁾. Dès lors, il est évident que le cylindre vaut une fois et demie la sphère. D'un autre côté, puisqu'il a été démontré que l'aire d'un cylindre, si l'on excepte les bases, est équivalente au cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base ⁽²⁾, que le côté du cylindre que nous avons dit envelopper la sphère est égal au diamètre de sa base ⁽³⁾, et que le cercle ayant pour rayon le diamètre de la base vaut le quadruple de cette base, c'est-à-dire du plus grand cercle de la sphère ⁽⁴⁾, il en résulte que l'aire du cylindre, exception faite de ses bases, sera aussi le quadruple de ce plus grand cercle. En conséquence, l'aire totale du cylindre, les bases comprises, sera le sextuple du plus grand cercle. Or, l'aire de la sphère est aussi le quadruple du plus grand cercle ⁽⁵⁾, par conséquent l'aire totale du cylindre vaut une fois et demie l'aire de la sphère ⁽⁶⁾.

PROPOSITION XXXV

L'aire d'une figure inscrite dans un segment de la sphère équivaut au cercle dont le carré du rayon équivaut au rectangle délimité par un côté du polygone inscrit dans le segment du plus grand cercle et par une droite égale à l'ensemble des parallèles à la base augmenté de la moitié de la base du segment ⁽⁷⁾.

1. Voir proposition XXXIV.

2. Voir proposition XIII.

3. Le texte présente ici un petit commentaire interpolé : « il est évident que leur moyenne proportionnelle se trouve être égale au diamètre de la base ».

4. EUCLIDE, livre XII, prop. 2 : « Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres. »

5. Voir proposition XXXIII.

6. On verra plus loin, au traité *De la Méthode mécanique*, comment Archimède conçut d'abord l'équivalence des aires du cylindre et de la sphère inscrite par la considération mécanique du levier. C'est à la suite des belles propositions de géométrie pure, par lesquelles il établit cette équivalence d'une manière plus rigoureuse, qu'il exprima le désir d'avoir le symbole de la sphère inscrite au cylindre gravé sur son tombeau. C'est sans doute ce premier exemple d'une épitaphe géométrique qui inspira Jacques Bernouilli lorsque, à la suite de sa découverte des propriétés de la spirale logarithmique, qui est elle-même sa développée, sa caustique, son antidéveloppée et sa péricautique, il voulut aussi que cette courbe ornât son tombeau avec la devise : « *Eadem mutata resurgo* », c'est-à-dire : « transformée, je repars identique à moi-même. »

7. L'énoncé de cette proposition est muet sur la génération du solide inscrit dans le segment sphérique dont il est cependant question pour la première fois. L'énoncé de la proposition suivante étant plus explicite à ce sujet, il est possible que l'ordre de ces deux propositions ait été interverti dans les manuscrits, et que