Vollständige Anleitung zur Algebra

von

Hrn. Leonhard Euler.

Zweyter Theil.

Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytik.

St. Petersburg, 1802.
Gedruckt bey der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Des
Zweyten Theils
erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Capitel I.

Von Auflösung der Aufgaben überhaupt.

1.

Die Hauptabsicht der Algebra so wie alle Theile der Mathematik ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekannt gewesen, bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Dahero die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde, wie man aus bekannten Größen, unbekannte ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem denjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekannten Größen andere herausgebracht worden sind, so vorher als unbekannt angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man sogleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summa gefunden worden. Daselbst wurde nemlich eine Zahl gesucht, welche den gegebenen zusammen genommen, gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche den Unterschied zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher unbekannte Zahl aus bekannten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitte haben wir schon verschiedene Fragen aufgelöst, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewissen Bedingungen geschloßen werden mußte.

Alle Fragen laufen also darauf hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewissen Verbindung stehe, und diese Verbindung

wird

wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müssen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der letztern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwägung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelöset wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche Weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden; man stelle sich die Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage, wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekannt an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ ist, und Männer und Weiber zusammen 20 Personen ausmachen, so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird, wann man die Anzahl der Männer von 20 subtrahirt. Also wäre die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gr.

Und weil ein Weib 7 Gr. verzehrt, so werden diese $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gr.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gr. Wir wissen aber, wie viel sie verzehrt haben, nemlich 6 Rthlr. welche zu Gr. gemacht 144 Gr. sind, dahero erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

Dahero waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

7.

Eine andere Frage von gleicher Art:
20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müssen, wie viel waren es Männer und Weiber?

Es sey die Zahl der Männer $= x$, so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24}{20-x}$. Die Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes herauskommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht herausgebracht werden kann, wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen

daß

daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekannten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwägung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die ganze Kunst darinn, wie solche Gleichungen aufgelöset, und daraus der Werth der unbekannten Zahlen gefunden werden soll; und hievon soll in diesem Abschnitte gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterschied, indem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztern Falle zu bemercken ist, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfordert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müssen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahl

herauszubringen, müssen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen sich einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wann man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt: imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden: ferner auch, wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wann von beyden die Logarithmen genommen werden, wie bereits im vorigen Abschnitte geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nachdem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten Grade genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinnen die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekannten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen oder Gleichungen vom zweyten Grade genannt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grade

oder die Cubischen, worinnen der Cubus der unbekannten Zahl vorkommt, und so fort; von welchem allen in diesem Abschnitte gehandelt werden soll.

Capitel 2.
Von den Gleichungen des ersten Grads und ihrer Auflösung.

11.

Wann die unbekannte oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die herausgebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz bloß allein das x, und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, als z. E. $x=25$, so hat man schon wirklich den Werth von x der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwirrt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, wozu die Regeln im folgenden gegeben werden sollen.

12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen und erstlich setzen, man sey auf diese Gleichung gekommen: $x+9=16$, so sieht man daß $x=7$.

Es sey aber auf eine allgemeine Art $x+a=b$, wo a und b bekannte Zahlen andeuten, dieselben mögen heissen wie sie wollen. Hier muß man also beiderseits a subtrahiren und da bekommt man diese Gleichung $x=b-a$, welche uns den Werth von x anzeigt.

13.

Wann diese gefundene Gleichung $x-a=b$ ist, so addire man beiderseits a, so kommt $x=a+b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wann die erste Gleichung also beschaffen ist $x-a=aa+1$, dann da wird $x=aa+a+1$.

Also aus dieser Gleichung $x-8a=20-6a$ bekommt man $x=20-6a+8a$ oder $x=20+2a$. Und aus dieser $x+6a=20+3a$ findet man $x=20+3a-6a$ oder $x=20-3a$.

14.

Ist nun die Gleichung also beschaffen $x-a+b=c$, so kann man beiderseits a addiren, so kommt $x+b=c+a$, jetzt subtrahire man beiderseits b, so hat man $x=c+a-b$; man kann aber zugleich beiderseits $+a-b$ addiren,

so

so bekommt man mit einmahl $x = c + a - b$. Also in den folgenden Exempeln:

wann $x - 2a + 3b = 0$, so wird $x = 2a - 3b$,

wann $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, so wird $x = 25 + 4a$.

wann $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, so wird $x = 34 - 4a$.

15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt: $ax = b$, so dividire man beiderseits durch a, so hat man $x = \frac{b}{a}$. Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige was bey ax steht, wegbringen; man addire beiderseits $-b+c$ so kommt $ax = d - b + c$: folglich $x = \frac{d-b+c}{a}$; oder man subtrahire beiderseits $+b-c$ so kommt $ax = d - b + c$ und $x = \frac{d-b+c}{a}$.

Es sey $2x + 5 = 17$, so kommt $2x = 12$ und $x = 6$.
Es sey $3x - 8 = 7$, so kommt $3x = 15$ und $x = 5$.
Es sey $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, so wird $4x = 20 + 12a$, folglich $x = 5 + 3a$.

16.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{x}{a} = b$, so multiplicire man beiderseits mit a, so kommt $x = ab$.

Ist

Ist nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, so wird erstlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und $x = (d - b + c)\,a = ad - ab + ac$.
Es sey $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, so wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.
Es sey $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$, so wird $\frac{1}{3}x = 4 - a$ und $x = 12 - 3a$.
Es sey $\frac{x}{a-1} - 1 = a$, so wird $\frac{x}{a-1} = a + 1$ und $x = aa - 1$.

17.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{ax}{b} = c$, so multiplicire man beiderseits mit b, so wird $ax = bc$, und ferner $x = \frac{bc}{a}$.

Ist aber $\frac{ax}{b} - c = d$, so wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$ und folglich $x = \frac{bd + bc}{a}$.

Es sey $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, so wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$, folglich $x = \frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$.

Es sey $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, also $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}$ welches $= \frac{9}{2}$ und $3x = 18$ und $x = 6$.

18.

Es kann auch geschehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einen Satz oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite als $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, so wird $x + \frac{1}{2}x = 6$ und $3x = 12$ und $x = 4$.

Es

Es sey $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, was ist x? Man multiplicire mit 3 so wird $4x + \frac{3}{2}x = 132$, ferner mit 2 multiplicirt wird $11x = 264$ und $x = 24$; diese drey Glieder können aber sogleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x = 44$, man theile beiderseits durch 11, so hat man $\frac{1}{2}x = 4$ und $x = 24$.

Es sey $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$, welches zusammengezogen giebt $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$.

Es sey $ax - bx + cx = d$, so ist dieses eben so viel als $(a - b + c)\,x = d$, hieraus kommt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

19.

Steht aber x in beyden Sätzen als z. E. $3x + 2 = x + 10$ so müssen die x von der Seite wo man am wenigsten hat, weggebracht werden; also subtrahire man hier beiderseits x, so kommt $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es sey ferner $x + 4 = 20 - x$, also $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$ und $x = 8$.

Es sey $x + 8 = 32 - 3x$ also $4x + 8 = 32$ und $4x = 24$ und $x = 6$.

Es sey ferner $15 - x = 20 - 2x$, also $15 + x = 20$ und $x = 5$.

Es

Es sey $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, also $1 + \frac{3}{2}x = 5$ und $\frac{3}{2}x = 4$ und $3x = 8$ und $x = 2\frac{2}{3}$.

Es sey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12, so kommt $x = 2$.

Es sey $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$, so kommt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$, so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$, multiplicire mit 6, so bekommt man $7x = 7\frac{1}{2}$; durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

20.

Kommt man auf eine solche Gleichung wo die unbekannte Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die gantze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wann man findet $\frac{100}{x} - 8 = 12$, addire 8, so kommt $\frac{100}{x} = 20$, multiplicire mit x, so hat man $100 = 20x$, dividire durch 20, so kommt $x = 5$.

Es sey ferner $\frac{5x+3}{x-1} = 7$, multiplicire mit $x - 1$, so hat man $5x + 3 = 7x - 7$, subtrahire $5x$, so kommt $3 = 2x - 7$, addire 7, so bekommt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

21.

Bisweilen kommen auch Wurzel-Zeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grade; als wann eine solche Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadrat-Wurzel aus $100 - x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100-x)} = 8$, so nehme man beiderseits die Quadrate $100 - x = 64$; so hat man wann x addirt wird $100 = 64 + x$, subtrahire 64, so hat man $x = 36$: oder man könnte auch also verfahren, da $100 - x = 64$, so subtrahire man 100, und man bekommt $-x = -36$, mit -1 multiplicirt, giebt $x = 36$.

22.

Bisweilen kommt auch die unbekannte Zahl x in den Exponenten, dergleichen Exempel schon oben vorgekommen, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Als wann man findet $2^x = 512$, so nimmt man beyderseits ihre Logarithmen, da hat man $x\,l\,2 = l\,512$; man dividire durch $l\,2$, so wird $x = \frac{l\,512}{l\,2}$; nach den Tabellen ist also:

$$x = \frac{2,709270}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ also} = 9.$$

Es sey $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$; man addire 100, kommt also $5 \cdot 3^{2x} = 405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$; man nehme die Logarithmen $2x\,l3 = l81$. und dividire durch $2l3$, so wird $x = \frac{l81}{2l3}$ oder $x = \frac{l81}{l9}$, folglich

$x = \frac{1}{0}, \frac{9084850}{9542425} = \frac{19084850}{9542425}$; also wird $x = 2$.

Capitel 3.

Von der Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen.

23.

Erste Frage.

Zertheile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil $= x$, so wird der kleinere seyn $7 - x$, dahero muß seyn $x = 7 - x + 3$, oder $x = 10 - x$; man addire x so kommt $2x = 10$, und dividire durch 2, so wird $x = 5$.

Antwort:

Der größere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Frage. Man zertheile a in zwey Theile, so daß der größere um b größer sey als der kleinere.

Es sey der größere Theil x, so ist der kleinere $a - x$; dahero wird $x = a - x + b$; man addire x, so wird $2x = a + b$ und dividire durch 2, so erhält man $x = \frac{a+b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sey der größere Theil = x, weil nun derselbe um b größer ist als der kleinere, so ist hinwiederum der kleinere um b kleiner als der größere; dahero wird der kleinere Theil $x - b$; diese beiden Theile zusammen müssen a ausmachen, dahero bekommt man $2x - b = a$; man addire b, so kommt $2x = a + b$, folglich $x = \frac{a+b}{2}$, welches der größere Theil ist, und der kleinere wird seyn $\frac{a+b}{2} - b$ oder $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Frage. Ein Vater hinterläßt drei Söhne und 1600 Rthlr. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweyte, der zweyte aber 100 Rthlr. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten sey = x, so ist das Erbtheil des zweyten = x + 100, und das Erb-

theil

theil des ersten = x + 300; diese 3 zusammen müssen 1600 Rthlr. ausmachen. Dahero wird 3x + 400 = 1600: man subtrahire 400, so wird 3x = 1200 und durch 3 dividirt, giebt x = 400.

Antwort: der dritte bekommt 400 Rthlr. der zweyte 500 Rthlr. der erste 700 Rthlr.

25.

IV. Frage. Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Rthlr. Nach seinem Testamente soll der erste zweymal so viel bekommen als der zweyte weniger 100 Rthlr. der zweyte soll bekommen dreymal so viel als der dritte weniger 200 Rthlr. und der dritte soll haben viermal so viel als der vierte weniger 300 Rthlr. Wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten sey = x, so ist das Erbtheil des dritten 4x — 300, des zweyten 12x — 1100 und des ersten 24x — 2300. Hiervon muß die Summa ausmachen 8600 Rthlr. woraus diese Gleichung entsteht:

41x — 3700 = 8600; man addire 3700, so kommt 41x = 12300; und durch 41 dividirt, giebt x = 300.

Antwort: der vierte Sohn bekommt 300 Rthlr. der dritte 900 Rthlr. der zweyte 2500 Rthlr. und der erste 4600 Rthlr.

26.

V. Frage. Ein Mann hinterläßt 11000 Rthl. und hierzu eine Wittwe, zwey Söhne und drey Töchter. Nach seinem Testamente soll die Frau zweymal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweymal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jedes?

Das Erbtheil einer Tochter sey = x, so ist das Erbtheil eines Sohnes = 2x und das Erbtheil der Wittwe = 4x; folglich ist die gantze Erbschaft, 3x + 4x + 4x, oder 11x = 11000; durch 11 getheilt giebt x = 1000.

Antwort. Eine Tochter bekommt 1000 Rthlr.
alle dreye bekommen also 3000 Rthlr.
Ein Sohn bekommt 2000 Rthlr.
beyde also = = = = 4000
und die Muttter bekommt = = = 4000
Summa 11000 Rthlr.

27.

VI. Frage. Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlassene Vermögen folgendergestalt unter

unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthlr. weniger als die Hälfte der gantzen Verlassenschaft; der zweyte 800 Rthlr. weniger als der dritte Theil der Verlassenschaft, und der vierte 600 Rthlr. weniger als der vierte Theil der Verlassenschaft. Nun ist die Frage wie groß das nachgelassene Vermögen gewesen und wie viel ein jeder bekommen hat?

Es sey die gantze Verlassenschaft $= x$ so hat der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, welches der ganzen Verlassenschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$, man addire 2400, so ist $\frac{1}{12}x = 2400$, und mit 12 multiplicirt, giebt $x = 28800$.

Antwort. Die ganze Verlassenschaft war 28800 Rthlr. davon hat nun der erste Sohn bekommen . . . . 13400 Rthlr.

der zweyte . . . . . 8800 —

der dritte . . . . . 6600 —

alle drey also 28800 Rthlr.

28.

VII. Frage. Ein Vater hinterläßt vier Söhne welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthlr. weniger als die Hälfte der Erbschaft; der zweyte nimmt 1000 Rthlr. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft; der dritte nimmt $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft; der vierte nimmt 600 Rthlr. und $\frac{1}{5}$ der Erbschaft: wie groß war die Erbschaft, und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Man setze die ganze Erbschaft $= x$, so hat

der erste bekommen $\frac{1}{2}x - 3000$
der zweyte . . $\frac{1}{3}x - 1000$
der dritte . . $\frac{1}{4}x$
der vierte . . $\frac{1}{5}x + 600$

und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches seyn muß $= x$; also hat man diese Gleichung: $\frac{77}{60}x - 3400 = x$; subtrahire x, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$; addire 3400 so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$; durch 17 dividirt giebt $\frac{1}{60}x = 200$; und mit 60 multiplicirt, giebt $x = 12000$.

Antwort. Die ganze Erbschaft war 12000 Rthl. davon bekam der erste 3000 Rthlr.

der zweyte 3000
der dritte 3000
der vierte 3000

29.

VIII. Frage. Suche eine Zahl, wann ich darzu ihre Hälfte addire, daß so viel über 60 kommen, als die Zahl selbst ist unter 65?

Die Zahl sey x, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel seyn als $65 - x$, das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$; man addire x, so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$; man addire 60 so kommt $\frac{5}{2}x = 125$, durch 5 dividirt, wird $\frac{1}{2}x = 25$, und mit 2 multiplicirt, giebt $x = 50$.

Antwort. Die gesuchte Zahl ist 50.

30.

IX. Frage. Man zertheile 32 in zwey Theile, wann man nun den kleinern durch 6 dividirt, den größern aber durch 5, so daß die Quotienten zusammen 6 ausmachen?

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt, giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$; also muß seyn $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{6} = 6$; mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$; man addire $\frac{1}{6}x$, so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$;

30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$; mit 6 multiplicirt wird $x = 12$.

Antwort. Der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31.

X. Frage. Suche eine Zahl, daß wann man sie mit 5 multiplicirt, das Product so viel unter 40 ist, als die Zahl selbst unter 12.

Es sey die Zahl $= x$, welche unter 12 ist um $12 - x$; diese Zahl fünfmahl genommen ist $5x$, und ist unter 40 um $40 - 5x$, welches eben so viel seyn soll als $12 - x$, also $40 - 5x = 12 - x$;

Addire $5x$ so wird $40 = 12 + 4x$; subtrahire 12, giebt $28 = 4x$; dividire durch 4, wird $x = 7$.

Antwort. Die Zahl ist 7.

32.

XI. Frage. Zertheile 25 in zwey Theile, so daß der größere 49mal größer ist, als der kleinere.

Es sey der kleinere Theil $= x$, so ist der größere $= 25 - x$; diesen durch jenen dividirt soll 49 geben: also wird $\frac{25-x}{x} = 49$; mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$, und x addirt kommt $50x = 25$; durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.

Ant-

Antwort. Der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der grösere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt, giebt 49.

$= 33.$

XII. Frage. Zertheile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ grösser sey, als der vorhergehende?

Es sey der erste und kleinste Theil $= x$ so ist der zweyte $x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ etc. Weil nun diese Theile eine Arithmetische Progression ausmachen, davon das erste Glied x, so ist das neunte und letzte Glied $x + 4$, wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9 multiplicirt, giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summa aller 9 Theile $9x + 18$, so da seyn muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$; 18 subtrahirt, giebt $9x = 30$; durch 9 dividirt, giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort. Der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende:

$$\overset{1}{3\tfrac{1}{3}} + \overset{2}{3\tfrac{5}{6}} + \overset{3}{4\tfrac{1}{3}} + \overset{4}{4\tfrac{5}{6}} + \overset{5}{5\tfrac{1}{3}} + \overset{6}{5\tfrac{5}{6}} + \overset{7}{6\tfrac{1}{3}} + \overset{8}{6\tfrac{5}{6}} + \overset{9}{7\tfrac{1}{3}}.$$

Davon ist die Summa $= 48.$

34.

XIII. Frage. Suche eine Arithmetische Progression davon das erste Glied $= 5$ und das letzte $= 10$, die Summa aber $= 60$ sey?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekannt ist; aus dem ersten und letzten aber die Summa aller derselben gefunden werden könnte, wann man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sey dieselbe $= x$, so wird die Summa der Progression seyn $\frac{15}{2}x = 60$; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}x = 4$, mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied $= z$, so ist das zweyte Glied $5 + z$, das dritte $5+2z$ und das achte $5+7z$. welches gleich seyn muß 10.

Also hat man $5 + 7z = 10$, und 5 subtrahirt giebt $7z = 5$, durch 7 dividirt $z = \frac{5}{7}$.

Antwort. Der Unterschied der Progression ist $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 8, dahero die Progression selbst seyn wird:

$$\overset{1}{5} + \overset{2}{5\tfrac{5}{7}} + \overset{3}{6\tfrac{3}{7}} + \overset{4}{7\tfrac{1}{7}} + \overset{5}{7\tfrac{6}{7}} + \overset{6}{8\tfrac{4}{7}} + \overset{7}{9\tfrac{2}{7}} + \overset{8}{10}.$$

Davon ist die Summa $= 60$.

35.

XIV. Frage. Suche eine Zahl wann ich von ihrem Duplo subtrahire 1 und das übrige duplire, davon 2 subtrahire, den Rest durch 4 dividire, das 1 weniger herauskomme als die gesuchte Zahl?

Die gesuchte Zahl sey x, so ist ihr Duplum 2x, davon 1 subtrahirt, bleibt 2x — 1, dieses duplirt, wird 4x — 2, davon subtrahirt 2 bleibt 4x — 4 dieses durch 4 dividirt giebt x — 1, welches 1 weniger seyn muß als x.

Also ist x — 1 = x — 1, eine identische angenommene Gleichung, und zeigt an, daß x gar nicht bestimmet werde, sondern daß man dafür eine jede beliebige Zahl annehmen könne.

36.

XV. Frage. Ich habe gekauft etliche Ellen Tuch und für jede 5 Ellen 7 Rthlr. bezahlt, davon wieder verkauft 7 Ellen für 11 Rthlr. und gewonnen 100 Rthlr. Wie viel Tuch ist es gewesen?

Es seyen gewesen x Ellen, so muß man erst sehen wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regula de tri gefunden wird.

5 Ellen

5 Ellen kosten 7 Rthlr, was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{7}{5}$ x Rthlr.

So viel Geld ist ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel wieder eingenommen; und dieses geschieht durch die Regula de tri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthlr.; was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{11}{7}$ x Rthlr.

Dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthlr. größer ist als die Ausgabe, woraus also diese Gleichung entsteht:

$$\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100,$$

$\frac{7}{5}$ x subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}x = 100$; mit 35 multiplicirt, kommt $6x = 3500$; durch 6 dividirt, wird $x = 583\frac{1}{3}$.

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich für $816\frac{2}{3}$ Rthlr. eingekauft worden; hernach sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rthlr. also ist darauf gewonnen 100 Rthlr.

37.

XVI. Frage: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthlr., davon sind 2 weis, 3 schwarz, und 7 blau: nun kostet ein Stück schwarzes Tuch 2 Rthlr. mehr als ein weisses, und ein blaues 3 Rthlr.

3 Rthlr. mehr, als ein schwarzes: ist die Frage wie viel jedes gekostet?

Man setze: ein Stück weisses kostet x Rthlr. dahero kosten die 2 weissen Stücke 2x Rthlr. Ferner kostet ein Stück schwarzes $x+2$, also die 3 schwarzen $3x+6$ und ein Stück blaues $x+5$, folglich die 7 blauen $7x+35$ und alle zwölf Stücke $12x+41$.

Dieselben kosten aber wirklich 140 Rthlr. dahero hat man $12x+41 = 140$; 41 subtrahirt bleibt $12x = 99$; durch 12 dividirt wird $x = 8\frac{1}{4}$.

Antwort: 1 Stück weisses kostet demnach $8\frac{1}{4}$ Rthlr.
1 schwarzes = = = = $10\frac{1}{4}$ —
1 blaues = = = = $13\frac{1}{4}$ —

38.

XVII. Frage: Einer hat Muscaten-Nüße gekauft, und sagt daß 3 Stück eben so viel über 4 Pfennige kosten als 4 Stück mehr kosten als 10 Pf. wie theuer waren dieselben?

Man nehme 3 Stücke kosten $x+4$ Pf. so werden 4 Stücke $x+10$ Pf. kosten. Nach dem ersten Satz aber findet man durch die Regula de

Tri was 4 Stück kosten, 3 Stück also: $x+4$ Pf. $=$ 4 Stück. Antwort: $\frac{4x+16}{3}$; also wird $\frac{4x+16}{3}$ $= x+10$ oder $4x+16=3x+30$; $3x$ subtrahirt, giebt $x+16=30$; 16 subtrahirt giebt $x=14$.

Antwort: Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 St. 24 Pf. Folglich hat 1 Stück gekostet 6 Pf.

39.

XVIII. Frage: Einer hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel darzu: der erste Becher wiegt 12 Loth, legt man den Deckel darauf so wiegt er zweymal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal so viel als der erste: hier ist nun die Frage wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze, der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher samt dem Deckel $x+12$ Loth. Da dieses Gewicht zweymal so viel ist als des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x+6$; legt man darauf den Deckel so wiegt er $\frac{3}{2}x+6$ welches 3 mahl 12, das ist 36, gleich seyn muß. Also hat man $\frac{3}{2}x+6=36$ oder $\frac{3}{2}x=30$ und $\frac{1}{2}x=10$ und $x=20$.

Ant-

Antwort: der Deckel hat gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

40.

XIX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthlr., von der zweyten Sorte b Stück. Nun kommt einer und will c Stück für einen Rthlr. haben: wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern $c-x$ Stück. Nun sind aber jene x Stück werth $a:1=x:\frac{x}{a}$ Rthlr. diese $c-x$ Stück aber sind werth $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$ Rthlr.

Also muß seyn $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, oder $\frac{bx}{a}+c-x=b$, oder $bx+ac-ax=ab$, weiter $bx-ax=ab-ac$, folglich wird $x=\frac{ab-ac}{b-a}$ oder $x=\frac{a(b-c)}{b-a}$, dahero wird $c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Antwort: von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ Stück.

Anmer-

Anmerkung. Diese beiden Zahlen lassen sich leicht durch die Regula de Tri finden; nemlich die erste durch diese: wie $b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a}$; für die zweite Zahl gilt diese: wie $b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}$. Hierbey ist zu mercken, daß b gröſser ist als a, und c kleiner als b aber gröſser als a, wie es die Natur der Sache erfordert.

41.

XX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthlr. von der andern 20 Stück einen Rthlr. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthlr. wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a=10$, $b=20$ und $c=17$ woraus diese Regula de trien fliessen:

I. $10:3=10:3$, also von der ersten Sorte 3 Stück.

II. $10:7=20:14$, und von der andern Sorte 14 Stück.

42.

XXI. Frage: Ein Vater hinterläßt nach seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die

die Kinder dergestalt unter sich theilen. Das erste nimmt 100 Rthlr und dazu noch den 10ten Theil des übrigen.

Das zweyte nimmt 200 Rthlr. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.

Das dritte nimmt 300 Rthlr. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.

Das vierte nimmt 400 Rthlr und noch dazu den 10ten Theil des übrigen, und so fort.

Solchergestalt findet es sich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder er hinterlassen, und viel ein jedes bekommen?

Diese Frage ist von einer ganz besondern Art und verdienet deswegen bemerket zu werden. Um dieselbe desto leichter aufzulösen, so setze man das ganze hinterlassene Vermögen $= z$ Rthlr. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sey der Antheil eines jeden $= x$; woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflösung folgendergestalt anstellen.

Das

Das zu theilende Geld	Ordnung der Kinder	Antheil eines jeden	Die Differenzen.
Z	das erste	$X = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$Z - X$	zweyte	$X = 200 + \frac{z-x-100}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$Z - 2X$	dritte	$X = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$Z - 3X$	vierte	$X = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$Z - 4X$	fünfte	$X = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x+100}{10} = 0$
$Z - 5X$	sechste	$X = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	u. s. w.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen gesetzt worden, welche entstehen, wann man ein jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun alle Erbtheile einander gleich sind, so muß eine jede von diesen Differenzen seyn $= 0$. Da es sich nun so füget, daß alle Differenzen einander gleich sind, so ist es genug, daß man eine davon gleich 0 setze, dahero erhalten wir diese Gleichung $100 - \frac{x+100}{10} = 0$. Man multiplicire mit 10 so erhält man $1000 - X - 100 = 0$, oder $900 - X = 0$, folglich $X = 900$. Woraus wir schon wissen, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthlr. gewesen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche

welche man will, z. E. die erste $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$ woraus man z sogleich finden kann; dann $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$, also $z = 8100$, dahero wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort: Also war die Anzahl der Kinder $= 9$, das hinterlassene Vermögen $= 8100$ Rthlr. wovon ein jedes Kind bekommt 900 Rthlr.

Capitel 4.

Von Auflösung zweyer oder mehr Gleichungen vom ersten Grad.

43.

Oefters geschieht es, daß zwey oder auch mehr unbekannte Zahlen so durch die Buchstaben x, y, z ꝛc. vorgestellet werden, in Rechnung gebracht werden müssen, da man dann, wann anders die Frage bestimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hernach die unbekannten Zahlen gefunden werden müssen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen wo die erste Potestät der unbekannten Zahl sich findet, und wo keine mit der

andern multiplicirt ist; daß also eine jede Gleichung von dieser Form seyn wird $az+by+cx=d$.

44.

Wir wollen also den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekannte Zahlen x und y bestimmen, und um die Sache auf eine allgemeine Art zu tractiren, so seyen diese beyden Gleichungen gegeben I. $ax+by=c$ und II. $fx+gy=h$ wo die Buchstaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekannter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage, wie man aus diesen beyden Gleichungen die beyden unbekannten Zahlen x und y herausbringen soll.

45.

Der natürlichste Weg bestehet nun darinn, daß man aus einer jeden Gleichung, den Werth von einer unbekannten Zahl als z. E. von x bestimmt und hernach diese beyden Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, da nur die unbekannte Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Reguln bestimmen kann. Hat man nun y gefunden, so darf man nur statt dessen seinen

neu gefundenen Werth setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46.

Dieser Regul zu Folge findet man aus der ersten Gleichung $x = \frac{c-by}{a}$, aus der andern aber findet man $x = \frac{h-gy}{f}$; diese beyden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c-by}{a} = \frac{h-gy}{f}$; mit a multiplicirt, wird $c - by = \frac{ah-agy}{f}$; mit f multiplicirt, wird $fc - fby = ah - agy$; man addire agy, so wird $fc - fby + agy = ah$; man subtrahire fc so wird $-fby + agy = ah - fc$ oder $(ag-bf)\,y = ah - fc$; man dividire durch $ag - bf$ so wird $y = \frac{ah-fc}{ag-bf}$; schreibt man nun diesen Werth für y in einem der beyden, so vor x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten so hat man $-by = -\frac{abh+bcf}{ag-bf}$, hieraus wird $c - by = c - \frac{abh+bcf}{ag-bf}$, oder $c - by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; durch a dividirt giebt $x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}$.

47.

I. Frage: Um dieses durch Exempel zu erläutern, sey hier die Frage vorgelegt: Man suche 2 Zahlen deren Summe 15 und die Differenz 7 sey?

Es sey die grösere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$ so hat man I. $x+y=15$, und II. $x-y=7$. Aus der ersten bekommt man $x=15-y$ und aus der zweyten $x=7+y$, woraus diese neue Gleichung entspringt $15-y=7+y$.

Hier addire man y so hat man $15=7+2y$; man subtrahire 7 so wird $2y=8$; durch 2 dividirt wird $y=4$ und daraus $x=11$.

Antwort: Die kleinere Zahl ist 4, die grösere aber 11.

48.

II. Frage: Man kann diese Frage auch allgemein machen und zwey Zahlen suchen, deren Summe $= a$, und die Differenz $= b$ sey.

Es sey die grösere $= x$ und die kleinere $= b$ so hat man I) $x+y=a$ und II) $x-y=y$; aus der ersten erhält man $x=a-y$ und aus der andern $x=b+y$ woraus diese Gleichung entspringt $a-y=b+y$.

Man addire y, so hat man $a=b+2y$; man subtrahire b so kommt $2y=a-b$; durch 2 dividirt, wird $y=\frac{a-b}{2}$ und hieraus wird $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Ant-

Antwort: Die grösere Zahl ist also $x = \frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y = \frac{a-b}{2}$, oder da $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz: die grösere Zahl ist der halben Summe plus der halben Differenz, und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe minus der halben Differenz.

49.

Man kann diese Frage auch auf folgende Weise auflösen: da die beyden Gleichungen sind $x+y=a$ und $x-y=b$, so addire man dieselben so wird $2x = a+b$ und $x = \frac{a+b}{2}$.

Hernach subtrahire man von der ersten die zweyte, so bekommt man $2y = a-b$ und $y = \frac{a-b}{2}$, wie vorher.

50.

III. Frage: Ein Maul-Esel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last, und sagt zum Maul-Esel, wann du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweymal so viel als du; darauf antwortet der Maul-Esel, wann du mir ein Pud von deiner

Last

Laſt gäbeſt, ſo hätte ich dreymal ſo viel als du, wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Maul-Eſel habe gehabt x Pud, der Eſel aber y Pud: giebt nun der Maul-Eſel dem Eſel ein Pud, ſo hat der Eſel $y+1$, der Maul-Eſel aber behält noch $x-1$, da nun der Eſel 2 mal ſo viel hat als der Maul-Eſel ſo wird $y+1=2x-2$.

Wann aber der Eſel dem Maul-Eſel ein Pud giebt, ſo bekommt der Maul-Eſel $x+1$ und der Eſel behält noch $y-1$. Da nun jene Laſt 3 mal ſo groß iſt als dieſe, ſo wird $x+1=3y-3$.

Alſo ſind unſre zwey Gleichungen:

I. $y+1=2x-2$, II. $x+1=3y-3$.

Aus der erſten findet man $x=\frac{y+3}{2}$, und aus der andern $x=3y-4$, woraus dieſe neue Gleichung entſpringt $\frac{y+3}{2}=3y-4$, welche mit 2 multiplicirt giebt $y+3=6y-8$, und y ſubtrahirt, kommt $5y-8=3$, dazu 8 addirt, ſo hat man $5y=11$ und $y=\frac{11}{5}$, oder $2\frac{1}{5}$; und hieraus $x=2\frac{3}{5}$.

Antwort: Alſo hat der Maul-Eſel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud, der Eſel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

Hat man 3 unbekannte Zahlen und eben so viel Gleichungen, als z. E. I. $x+y-z=8$, II. $x+z-y=9$, III. $y+z-x=10$, so suche man ebenfalls aus einer jeden den Werth von x. Aus der I. $x=8+z-y$; II. $x=9+y-z$, III. $x=y+z-10$.

Nun setze man erstlich den ersten gleich dem andern, und hernach auch gleich dem dritten, so erhält man diese zwey neue Gleichungen:

I. $8+z-y=9+y-z$,

II. $8+z-y=y+z-10$.

Es folgt aber aus der ersten $2z+2y=1$, und aus der zweyten $2y=18$, und da erhält man sogleich $y=9$, welcher Werth in der vorhergehenden vor y geschrieben, giebt $2z-18=1$ und $2z=19$, dahero $z=9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x=8\frac{1}{2}$.

Hier hat es sich gefüget, daß in der letzten Gleichung der Buchstabe z verschwunden, daß also y sogleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber z auch noch darinnen vorgekommen, so hätte man

man zwey Gleichungen gehabt zwiſchen z und y, welche nach der erſten Regul aufgelöſt werden müßten.

52.

Es ſeyen die drey folgenden Gleichungen alſo gefunden worden:

I. $3x + 5y - 4z = 25$,

II. $5x - 2y + 3z = 46$,

III. $3y + 5z - x = 62$.

Man ſuche aus einer jeden den Werth von x, ſo hat man:

I. $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, II. $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$,

III. $x = 3y + 5z - 62$.

Nun vergleiche man dieſe 3 Werthe unter ſich, ſo giebt der IIIte und Iſte $3y + 5z - 62 = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, oder mit 3 multiplicirt $25 - 5y + 4z = 9y + 15z - 186$; addire 186 ſo kommt $211 - 5y + 4z = 9y + 15z$; 5y addirt, giebt $211 + 4z = 14y + 13z$, alſo aus der Iten und IIIten erhält man $211 = 14y + 11z$. Die IIte und IIIte giebt $3y + 5z - 62 = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$ oder $46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$ und man findet aus dieſer Gleichung $356 = 13y + 28z$.

Aus einer jeden dieser beyden Gleichungen suche man den Werth für y:

I. $211 = 14y + 11z$, wo $11z$ subtrahirt, bleibt $14y = 211 - 11z$ oder $y = \frac{211 - 11z}{14}$.

II. $356 = 13y + 28z$, wo $28z$ subtrahirt, bleibt $13y = 356 - 28z$ oder $y = \frac{356 - 28z}{13}$.

Diese beiden Werthe einander gleichgesetzt, geben:

$$\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13},$$

mit 13.14 multiplicirt, wird $2743 - 143z = 4984 - 392z$, und $392z$ addirt, giebt $249z + 2743 = 4984$, oder $249z = 2241$ und also $z = 9$.

Hieraus erhält man $y = 9$ und endlich $x = 7$.

53.

Sollten mehr als drey unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, so könnte man die Auflösung auf eine ähnliche Art anstellen, welches aber gemeiniglich auf verdrießliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen sich aber bey einem jeglichen Falle solche Mittel zu äußern, wodurch die Auflösung ungemein erleichtert wird, und solches geschieht, indem man außer den Haupt unbekannten Zahlen noch

noch eine neue willkührliche, als z. E. die Summe aller, in die Rechnung mit einführet, welches von einem, der ſich in dergleichen Rechnungen ſchon ziemlich geübt hat, in einem jeglichen Falle leicht beurtheilt werden kann. Zu dieſem Ende wollen wir einige dergleichen Exempel anführen.

54.

IV. Frage: Drey ſpielen mit einander, im erſten Spiele verliert der erſte an jeden der beyden andern ſo viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey ſich hatte. Im zweiten Spiele verliert der zweyte an den erſten und dritten ſo viel als ein jeder hat. Im dritten Spiele verliert der dritte an den erſten und zweyten ſo viel ein jeder hatte, und da findet es ſich, daß alle nach geendigtem Spiele gleich viel haben, ein jeder nemlich 24 Flor. Nun iſt die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man ſetze der erſte habe gehabt x Fl. der zweyte y und der dritte z. Ueber dieſes ſetze man die Summe aller Fl. zuſammen $x+y+z=1$. Da nun im erſten Spiele der erſte ſo viel verliert als die beyden andern haben, und der erſte x hat,

ſo

so haben die beyden andern f — x, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben 2x — f; der zweyte aber wird haben 2y, und der dritte 2z. Nach dem ersten Spiele wird also ein jeder haben wie folget:

der Iste 2x — f, der IIte 2y, der IIIte 2z.

Im zweyten Spiele verliert der andere, der nun 2y hat, an die beyden andern, so viel als sie haben, oder f — 2y. Dahero der zweyte noch behält 4y — f; die beyden andern aber werden zweymal so viel haben als vorher. Also nach dem zweyten Spiele wird haben:

der Iste 4x — 2f, der IIte 4y — f, der IIIte 4z.

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt 4z hat, an die beyden andern so viel sie haben, sie haben aber f — 4z; also behält der dritte noch 8z — f und die beyden andern bekommen doppelt so viel als sie hatten. Also wird nach dem dritten Spiele ein jeder haben:

der Iste 8x — 4f, der IIte 8y — 2f, und der IIIte 8z — f.

Da nun ein jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir 3 Gleichungen welche so beschaffen sind, daß man

aus

aus der ersten sogleich x, aus der andern y und aus der dritten z finden kann, da insonderheit f jetzt eine bekannte Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbsten geben, ohne daß man nöthig habe darauf zu sehen.

Diese Rechnung wird demnach also stehen:

I. $8x-4f=24$, oder $8x=24+4f$, oder $x=3+\frac{1}{2}f$;
II. $8y-2f=24$, oder $8y=24+2f$, oder $y=3+\frac{1}{4}f$;
III. $8z-f=24$, oder $8z=24+f$, oder $z=3+\frac{1}{8}f$.

Man addire diese 3 Werthe, so bekommt man:

$$x+y+z=9+\frac{7}{8}f.$$

Da nun $x+y+z=f$, so hat man $f=9+\frac{7}{8}f$; $\frac{7}{8}f$ subtrahirt, bleibt $\frac{1}{8}f=9$ und $f=72$.

Antwort: Also vom Anfange des Spiels hatte der 1ste 39 Fl. der 2te 21, und der 3te 12 Fl.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summa der 3 unbekannten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Wege geräumet worden.

21.

So schwer diese Frage auch scheinet, so findet

es

es ſich doch daß ſelbige ſogar ohne Algebra aufgelöſet werden kann.

Man gehe nur in Betrachtung derſelben rückwärts, da haben alsdann die drey Perſonen nach dem dritten Spiele gleich viel bekommen: nemlich der erſte 24, der zweyte 24, und der dritte 24; da im dritten Spiele aber der erſte und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, ſo müſſen ſie vor dem Spiele gehabt haben wie folget:

I. 12, II. 12, III. 48.

Im zweyten Spiele hat der erſte und dritte ſein Geld verdoppelt, alſo müßen ſie vor dem zweyten Spiele gehabt haben:

I. 6, II. 42, III. 24.

Im erſten Spiele hat der zweyte und dritte ſein Geld verdoppelt, alſo haben ſie vor dem erſten Spiele gehabt:

I. 39, II. 21, III. 12.

und eben ſo viel haben wir auch vorher vor dem Anfange des Spiels gefunden.

56.

V. Frage: Zwey Perſonen ſind ſchuldig 29 Rubel; nun hat zwar ein jeder Geld, doch nicht

ſo

so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum spricht der erste zu dem andern: giebst du mir $\frac{2}{3}$ deine Geldes, so könnte ich die Schuld sogleich allein bezahlen: der andere antwortet dagegen, gieb du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes so kann ich die Schuld allein bezahlen; wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erste hat gehabt x Rubel, der andere y Rubel, also bekommt man erstlich:

$x + \frac{2}{3}y = 29$, hernach auch $y + \frac{3}{4}x = 29$.

Aus dem ersten findet man $x = 29 - \frac{2}{3}y$, aus dem zweyten $x = \frac{116 - 4y}{3}$. Aus diesen beiden Werthen entsteht diese Gleichung:

$29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{3}$, also $y = 14\frac{1}{2}$; dahero wird $x = 19\frac{1}{3}$.

Antwort: Der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$, der andere $14\frac{1}{2}$ Rubel.

57.

VI. Frage: Drey haben ein Haus gekauft für 100 Rthlr.; der erste begehrt vom andern die $\frac{1}{2}$ seines Geldes so könnte er das Haus allein bezahlen; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes,

des, so könnte er das Haus allein bezahlen; der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes so könnte er das Haus allein bezahlen. Wie viel Geld hat nun jeder gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthlr.: so bekommt man folgende drey Gleichungen:

I. $x + \frac{1}{2}y = 100$. II. $y + \frac{1}{3}z = 100$.
III. $z + \frac{1}{4}x = 100$.

Aus welchen der Werth von x gefunden wird:

I. $x = 100 - \frac{1}{2}y$. III. $x = 400 - 4z$.

Hier konnte nemlich aus der zweyten Gleichung x nicht bestimmt werden. Die beyden Werthe aber geben diese Gleichung:

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$ oder $4z - \frac{1}{2}y = 300$,

welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y + \frac{1}{3}z = 100$; woraus gefunden wird $y = 100 - \frac{1}{3}z$. Aus der oben gefundenen Gleichung $4z - \frac{1}{2}y = 300$ aber ist bekannt $y = 8z - 600$; woraus diese letzte Gleichung entspringt:

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$, also $8\frac{1}{3}z = 700$,

oder

oder $\frac{25}{3}z = 700$, und $z = 84$; hieraus findet man $y = 100 - 28$, oder $y = 72$, und endlich $x = 64$.

Antwort: Der erste hat gehabt 64 Rthlr. der zweyte 72 Rthlr. und der dritte 84 Rthlr.

58.

Da bey diesem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekannte Zahlen vorkommen, so kann die Auflösung auf eine bequemere Art angestellet werden.

Man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch x bestimmt wird; diesen Werth schreibe man vor y in der zweyten Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, 100 subtrahirt so bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch z durch x bestimmt: diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkommt und also $25x - 1600 = 0$, dahero $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$, und $z = 384 - 300 = 84$.

59.

59.

Eben so kann man verfahren wann auch mehr solche Gleichungen vorkommen; also wann man auf eine allgemeine Art hat:

I. $u + \frac{x}{a} = n$; II. $x + \frac{y}{b} = n$;
III. $y + \frac{z}{c} = n$; IV. $z + \frac{u}{d} = n$;

oder nach dem man die Brüche weggebracht, diese:

I. $au + x = an$; II. $bx + y = bn$;
III. $cy + z = cn$; IV. $dz + u = dn$.

Aus der ersten bekommen wir $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten giebt $abn - abu + y = bn$, also $y = bn - abn + abu$; dieser Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$, also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; dieser endlich in der vierten Gleichung giebt $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$. Also wird $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdu + u$, oder $(abcd - 1)\,u = abcdn - bcdn + cdn - dn$ woraus man erhält:

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n\,\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

Hieraus findet man ferner wie folget:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

60.

VII. Frage: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten; in der einen sind Schweitzer, in der andern Schwaben, und in der dritten Sachsen; mit diesen will er eine Stadt bestürmen und verspricht zur Belohnung 901 Rthl. also auszutheilen: daß von der Compagnie, die Sturm lauft, ein jeder 1 Rthlr. bekomme, daß übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden solle.

Nun findet es sich, daß wann die Schweitzer Sturm laufen, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthlr. bekäme; wann aber die Schwaben Sturm laufen, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthlr bekommen würde. Laufen aber die Sachsen Sturm so würde ein jeder der beyden andern

dern $\frac{1}{4}$ Rthlr. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Köpfen jede Compagnie bestanden?

Man setze nun, die Anzahl der Schweizer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y, und der Sachsen z.

Ferner setze man die Anzahl aller $x + y + z = s$ indem leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Dann wann die Schweitzer Sturm laufen, deren Anzahl $= x$, so ist die Anzahl der beyden übrigen $= s - x$, da nun jene 1 Rthlr. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}x = 901$.

Eben so wann die Schwaben Sturm laufen so wird

$$y + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}y = 901;$$

und endlich wann die Sachsen Sturm laufen, so wird $z + \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}z = 901$ seyn.

Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann: dann aus der ersten erhält man $x = 1802 - s$; aus der andern $2y = 2703 - s$; und aus der dritten $3z = 3604 - s$. Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von 6x, 6y, und 6z.

$$6x = 10812 - 6f$$
$$6y = 8109 - 3f$$
$$6z = 7208 - 2f$$

addire: $6f = 26129 - 11f$, oder $17f = 26129$, woraus gefunden wird $f = 1537$, welches die Anzahl aller Köpfe ist, und daraus findet man ferner:

$x = 1802 - 1537 = 265$;
$2y = 2703 - 1537 = 1166$ und $y = 583$
$3z = 3604 - 1537 = 2067$ und $z = 689$.

Antwort: Die Compagnie der Schweitzer bestand also aus 265, der Schwaben aus 583, und der Sachsen aus 689 Mann.

Capitel 5.

Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

61.

Eine Gleichung wird quadratisch genannt, wann darinn das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekannten Zahl vorkommt, und sich nur keine höhere Potestäten davon darinnen befinden. Denn sollte

auch

auch darinn die dritte Potestät vorkommen, so wird eine solche Gleichung schon zu den cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer quadratischen Gleichung kömmen also nur dreyerlei Glieder vor: zum ersten solche, worinn die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, oder solche, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzet sind. Zweytens solche, in welchen nur die erste Potestät der unbekannten Zahl vorkommt. Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten ist.

Also wann x die unbekannte Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekannte Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art aber die Form bx, und die Glieder von der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Genüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in eins zusammen gezogen, oder als ein einziges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a - b + c, xx$, weil in der That $a - b + c$ eine bekannte Zahl ausdrückt.

Wann sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens $=$ befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eins zusammen gezogen werden können. Also wann diese Gleichung vorkommt:

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$$

so subtrahire man erstlich $2xx$, so kommt

$$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11;$$

hernach addire man $8x$, so hat man

$$5x + 4 = 3xx + 11;$$

und 11 subtrahirt, giebt $3xx = 5x - 7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens $=$ bringen, so daß auf der andern Seite 0 zu stehen kommt; wobey zu bemercken, daß wann Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müssen.

Also

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx - 5x + 7 = 0$ und so wird auch insgemein eine jede quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellet werden können:

$$axx \pm bx \pm c = 0.$$

Wo das Zeichen $\pm$ durch plus oder minus ausgesprochen wird, ist um anzuzeigen, daß solche Glieder bald positiv bald negativ seyn können.

65.

Es mag eine quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wann man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ex + f}{gx + h}$$

so müsten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden. Also multiplicire man mit $cx + d$, so bekommt man

$$ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h};$$

hier mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$$agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd$$

welches eine quadratische Gleichung ist, und auf

fol-

folgende drey Glieder gebracht werden kann, wann alle auf einer Seite gesetzt werden, und welche man also untereinander zu schreiben pflegt:

$$\begin{aligned} 0 = {} & agxx + bgx + bh \\ & - cexx + ahx - fd \\ & - efx \\ & - edx \end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$$0 = (ag - ce)\,xx + (bg + ah - cf - ed)\,x + bh - fd.$$

66.

Dergleichen quadratische Gleichungen worinn von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genannt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworfen, dahero wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt. Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl quadratisch und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so bloß bekannte Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx \pm bx = 0$, wo man durch x

theilen

theilen kann und daher zu dieser Gleichung kommt $ax \pm b = 0$, welche wieder eine einfache Gleichung ist, und nicht hieher gehört.

67.

Wann aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des x enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $a\,xx \pm c = 0$, oder $a\,xx = c$, es mag nun c das Zeichen + oder — haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine quadratische genannt, weil ihre Auflösung keine Schwierigkeiten unterworfen ist. Dann man darf nur durch a theilen so bekommt man $xx = \frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelöst worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwägen. Der erste wann $\frac{c}{a}$ eine Quadrat-Zahl ist, davon sich die Wurzel wirklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag ganz oder gebrochen seyn.

Also

Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist wann $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, und wo man sich alsdann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wann $xx = 12$ so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist aber drittens $\frac{a}{c}$ gar eine Negativzahl, so wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder imaginair und zeiget an, daß die Frage welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen ist noch zu bemercken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte, und sowohl positiv als negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wann man auf diese Gleichung kommt $xx = 49$, so ist der Werth von x nicht nur $+7$ sondern auch -7 und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulassen, in vielen Fällen aber, wo etwan von einer Anzahl Menschen die Frage ist, fällt der negative Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, lassen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerlei Werthe vor x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wann man durch x dividirt. Dann wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 3x$ wo ein solcher Werth für x gegeben werden soll, daß xx dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wann man setzt $x = 3$, welcher Werth herauskommt, wann man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth $x = 0$ ein Genüge; denn da wird $xx = 0$ und $3x = 0$. Noch ist bey den quadratischen Gleichungen zu bemerken, daß immer zwey Auflösungen

Statt

Statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen, nie mehr als eine Platz hat.

Wir wollen nun diese reine quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71.

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit $\frac{1}{3}$ multiplicirt, 24 gäbe?

Es sey diese Zahl $= x$, so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}xx = 24$; mit 6 multiplicirt, wird $xx = 144$ und die Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Dann wann $x = +12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfalls wann $x = -12$, so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wann zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird, 96 herauskomme?

Es sey diese Zahl x so muß $x + 5$ mit $x - 5$ mul-

multiplicirt, 96 geben; woraus diese Gleichung entspringt $xx - 25 = 96$.

Man addire 25, so wird $xx = 121$ und die Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = 11$; und so wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 . 16 = 96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wann dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100 - xx = 51$.

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt $xx = 49$, wovon die Quadrat-Wurzel anzeigt $x = 7$.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, und so oft der erste hat 7 Rthlr. hat der andere 3 Rthlr. und so oft der andere hat 17 Rthlr. hat der dritte 5 Rthlr., so ich aber das Geld des ersten mit dem Gelde des andern, und das Geld

des

des andern mit dem Gelde des dritten und endlich das Geld des dritten mit dem Gelde des ersten multiplicire, hernach diese drei Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat nun ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthlr. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthlr. habe, so habe der andere 3 Rthlr. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Gelde des andern verhalte wie 7 : 3.

Man setze also wie $7 : 3 = x$ zum Gelde des andern welches seyn wird $\frac{3}{7}x$. Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Gelde des dritten, wie 17 : 5, so setze man, wie $17 : 5 = \frac{3}{7}x$ zum Gelde des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Gelde des andern $\frac{3}{7}x$ so wird das Product $= \frac{3}{7}xx$. Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}x$ mit dem Gelde des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}xx$; und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Gelde des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}xx$. Diese drey Producte zusammen machen $\frac{3}{7}xx + \frac{45}{833}xx + \frac{15}{119}xx$, welche unter einen Nen-

ner

ner gebracht, geben $\frac{507}{833}$ XX, so der Zahl $383\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}$XX $=$ $383\frac{2}{3}$, mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}$XX $=$ 1149 2; ferner mit 833 multiplicirt, giebt 1521XX $=$ 957 2836 und durch 1521 dividirt, wird XX $=$ $\frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen, giebt X $=$ $\frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt X $=$ $\frac{238}{3}$, oder X $=$ $79\frac{1}{3}$; dahero erhält man ferner $\frac{3}{7}$ X $=$ 34 und $\frac{15}{119}$ X $=$ 10.

Antwort. Also hat der erste $70\frac{1}{3}$ Rthlr. der zweyte 34 Rthlr. und der dritte 10 Rthlr. gehabt.

Anmerkung. Diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wann man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflöst, und dabei insonderheit ihre Quadrate bemerkt.

Also ist 507 $=$ 3 . 169, wo 169 das Quadrat von 13 ist: hernach ist 833 $=$ 7 . 119 und 119 $=$ 7 . 17 da man nun hat $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49}$XX $=$ $383\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}$XX $=$ 1149 2. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 sogleich in die Augen fällt, also daß 1149 2 $=$ 4 . 2873; ferner läßt sich 2873

durch

durch 17 theilen und wird $2873 = 17 . 169$, dahero unsere Gleichung also aussieht:
$\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49} xx = 4 . 17 . 169$, welche durch 169 dividirt, wird $\frac{9}{17 \cdot 49} xx = 4 . 17$; ferner mit $17 . 40$ multiplicirt und durch 9 dividirt, giebt $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{}$ wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2 . 17 . 7}{3} = \frac{238}{2}$ wie oben.

75.

V. Frage: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, und schicken ihn nach Archangel um daselbst einen Handel zu schliessen; es hat jeder derselben zehnmal so viel Rthlr. eingelegt als derer Personen sind. Nun gewinnt der Factor mit jede 100 Rthlr. zweymal so viel als die Anzahl der Personen. Man multiplicire also den $\frac{1}{100}$ Theil des gantzen Gewinnstes mit $2\frac{2}{9}$, so kommt die Zahl der Gesellschaft heraus. Wie viel sind ihrer also gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$ und da ein jeder $10x$ Rthlr. eingelegt hat, so war das ganze Capital $= 10xx$ Rthlr. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthlr. $2x$ Rthlr. folglich gewinnt er $\frac{1}{5} x^3$ mit dem gantzen Capital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses

dieses Gewinnstes ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$, welches der Zahl der Gesellschaft x gleich seyn muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: Es sind daher in allem 15 in Gesellschaft gewesen und ein jeder hat 150 Rthlr. eingelegt.

Capitel 6.

Von der Auflösung der vermischten Quadratischen Gleichungen.

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wenn in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich solche, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch

solche, worinn die unbekannte Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammengezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens = gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$$axx + bx + c = o.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied bloß allein das reine Quadrat der unbekannten Zahl xx enthalte: hernach lasse man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekannte aber bringe man auf die andere Seite. Solchergestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx + px = +q$, wo p und q bekannte Zahlen, sowohl positive alt negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von

x gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemerken, daß wenn $xx + px$ ein wirkliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte, beyderseits die Quadrat-Wurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx + px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wenn die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nemlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x + n$ seyn wird $xx + 2nx + nn$. Da wir nun auf einer Seite schon $xx + px$ haben, so können wir xx als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil seyn; dahero der andere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie denn auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx + px + \frac{1}{4}pp$ ein würkliches

Quadrat ist, wovon die Wurzel $x+\frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx+px=q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren, und da bekommen wir $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber bloß bekannte Zahlen befindlich sind. Wenn wir dahero beyderseits die Quadratwurzel nehmen, so erhalten wir $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; und da eine jede Quadrat-Wurzel sowohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen: $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$.

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadrat-Gleichungen aufgelößt werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genug, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtnisse wohl einpräge. Man kan demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat xx auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung

chung diese Form erhalten wird: $xx = -px + q$ wovon der Werth von x sogleich also hingeschrieben werden kann: $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen, um die Gleichung $xx = -px + q$ aufzulösen.

Man sieht nemlich, daß die unbekannte Zahl x gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch + oder − der Quadrat-Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl, so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wann dahero diese Gleichung vorkäme $xx = 6x + 7$, so würde man sogleich haben $x = 3 + \sqrt{(9+7)} = 3 \pm 4$: folglich sind die beyden Werthe von x I.) $x = 7$, und II) $x = -1$.

Hätte man diese Gleichung $xx = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{(25-9)}$, welches $= 5 \pm 4$; dahero die beyden Werthe seyn werden $x = 9$ und $x = 1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende

folgende Fälle unterschieden werden: I.) wenn p eine gerade Zahl ist, II.) wenn p eine ungerade Zahl ist, und III.) wenn p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:

$xx = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm \sqrt{(pp+q)}$:

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da dann seyn wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadrat-Wurzel gezogen werden kann, so bekommt man $x = \frac{1}{2}p \pm \frac{(\sqrt{pp+4q})}{2}$, oder $x = \frac{p \pm \sqrt{(pp+4q)}}{2}$.

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung $axx = bx + c$, oder $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, so wird nach der Regel $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a})}$. Da nun aber $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$ und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}$.

83.

Der andere Weg, welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nemlich:

$xx = px + q$ in eine reine verwandele, welches geschiehet, wenn man anstatt der unbekannten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man denn, wenn y gefunden worden, auch sogleich den Werth von x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen:

$$yy + py + \tfrac{1}{4}pp = py + \tfrac{1}{2}pp + q.$$

subtrahirt man hier erstlich py, so hat man

$$yy + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{2}pp + q$$

ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine Quadratische Gleichung ist, woraus man sogleich erhält $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig, als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere, und ihr Product macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x+6$ und ihr Product $xx+6x=91$.
Man subtrahire $6x$, so hat man $xx=-6x+91$, und nach der Regel $x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm10$, dahero hat man entweder $x=7$ oder $x=-13$.

Antwort: Die Frage hat also zwey Auflösungen; nach der ersten ist die kleinere Zahl $x=7$, die größere $x+6=13$; nach der andern aber ist die kleinere $x=-13$ und die größere $x+6=-7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahire, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23: welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx-9$ über 100 um $xx-109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23-x$; woraus diese Gleichung entsteht $xx-109=23-x$.
Man addire 109, so wird $xx=-x+132$, folglich nach der Regel $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+132)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$.
Also ist entweder $x=11$, oder $x=-12$.

Antwort: Wenn nun eine positive Antwort ver-

verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl 11 ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire, und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen.

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}$ xx giebt; also soll $\frac{1}{6}$ xx + $\frac{1}{2}$ x = 30 seyn; mit 6 multiplicirt, wird xx + 3x = 180, oder xx = − 3x + 180, woraus man findet

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$.

Dahero ist entweder x = 12 oder x = −15.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Duplo, wenn ich ihre Summe zu ihrem Product addire, daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere 2x, ihr Product 2xx, dazu ihre Summe 3x addirt, soll geben 90. Also 2xx + 3x = 90, und 3x subtrahirt, 2xx = − 3x + 90

durch

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x+6$ und ihr Product $xx+6x=91$.
Man subtrahire $6x$, so hat man $xx=-6x+91$, und nach der Regel $x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm10$, dahero hat man entweder $x=7$ oder $x=-13$.

Antwort: Die Frage hat also zwey Auflösungen; nach der ersten ist die kleinere Zahl $x=7$, die größere $x+6=13$; nach der andern aber ist die kleinere $x=-13$ und die größere $x+6=-7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahire, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23: welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx-9$ über 100 um $xx-109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23-x$; woraus diese Gleichung entsteht $xx-109=23-x$.
Man addire 109, so wird $xx=-x+132$, folglich nach der Regel $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+132)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$.
Also ist entweder $x=11$, oder $x=-12$.

Antwort: Wenn nun eine positive Antwort ver-

verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl 11 ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire, und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen.

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}$ xx giebt; also soll $\frac{1}{6}$ xx + $\frac{1}{2}$ x = 30 seyn; mit 6 multiplicirt, wird xx + 3x = 180, oder xx = − 3x + 180, woraus man findet

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$.

Dahero ist entweder x = 12 oder x = −15.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Duplo, wenn ich ihre Summe zu ihrem Product addire, daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere 2x, ihr Product 2xx, dazu ihre Summe 3x addirt, soll geben 90. Also 2xx + 3x = 90, und 3x subtrahirt, 2xx = − 3x + 90

durch

durch 2 dividirt, giebt $xx = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{10} + 45)} = -\frac{3}{4} + \frac{27}{4}$.
Dahero ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthlr., verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthlr. als das Pferd gekostet; nun ist die Frage: wie theuer dasselbe eingekauft worden?

Das Pferd habe gekostet x Rthlr., weil er nun darauf x Procent gewonnen, so setze man, mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x + \frac{xx}{100} = 119$.
Man subtrahire x, so kommt $\frac{xx}{100} = -x + 119$, und mit 100 multiplicirt, wird $xx = -100x + 11900$, woraus nach der Regel gefunden wird
$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120$.

Antwort: Das Pferd hat also gekostet 70 Rthlr., weil er nun darauf 70 Procent gewonnen,

so

so war der Gewinnst 49 Rthlr. Er muß also dasselbe verkauft haben vor 70+49, das ist, für 119 Rthlr., wie wirklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewisse Anzahl Tücher: das erste Stück für 2 Rthlr., das zweite für 4 Rthlr., das dritte für 6 Rthlr. und immer 2 Rthlr. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthlr. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:

für das 1, 2, 3, 4, 5 ... x
zahlt er 2, 4, 6, 8, 10 ... 2x Rthlr.

Man muß also diese Arithmetische Progression 2+4+6+8+10+ .... 2x welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preis aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man 2x+2. Dieses multiplicire man mit der Zahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe 2xx+2x. Daherο die Summe selbst seyn wird xx+x, welche

dem

dem 110 gleich seyn muß, oder $xx + x = 110$.

Man subtrahire x, so wird $xx = -x + 110$, folglich $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 110)}$ oder $= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}}$ oder $x = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$.

Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthlr. wären der Tücher vor eben das Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Rthlr. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, so hat das Stück wirklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthlr. Hätte er aber $x + 3$ Stück für 180 Rthlr. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthlr., welcher Preis um 3 Rthlr. weniger ist, als der wirkliche, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$.

Man multiplicire mit x so kommt $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$

durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$

mit $x + 3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - xx$

man

man addire xx, so kommt $xx + 60x = 180 + 57x$. Man subtrahire $60x$, so kommt $xx = -3x + 180$. Hieraus nach der Regel

$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)}$, oder $x = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthlr. gekauft worden, dahero eines gekostet 15 Rthlr. Hätte man aber 3 Stück mehr, nemlich 15 Stück für 180 Rthlr. bekommen, so würde 1 Stück 12 Rthlr. gekostet haben, folglich 3 Rthlr. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthlr. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monat lang, der zweyte aber 2 Monat stehen, und es zieht ein jeder mit Capital und Gewinnst 99 Rthlr.; wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthlr. und also der zweyte $100 - x$: da nun der erste 99 Rthlr. zurückzieht, so ist sein Gewinn $99 - x$, welcher in 3 Monaten mit dem Capital x ist erworben worden, da der zweyte auch 99 Rthlr. zurückzieht, so war sein Gewinn $x - 1$, welcher in zwey Monaten mit dem

dem Capital $100 - x$ erworben worden: mit eben diesem Capital $100 - x$ würden also in 3 Monaten gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$. Nun sind diese Gewinnste denen Capitalen proportional, nemlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinnst, wie dieses Capital zu diesem Gewinnst; also

$$x : 99 - x \;\ldots\; 100 - x : \frac{3x-3}{2},$$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx-3x}{2} = 9900 - 199x + xx$ und mit 2 multiplicirt $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$; man subtrahire $2xx$, so kommt $xx - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt $xx = -395x + 19800$. Dahero nach der Regel $x = -\frac{395}{2} + \sqrt{\left(\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4}\right)}$ das ist $x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Antwort: Der erste hat also eingelegt 45 Rthlr. und der zweyte 55 Rthlr., mit den 45 Rthlr. hat der erste in 3 Monat gewonnen 54 Rthlr., würde demnach in einem Monate gewonnen haben 18 Rthlr. Der zweyte aber gewinnt mit 55 Rthlr. in 2 Monat 44 Rthlr., würde also in einem Monate gewonnen haben 22 Rthlr., welches auch mit jenem übereinstimmt; denn wann mit 45 Rthlr. gewonnen

nen werden 18 in einem Monate, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthlr.

92

IX. Frage: Zwey Bäuerinnen taagen zusammen 100 Eyer auf den Markt, eine mehr als die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld: Spricht die erste zu der andern, hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelößt; darauf antwortete die andere, hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelößt: wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere $100-x$.

Also da nun die erste $100-x$ Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regel detri $100-x:15=x$ zur Antwort: $\frac{15x}{100-x}$ Kreuzer.

Eben so bey der andern, welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren $100-x$ Eyer gelöset, $x:\frac{20}{3}=100-x$ zur Antwort $\frac{2000-20x}{3x}$. Da nun die beiden Bäuerinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{2000-20x}{3x}$$

mit

mit 3x multiplicirt, kommt $2000-20x = \frac{45xx}{100-x}$,
mit $100-x$ multiplicirt,
$45xx = 200000-4000x+20xx$,
$20xx$ subtrahirt, $25xx = 200000-4000x$,
durch 25 dividirt $xx = -160x-8000$: daherv nach der Regel
$x = -80+\sqrt{(6400+8000)} = -80+120 = 40$.

Antwort: Die erste Bäuerin hat also gehabt 40 und die andere 60 Eyer, und es hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkaufen etliche Ellen Zeug, der zweyte drey Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35. Rthlr. Spricht der erste zum zweyten: Aus deinem Zeuge wollt ich gelöset haben 24 Rthlr., antwortet der zweyte, so hätte ich aus deinem $12\frac{1}{2}$ Rthlr. gelöset; wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der zweyte $x+3$ Ellen. Da nun der erste aus $x+3$ Ellen 24 Rthlr. gelößt hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthlr., und da der zweyte x Ellen für $12\frac{1}{2}$ Rthlr. verkauft, so

hätte

hätte er seine $x+3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x+75}{2x}$; und so haben beide zusammen gelößt $\frac{24x}{x+2}+\frac{25x+75}{2x}=$ 35 Rthlr.

Also $\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x$.

oder $\frac{48xx}{x+3}=45x-75$, mit $x+3$ multiplicirt wird $48xx=45xx+60x-225$, subtrahirt $45xx$, so hat man $3xx=x-225$ oder $xx=20x-75$.

Hieraus wird $x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm\sqrt{25}$: also $x=10\pm5$:

Antwort: Es giebt daher zwey Auflösungen: Nach der ersten hat der erste 15 und der andere 18 Ellen: weil nun der erste 18 Ellen verkauft hat vor 24 Rthlr., so hat er aus seinen 15 Ellen gelößt 20 Rthlr. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthlr., hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthlr. also beyde zusammen 35 Rthlr.

Nach der andern Auflösung hat der erste 5 und der andere 8 Ellen gehabt: also hätte der erste 8 Ellen für 24 Rthlr. verkauft, und hat aus seinen 5 Ellen gelöst 15 Rthlr.; der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthlr., hat also aus seinen 8 Ellen gelöst 20 Rthlr., folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthlr.

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigten Zahlen.

94.

Wir haben oben gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen; was wir aber daselbst eine Seite genennt haben, wird auch eine Wurzel genannt. Wenn nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden:

Das 3eck ist $\frac{xx+x}{2}$
" " 4eck " xx
" " 5eck " $\frac{3xx-x}{2}$
" " 6eck " $2xx-x$
" " 7eck " $\frac{5xx-3x}{2}$
" " 8eck " $3xx-2x$
" " 9eck " $\frac{7xx-5x}{2}$
" " 10eck " $4xx-3x$
" " neck " $\frac{(n-2)\,xx-(n-4)\,x}{2}$

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite oder Wurzel eine verlangte vieleckigte Zahl, so groß auch dieselbe seyn mag, zu finden, wie schon oben genugsam gezeigt worden. Wenn aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewissen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung Quadratischer Gleichungen erfordert, dahero diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hierbey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2, so hat man $xx + x = 182$, woraus gefunden wird $xx + x = +182$, und also $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 182)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}}$ folglich $x = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13$; dahero ist die verlangte Dreiecks-Wurzel $= 13$, denn das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$ so wird $\frac{xx+x}{2} = a$, oder $xx + x = 2a$, oder ferner $xx = -x + 2a$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)}$, oder $x = \frac{-1+\sqrt{(8a+1)}}{2}$.

Hieraus entspringt diese Regel: Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8 und zum Product addire 1, aus der Summe ziehe man die Quadrat-Wurzel, von derselben subtrahire 1, den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyecks-Wurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man, daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wenn man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt, immer eine Quadratzahl herauskommen müsse, wie aus folgendem Täfelgen zu ersehen:

III. Eck. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, &c.
8 mahl + 1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, &c.

Ist

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine wirkliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyecks-Wurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a + 1 = 1681$ wovon die Quadrat-Wurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 würklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational: Es wird aber auch wirklich von dieser Wurzel, nemlich $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck gefunden, wie folget: Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ so ist $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; dazu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Dann setzt man die gegebene viereckigte Zahl $= a$

und

und ihre Vierecks-Wurzel $= x$, so wird $xx = a$ und $x = \sqrt{a}$. Also daß die Quadrat- und Vierecks-Wurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl, und die Wurzel derselben $= x$, so muß seyn $\frac{3xx-x}{3} = 22$, oder $3xx - x = 44$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{(529)}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Also ist 4 die gesuchte Fünfecks-Wurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun diese Frage vorgelegt: wenn das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a$, oder $3xx - x = 2a$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3})}$ das ist $x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}$. Wann dahero a ein wirkliches Fünfeck ist, so muß $24a + 1$ immer eine Quadratzahl seyn.

Es

Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$ so wird $2xx - x = a$, oder $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, dahero gefunden wird $x = \frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a)} = \frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}$. Wenn also a ein wirkliches Sechseck ist, so muß $8a + 1$ ein Quadrat werden, woraus man sieht, daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll:

Setzt man diese Wurzel $= x$ so hat man $\frac{5xx-3x}{2} = a$, oder $5xx - 3x = 2a$, also $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird $x = \frac{3}{10} + \sqrt{(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a)} = \frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}$.

Alle

Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach so beschaffen, daß wenn man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadratzahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3+\sqrt{(82369)}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat dahero $3xx - 2x = a$, oder $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{a}{3})} = \frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}$. Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wenn man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt, die Summe immer eine Quadratzahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung.

(n—2)

$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}=a$, oder $(n-2)xx-(n-4)x=2a$, also

$xx=\frac{(n-4)x}{n-2}+\frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird

$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{(\frac{(n-4)}{2(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2})}$, oder

$x=\frac{n-4}{2(n-2)}+\sqrt{(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{8.(n-2)a}{4.(n-2)^2})}$ und folglich

$x=\frac{n-4+\sqrt{(8.(n-2)a+(n-4)^2)}}{2.(n-2)}$.

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält, um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a=3009$ und $n=24$, folglich $n-2=22$ und $n-4=20$ so bekommen wir die Wurzel

$x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17$.

Erster Abschnitt.

Capitel 8.

Von der Ausziehung der Quadrat-Wurzeln aus Binomien.

107.

Ein Binomium wird in der Algebra eine aus zwey Theilen bestehende Zahl genennt, wovon eine oder auch beyde das quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es ist gleich viel, ob diese beyde Theile mit dem Zeichen + oder — verbunden sind. Dahero wird $3-\sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt, als $3+\sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merkwürdig, weil man bey Auflösung der quadratischen Gleichungen jedesmal auf solche Formeln kommt, so oft die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wenn z. E. diese Gleichung vorkommt $xx=6x-4$, so wird dann $x=3+\sqrt{5}$. Um

dieser

dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häufig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operation der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie wie aus solchen Formeln auch die Quadrat-Wurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine solche Ausziehung statt findet, indem widrigenfalls nur noch ein Wurzel-Zeichen vorgesetzt wird, nemlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadrat-Wurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemerken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Dann sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Wenn also von dieser Formel $(aa+b)+2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadrat-Wurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a+\sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreiffen ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

Eben

Eben ſo, wenn man von dieſer Formel $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, ſo wird daſſelbe $(a+b)+2\sqrt{ab}$, dahero auch umgekehrt von dieſer Formel $(a+b)+2\sqrt{ab}$ die Quadrat-Wurzel ſeyn wird $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ welche wiederum verſtändlicher iſt, als wenn man vor jene noch das $\sqrt{}$ Zeichen ſetzen wollte.

110.

Es kommt dahero darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden ſey, woraus in einem jeglichen Falle beurtheilet werden kann, ob eine ſolche Quadrat-Wurzel ſtatt finde oder nicht. Wir wollen zu dieſem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen und ſehen, ob man aus dieſem Binomio $5+2\sqrt{6}$ ſolchergeſtalt die Quadrat-Wurzel finden könne:

Man ſetze alſo dieſe Wurzel ſey $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x+y)+2\sqrt{xy}$ iſt, alſo muß dieſes Quadrat jener Formel $5+2\sqrt{6}$ gleich ſeyn; folglich der rationale Theil $x+y$ muß gleich ſeyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich ſeyn $2\sqrt{6}$; dahero bekommt man $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ und die Quadrate genommen $xy=6$. Da nun $x+y=5$, ſo wird hieraus $y=5-x$ welcher Werth in der Gleichung $xy=6$ geſetzt giebt $5x-xx=6$

oder $xx = 5x - 6$, dahero $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$; also $x = 3$ und $y = 2$, folglich wird aus $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

III.

Da wir hier diese beide Gleichungen erhalten haben I.) $x + y = 5$ und II.) $xy = 6$, so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x + y = 5$ so nehme man die Quadrate $xx + 2xy + yy = 25$. Nun bemerke man, daß $xx - 2xy + yy$ das Quadrat von $x - y$ ist; man subtrahire dahero von jener Gleichung, nemlich von $xx + 2xy + yy = 25$, diese $xy = 6$ vier mal genommen oder $4xy = 24$, so erhält man $xx - 2xy + yy = 1$ und hieraus die Quadrat-Wurzel $x - y = 1$, so wird, weil $x + y = 5$ ist, gefunden $x = 3$ und $y = 2$. Dahero die gesuchte Quadrat-Wurzel von $5 + 2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a + \sqrt{b}$ betrachten, und die Quadrat-Wurzel davon $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung $(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, also $x + y$ [illegible] $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$

oder

oder $4xy = b$: von jener ist das Quadrat $xx+2xy+yy = aa$ wovon diese $4xy = b$ subtrahirt, giebt $xx-2xy+yy = aa-b$, und wovon die Quadrat-Wurzel ist $x-y = \sqrt{(aa-b)}$. Da nun $x+y = a$, so finden wir $x = \frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$ und $y = \frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$ dahero die verlangte Quadrat-Wurzel aus $a+\sqrt{b}$ seyn wird: $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wenn man für das gegebene Binomium $a+\sqrt{b}$ schlecht weg das Wurzel-Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt hätte, nemlich $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa-b$ ein Quadrat wird, weil alsdann das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel bequem ausziehen könne, wann $aa-b = cc$, denn alsdann wird die gesuchte Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wann aber $aa-b$ keine Quadrat-Zahl ist, so läßt sich die Quadrat-Wurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$ Zeichens.

114.

114.

Daherо erhalten wir diese Regel, um aus einem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nemlich erfordert, daß $aa-b$ eine Quadrat-Zahl sey: ist nun dieselbe $=cc$, so wird die verlangte Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wobey noch anzumerken, daß von $a-\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel seyn werde $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Dann nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; da nun $cc=aa-b$, so ist $aa-cc=b$: dahero dieses Quadrat $=a-2\sqrt{\frac{3}{4}}=a-\frac{\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}$.

115.

Wenn also aus einem solchen Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b: aus dem Rest ziehe man die Quadrat-Wurzel, welche $=c$ sey, so ist die verlangte Quadrat-Wurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

116.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $2+\sqrt{3}$ so ist $a=2$ und $b=3$; dahero $aa-b=cc=1$ und

also $c = 1$: dahero die verlangte Quadrat-Wurzel ist $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11 + 6\sqrt{2}$, woraus die Quadrat-Wurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; dahero $b = 36.2 = 72$ und $aa - b = 49$ folglich $c = 7$. Dahero die Quadrat-Wurzel aus $11 + 6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Man suche die Quadrat Wurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$: Hier ist $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, dahero $b = 4.30 = 120$ und $aa - b = 1$ und $c = 1$; folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wenn sogar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wenn also gegeben ist dieses Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; dahero $b = -48$ und $aa - b = 49$, dahero $c = 7$; folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4}.-3 = -\frac{3}{4}$ dahero

hero $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$: folglich ist die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Noch ist dieses Exempel merkwürdig, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadrat-Wurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $b = 2\sqrt{-1}$ dahero $b = -4$ und $aa - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadrat-Wurzel ist $\sqrt{1 + \sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1}$ wovon das Quadrat ist $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie $xx = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $aa - b = cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sey z. E. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$ so wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

119.

Dieses findet insonderheit bey der Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grade statt,

als: $x^4 = 2ax x + d$. Dann setzt man hier $xx = y$ so wird $x^4 = yy$, dahero unsere Gleichung ist $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(aa + d}$: dahero für die erste Gleichung seyn wird $xx = a + \sqrt{(aa + d}$, woraus folglich noch die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)}$ also $b = aa + d$, so wird $aa - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat, nemlich cc oder $d = -cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d = -cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grade vorgegeben $x^4 = 2axx - cc$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

120.

Wir wollen dieses durch folgende Exempel erläutern:

I. Erstlich suche man zwey Zahlen deren Product sey 105, und wann man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe $= 274$?

Man setze diese Zahlen seyn x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen I. $xy = 105$ und II. $xx + yy = 274$.

Aus

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$. mit xx multiplicirt, wird: $xx + 105^2 = 274\,xx$ oder $x^4 = 274\,x^4 - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; dahero $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137 + 105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137 - 105}{2}} = 11 \pm 4;$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Falle wird $y = 7$, im letztern aber $y = 15$. Dahero sind die beyden gesuchten Zahlen 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemerken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Dann da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein Quadrat ist, wir aber wissen, was sowohl $xx + yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, sowohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen:

$xx + yy = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt $xx + 2xy + yy = 484$ und $x + y = 22$,

darnach 2xy subtrahirt, giebt $xx - 2xy + yy = 64$ und $x - y = 8$. Also $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann die allgemeine Frage auch aufgelöst werden:

II. Man suche 2 Zahlen, davon das Product $= m$, und die Summe ihrer Quadraten $= n$?

Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so hat man die zwey folgenden Gleichungen I. $xy = m$, II. $xx + yy = n$. Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich 2xy addirt, wird $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$. Hiervon 2xy subtrahirt, giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$; also $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} - \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$.

122.

III. Es sey ferner die Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $= 35$ und die Differenz ihrer Quadraten $= 24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beiden Gleichungen $xy = 35$ und $xx - yy = 24$, da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach

der

der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4 - 1225 = 24xx$ und $4^4 = 24xx + 1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen plus hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nemlich $cc = -1225$, und also c imaginair würde.

Man setze dahero $xx = z$, so hat man $zz = 24z + 1225$, woraus gefunden wird $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ oder $z = 12 \pm 37$, dahero $xx = 12 \pm 37$, das ist entweder $xx = 49$ oder $xx = -25$.

Nach dem ersten Werthe wird $x = 7$ und $y = 5$. Nach dem andern aber wird $x = \sqrt{-25}$ und $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$, oder $y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, oder $y = \sqrt{-49}$.

132.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müssen

müssen diese drey Formeln einander gleich seyn: I. Summe $x+y$; II. Product xy; III. Differenz der Quadraten $xx-yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x+y=xy$ und daraus suche man x. Man wird also haben $y=xy-x$ oder $y=x(y-1)$ und daraus wird $x=\frac{y}{y-1}$; dahero wird $x+y=\frac{yy}{y-1}$ und $xy=\frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Producte schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber $xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$, welches dem obigen Werthe $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; dahero bekommt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt, wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmahls mit $y-1$ multiplicirt, giebt $y-1=-yy+2y$: folglich $yy=y+1$. Hieraus findet man $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+1)}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ oder $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: und dahero erhalten wir $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicire man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ant-

Antwort: Also die größere der gesuchten Zahlen wäre $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe ist also $x + y = 2 + \sqrt{5}$, ferner das Product $xy = 2 + \sqrt{5}$ und da $xx = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $yy = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, so wird die Differenz der Quadraten $xx - yy = 2 + \sqrt{5}$ seyn

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam ist, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x + y$, der Differenz der Quadraten $xx - yy$ gleich, so hat man $x + y = xx - yy$. Hier kann man durch $x + y$ dividiren, weil $xx - yy = (x + y)(x - y)$, und da erhält man $1 = x - y$ woraus $x = y + 1$; dahero $x + y = 2y + 1$ und $xx - yy = 2y + 1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $xy = yy + y$. Man hat also $yy + y = 2y + 1$, oder $yy = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage: Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadrate einander gleich seyn?

Die

Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so müssen diese drey Formeln einander gleich seyn I. $x+y$, II. xy, und III. $xx+yy$.

Setzt man die 1ste der 2ten gleich $x+y=xy$, so findet man daraus $x=\frac{y}{y-1}$ und $x+y=\frac{yy}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx+yy=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, welches dem $\frac{yy}{y-1}$ gleich zu setzen.

Man multiplicire mit $yy-2y+1$, so bekommt man $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$ oder $y^4=3y^3-3yy$, und durch yy dividirt $yy=3y-3$; dahero $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-3)}$, also $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, dahero $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, folglich $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1-\sqrt{-3}$, so wird $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$, oder $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: Also sind die beiden gesuchten Zahlen $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ und $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe ist $x+y=3$, das Product $xy=3$, und da endlich $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ und $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $xx+yy=3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welcher noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darinn, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p+q$ und die andere $p-q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp-qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp+2qq$ welche drey Stücke einander gleich seyn müssen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p = pp-qq$ und daraus $qq = pp-2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp-4p$. welches dem ersten gleich gesetzt, giebt $2p = 4pp-4p$. Man addire $4p$ so wird $6p = 4pp$, durch p dividirt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus $qq = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p+q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p-q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

Capi=

Capitel 9.

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die quadratischen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwägung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen dahero genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulasse, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl sowohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden lassen; dahero wird es gut seyn den Grund

davon

davon noch auf eine andere Art deutlicher vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären woher es komme, daß eine quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x sowohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern o zu stehen kommt. Dahero die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche, wann sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ wirklich in nichts verwandelt; und hernach wird auch die Ursache gezeigt werden warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deut-

deutlich zeige, wie eine solche Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus 2 Factoren angesehen werden könne, wie dann diese Formel wirklich aus diesen 2 Factoren besteht $(x-5).(x-7)$. Wann daher jene Formel soll 0 werden, so muß auch dieses Product $(x-5).(x-7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit 0, wann nur einer von seinen Factoren 0 wird. Dann so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wann dasselbe noch mit 0 multiplicirt wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grundsatz für die höhern Gleichungen wohl zu bemercken ist.

131.

Hieraus begreift man nun ganz deutlich, daß dieses Product $(x-5).x-7)$ auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmahl nemlich, wann der erste Factor $x - 5 = 0$ wird, und hernach auch, wann der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschiehet wann $x = 5$, das andere aber wann $x = 7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx - 12x + 35 = 0$, zweyerley Auflösungen zu-

läßt, oder für x 2 Werthe gefunden werden können, welche beide der Gleichung ein Genüge leisten.

Der Grund besteht nemlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen quadratischen Gleichungen statt. Dann wann alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Formel $xx - ax + b = o$; und diese Formel kann ebenfalls als ein Product aus 2 Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x - p)\ (x - q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q für Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product o gleich werde, so ist deutlich daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wann $x = p$ und zweytens wann $x = q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müssen, daß derselben Product genau

unsere

unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben wirklich, so erhält man $xx - (p+q)x + pq$, welches, da es einerley seyn soll mit $xx - ax + b$, so ist es klar daß seyn muß $p+q = a$ und $pq = b$, woraus wir die vortheilhafte Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = o$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Dahero sobald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht den andern zu finden.

134.

Dieses ist der Fall wann beyde Werthe für x positiv sind, da dann in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen —, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen dahero auch die Fälle erwägen, worinn einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wann die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x-p)(x+q)$; woher diese 2 Werthe für x entspringen, erstlich $x = p$ und zweytens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist

alsdann $xx + (q - p)x - pq = o$, wo das 2te Glied das Zeichen + hat, wann nemlich q gröſſer ist als p; wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen —, das drittte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x + p)(x + q)$ so wären beyde Werthe für x negativ, nemlich $x = -p$ und $x = -q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx + (p + q)x + pq = o$, wo sowohl das 2te als 3te Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeden quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \ldots ax \ldots b = o$, wann nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beyde Werthe negativ; ist das 2te Glied —, das dritte aber + so sind beyde Werthe positiv; ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das 2te Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

136.

Jetzo ist es ganz leicht solche quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene Werthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber -3, so mache man daraus diese einfache Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$; hieraus ferner diese $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden; also daß die Gleichung seyn wird $xx - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regul eben diese beyden Werthe für x gefunden werden. Dann da $xx = 4x + 21$, so wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, also $x = 2 \pm 5$, also entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nemlich eine Gleichung wo beide Werthe für x sind $x = 5$; so werden die beyde Factoren seyn $(x-5)(x-5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $xx - 10x + 25 = 0$, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird $x = 5$, wie

auch

auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Dann da $xx = 10x - 25$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$ und daherd wird $x = 5$ und $x = 5$.

138.

Insonderheit ist hier noch zu merken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen, welcher der Gleichung ein Genüge leistet, wie z. E. geschiehet, wenn die Zahl 10 in zwey solche Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey: dann sey es ein Theil $= x$, so wird der andere seyn $10 - x$ und also ihr Product $10x - xx = 30$, folglich $xx = 10x - 30$ und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist, und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine quadratische Gleichung möglich sey oder nicht. Es sey daher diese allgemeine Gleichung gegeben: $xx - ax + b = 0$, so wird $xx = ax - b$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$; woraus erhellet, daß wenn die Zahl

b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder 4b größer als aa, die beyden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beyden Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder nicht, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $=a$ und ihr Product $=b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx-6x+10=0$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $=6$ und das Product $=10$. Man findet aber diese beyden Werthe: I.) $x=3+\sqrt{-1}$ und II.) $x=3-\sqrt{-1}$, deren Summe $=6$ und ihr Product $=10$ ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewandt werden kann $fxx+gx+h=0$: denn hieraus hat man $xx=\mp\frac{gx}{f}-\frac{h}{f}$ dahero $x=\mp\frac{g}{2f}+\sqrt{\left(\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}\right)}$, oder $x=\frac{\mp g+\sqrt{(gg-4fh)}}{2f}$, woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die

Gleichung

Gleichung unmöglich werde, wenn 4fh größer ist als g, oder wenn in dieser Gleichung $fxx+gx+h=0$ das vierfache Product aus dem ersten und letzten Gliede größer ist, als das Quadrat des zweyten Gliedes. Denn das vierfache Product aus dem ersten und letzten Gliede ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Gliedes ist $ggxx$: wenn nun $4fhxx$ größer ist als $ggxx$, so ist auch $4fh$ größer als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beyden Werthe für x können wirklich angegeben werden, wenn dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werthe gelangen kann, wie oben bemerket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grade $xx+ax+b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores $(x+p)(x+q)$ aufgelöst werden kann. Denn wenn man

drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grade kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grade ansteigen. Daher es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grade nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr noch weniger seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wenn diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wenn er gleich o gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß, sobald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der quadratischen Gleichung erkannt werde. Denn wenn $x = p$ ein Werth für x in einer quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung gegeben:

gegeben: $xx+4x-21=0$, von welcher wir wiſſen, daß $x=3$ ein Werth für x ſey, indem $3.3+4.3-21=0$ iſt, und dahero können wir ſicher ſchließen, daß $x-3$ ein Factor dieſer Gleichung ſey, oder daß ſich $xx+4x-21$ durch $x-3$ theilen laſſe, wie aus dieſer Diviſion zu erſehen.

$$
\begin{array}{l}
x-3)\ xx+4x-21\ (x+7 \\
\quad xx-3x \\
\hline
\qquad 7x-21 \\
\qquad 7x-21 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Alſo iſt der andere Factor $x+7$ und unſere Gleichung wird durch dieſes Product vorgeſtellt $(x-3)(x+7)=0$ woraus die beyden Werthe für x ſogleich erhellen, da nemlich aus dem erſten Factor $x=3$ aus dem andern aber $x=-7$ wird.

Capitel 10.

Von der Auflösung der reinen Cubischen Gleichungen.

144.

Eine reine Cubische Gleichung wird genennt, wenn der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt:

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbar indem man nur nöthig hat beiderseits die Cubic-Wurzel auszuziehen:

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber, hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

oder

oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wann man dahero nur gelernet hat die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solchergestalt erhält man aber nur einen Werth für x; da nun eine jegliche quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine Cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müsse; dahero wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Falle eine solche Gleichung mehr Werth für x haben sollte, dieselben auch ausfindig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey; da nun eine solche Zahl ohnstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitel die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen lassen: wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget.

$$\begin{array}{l} x-2)x^3-8\,(xx+2x+4 \\ \quad x^3-2xx \\ \quad\overline{\quad\quad 2xx-8} \\ \quad\quad 2xx-4x \\ \quad\quad\overline{\quad\quad\quad -4x-8} \\ \quad\quad\quad 4x-8 \\ \quad\quad\quad\overline{\quad\quad 0} \end{array}$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3-8=0$ durch diese Factores vorstellen $(x-2)(xx+2x+4)=0$.

148.

Da nun die Frage ist, was für eine Zahl für x angenommen werden müsse, daß $x^3=8$ werde, oder daß $x^3-8=0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wann das gefundene Product gleich 0 werde: dasselbe wird aber 0, nicht nur wenn der erste Factor $x-2=0$ wird, woraus entspringt $x=2$, sondern auch, wenn der andere Factor $xx+2x+4=0$ werde. Man setze also $xx+2x+4=0$, so hat man $xx=-2x-4$ und daher wird $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

149.

Außer dem Falle also $x=2$ in welchem die Gleichung $x^3=8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey

andere

andere Werthe für x, deren Cubi ebenfalls 8 sind, und welche also beschaffen sind:

I.) $x = -1+\sqrt{-3}$ und II.) $x = -1-\sqrt{-3}$

welches außer Zweifel gesetzt wird, wenn man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$1-\sqrt{-3}$	$1+\sqrt{-3}$
$-\sqrt{-3}-3$	$+\sqrt{-3}-3$
$-2-2\sqrt{-3}$ Quadrat	$-2+2\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$	$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}+6$	$+2\sqrt{-3}+6$
8 Cubus	8

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemerket zu werden.

105.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleichen Cubische Gleichung $x^3 = a$, wo außer dem Werthe $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfalls

statt

statt finden. Man setze um der Kürze willen $\sqrt[3]{a} = c$ also daß $a = c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme, $x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$\begin{array}{l} x-c)x^3-c^3(xx+cx+cc \\ \quad x^3-cxx \\ \hline \quad\quad cxx-c^3 \\ \quad\quad cxx-ccx \\ \hline \quad\quad\quad ccx-c^3 \\ \quad\quad\quad ccx-c^3 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

dahero wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt $(x-c)(xx+cx+cc) = 0$, welches wirklich gleich 0 wird, nicht nur wenn $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch wenn $xx + cx + cc = 0$, daraus aber wird $xx = -cx - cc$ und dahero $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{(\frac{cc}{4} - cc)}$ oder $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$ das ist $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c$, in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten sind.

151.

Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir dahero diesen Schluß, daß von einer jeden Cubischen

Cubischen Gleichung von dieser Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

I.) $x = \sqrt[3]{a}$, II.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$, III. $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubic-Wurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bewerken ist, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grade vier verschiedene Werthe, vom fünften Grade fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen wird zwar nur der erste von diesen drey Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey x, so muß xx mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: dahero wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$

mit 4 multiplicirt $x^3 = 1728$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12, denn ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen, erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monats-Sold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monatliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen.

Es seyn x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt 3x Reuter und 20x Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war 3xx und der Fußgänger 20xx. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}$x Fl., so ist der monatliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl., der Fußknechte aber $10x^3$ Fl., insgesammt also bekommen sie $13x^3$ Fl., so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also $13x^3=13000$, so wird $x^3=1000$ und $x=10$. So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel als ihrer sind, er kommt wieder zurück, und der Gewinnst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyn x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt 100x Fl. und das ganze Capital war 100xx Fl. Da nun mit 100 Fl. 2x Fl. gewonnen worden, so war der Gewinst $2x^3$ so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also $2x^3=2662$, dahero $x^3=1331$ und folglich $x=11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

156.

V. Frage: Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hüner, giebt je 2 Käse für 3 Hüner: die Hüner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hüner sind, mit denselben geht sie auf den Markt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfenning als ein Huhn hat Eyer gelegt, und löset 72 Pfenninge: wie viel hat die Bäuerin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}$x Hüner vertauscht worden: da nun ein Huhn $\frac{1}{2}$x Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}$xx. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}$x Pf., also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3=72$, folglich $x^3=24.72=8.3.8.9$ oder $x=8.8.27$, folglich $x=12$, und so viel Käse hat die Bäuerin gehabt, welche gegen 18 Hüner vertauscht worden.

Capitel II.

Von der Auflösung der vollständigen Cubischen Gleichungen.

157.

Eine vollständige Cubische Gleichung wird genennt, wenn darinn außer dem Cubo der unbekannten Zahl, noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, dahero die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$ax^3 \pm bx^2 + cx + d = o$ wenn nemlich alle Glieder auf eine Seite gebracht worden sind. Wie nun aus einer solchen Gleichung, die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden: denn man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads gezeiget worden ist.

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten: $x^3-6xx+11x-6=0$, und da eine quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese Cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Falle sind: $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen. Dann $(x-1).(x-2)$ giebt $xx-3x+2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt, giebt $x^3-6xx+11x-6$ welches die obige Form ist, so $=0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wenn dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft, wenn nur einer von den drey Factoren $=0$ wird, und also in drey Fällen, erstlich: wenn $x-1=0$, oder $x=1$, zweytens: wenn $x-2=0$, oder $x=2$, und drittens: wenn $x-3=0$ oder $x=3$.

Man sieht auch sogleich, daß wenn für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Dahero unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat, als diese drey.

159.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Falle die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man sogleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p$, $x-q$, $x-r$: man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt $xx-(p+q)x+pq$, so giebt dieses Product noch mit $x-r$ multiplicirt folgende Formel $x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr$. Soll nun diese Formel gleich o seyn, so geschieht dieses in drey Fällen; erstlich wenn $x-p=o$ oder $x=p$, zweytens, wenn $x-q=o$ oder $x=q$ und drittens, wenn $x-r=o$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgendergestalt ausgedrückt $x^3-axx+bx-c=o$, und wenn die Wurzeln derselben sind I.) $x=p$, II.) $x=q$. III.) $x=r$, so muß seyn erstlich $a=p+q+r$, und hernach zweytens $b=pq+pr+qr$, und drittens $c=pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln

und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschaft uns sogleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine Cubische Gleichung gewiß keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: denn da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen lassen. Man weiß dahero sogleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3 = x + 6$, oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3. 6, welche Proben also zu stehen kommen:

I.) wann $x = 1$ so kommt $1 - 1 - 6 = -6$.

II.) wann $x = 2$ so kommt $8 - 2 - 6 = 0$.

III.) wann $x = 3$ so kommt $27 - 3 - 6 = 18$.

VI.) wann $x = 6$ so kommt $216 - 6 - 6 = 204$.

Hier-

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet:

$$
\begin{array}{l}
x-2\,)\,x^3-x-6\,(xx+2x+3 \\
\quad x^3-2xx \\
\quad\quad 2xx-x-6 \\
\quad\quad 2xx-4x \\
\quad\quad\quad 3x-6 \\
\quad\quad\quad 3x-6 \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird $(x-2)(xx+2x+3)$ so wird dieselbe 0, nicht nur wenn $x-2=0$, sondern auch wenn $xx+2x+3=0$. Hieraus aber bekommen wir $xx=-2x-3$ und daher $x=-1\pm\sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die, wie man sieht, unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wenn aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel, die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyt ist, da dann die vorige Probe kann angestellt werden.

Denn es sey diese Gleichung gegeben $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x = \frac{y}{2}$, da bekommt man $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, dahero ist für unsere Gleichung I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

162.

Wenn nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, woraus durch 6 dividirt diese entspringt $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$ welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x = \frac{y}{6}$; dann erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216}$ +

$+\frac{y}{6}-\frac{1}{6}=0$, und dieſe mit 216 multiplicirt, wird $y^3-11yy+36y-36=0$. Hier würde es mühſam ſeyn, die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzuſtellen: weil aber in unſerer erſtern Gleichung das letzte Glied 1 iſt, ſo ſetze man $x=\frac{1}{z}$ ſo wird $\frac{6}{z^3}-\frac{11}{z^2}+\frac{6}{z}-1=0$ welche mit z^3 multiplicirt giebt $6-11z+6z^2-z^3=0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3-6zz+11z-6=0$, deren Wurzeln ſind $z=1$, $z=2$, $z=3$; dahero wir für unſere Gleichung erhalten $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wenn alle Wurzeln poſitive Zahlen ſind, in der Gleichung die Zeichen plus und minus mit einander abwechſeln müſſen, alſo daß die Gleichung eine ſolche Geſtalt bekommt: $x^3-axx+bx-c=0$, wo drey Abwechſelungen vorkommen, nemlich eben ſo viel als poſitive Wurzeln vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ geweſen, und man hätte dieſe drey Factores mit einander multiplicirt $x+p$, $x+q$, $x+r$, ſo würden alle Glieder das Zeichen plus und die Gleichung dieſe Form bekommen haben $x^3+axx+bx+c=0$,

wo

wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln habe, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerkung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wisse, ob man die Theiler des letzten Gliedes, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schließen daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müssen des letzten Gliedes 56, und also unter diesen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$ begriffen sind.

Setzt man nun $x = 2$, so wird $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, woraus wir sehen, daß $x = 2$ eine positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung

sey,

ſey, woraus die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wenn man nur die Gleichung durch $x-2$ theilet, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3+xx-34x+56\ (xx+3x-28 \\
\quad x^3-2xx \\
\quad\quad 3xx-34x+56 \\
\quad\quad 3xx-6x \\
\quad\quad\quad -28x+56 \\
\quad\quad\quad -28x+56 \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Man ſetze alſo dieſen Quotienten $xx+3x-28=0$ ſo wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche ſeyn werden $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, dahero die beyden übrigen Wurzeln ſind $x=4$ und $x=-7$ wozu die obige $x=2$ zu nehmen.

Woraus erhellet, daß wirklich zwey poſitive und und nur eine negative Wurzel vorhanden: dieſes wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es ſind zwey Zahlen, ihre Differenz iſt 12, wenn man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, ſo kommen 14560; welche ſind dieſe Zahlen?

Die

Die kleinere sey x so ist die größere x+12, ihr Product ist xx+12x so mit ihrer Summe 2x+12 multiplicirt giebt $2x^3+36xx+144x=14560$ durch 2 dividirt wird $x^3+18xx+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist, als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x=2y$ da denn kommt: $8y^3+72yy+144y=7280$ welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3+9yy+18y=910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren, welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbar zu klein, nimmt man aber $y=7$, so bekommt man $343+441+126=910$; also ist eine Wurzel $y=7$, folglich $x=14$, will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wissen, so dividire man $y^3+9yy+18y-910$ durch $y-7$ wie folget:

$y-7)\ y^3+9yy+18y-910\ (yy+16y+130$

y^3-7yy

$16yy+18y-910$

$16yy-112y$

$130y-910$

$130y-910$

0

Setzt man nun diesen Quotienten $yy+16y+130=0$, so bekommt man $yy=-16y-130$ und daher $y=-8\pm\sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: Die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt, giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 18; wenn man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme; welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x+18$, der Cubus der kleinern aber x^3 und der Cubus der größern

$= x^3 + 54xx - 972x + 5832$, also die Differenz derselben $54xx + 972x + 5832 = 54(xx + 18x + 108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x + 18 = 2(x + 9)$ multiplicirt werden soll: das Product ist aber $18(x^3 + 27xx + 270x + 972) = 275184$: man dividire durch 108 so kommt $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27xx + 270x = 1576$. Die Theiler der Zahl 1576 sind 1, 2, 4, 8 etc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 4$ theilen, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x - 4) \; x^3 + 27xx + 270x - 1576 \; (xx + 31x + 394 \\
\quad x^3 - 4xx \\
\quad \hline \\
\qquad 31xx + 270x \\
\qquad 31xx - 124x \\
\qquad \hline \\
\qquad\quad 394x - 1576 \\
\qquad\quad 394x - 1576 \\
\qquad\quad \hline \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man dahero $xx = -31x - 394$ und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort: Also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 720; so ich die Quadrat-Wurzel der größern Zahl multiplicire mit der kleinern Zahl, so kommt 20736. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$ so ist die größere $x+720$ und soll seyn $x\sqrt{(x+720)} = 20736 = 8.8.4.81$. Nun nehme man beyderseits die Quadrate, so wird $xx(x+720) = x^3+720xx = 8^2.8^2.4^2.81^2$; man setze $x = 8y$

so wird $8^3y^3+720.8^2y^2 = 8^2.8^2.4^2.81^2$

durch 8^3 dividirt, wird $y^3+90y^2 = 8.4^2.81^2$, es sey nun $y = 2z$

so wird $8z^3+4.90zz = 8.4^2.81^2$

durch 8 dividirt wird $z^3+45zz = 4^2.81^2$. Man setze ferner $z = 9u$

so wird $9^3u^3+45.9^2uu = 4^2.9^4$

durch 9^3 dividirt wird $u^3+5uu = 4^2.9$ oder $uu(u+5) = 16.9 = 144$. Hier sieht man offenbar, daß $u = 4$: dann da wird $uu = 16$ und $u+5 = 9$: da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die klei-

nere

nere Zahl war, die größere aber 1296, wovon die Quadrat-Wurzel 36, welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerkung: Diese Frage kann bequemer folgendergestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß, indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte: so sey die größere Zahl xx, die kleinere also xx — 720, welche mit der Quadrat-Wurzel jener, das ist mit x multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64.27.12$; man setze $x = 4y$

so wird $64y^3 - 720.4y = 64.27.12$:

durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27.12$: man setze ferner $y = 3z$

so wird $27z^3 - 135z = 27.12$:

durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$.

Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; dahero ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$,

also ist die größere Zahl $xx = 1296$ und die kleinere $xx - 720 = 576$ wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multiplicirt mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere x, so ist die größere $x + 12$. der Cubus der erstern ist x^3, der andern aber $x^3 - 36xx + 432x + 1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt $12(2x^3 + 36xx + 432x + 1728) = 102144$; durch 12 dividirt wird $2x^3 + 36xx + 432x + 1728 = 8512$; durch 2 dividirt giebt $x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256$ oder $x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8.8.53$. Man setze $x = 2y$ und dividire sogleich durch 8, so wird $y^3 + 9yy + 54y = 8.53 = 424$.

Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, 8, 53 etc. wovon 1 und 2 zu klein sind: setzt man aber $y = 4$, so kommt $64 + 144 + 216 = 424$. Also ist $y = 4$ und $x = 8$; dahero sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen

sonen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinnst zusammen betrage 392 Fl., wie groß ist die Gesellschaft gewesen?

Man setze, es seyn x Personen in der Gesellschaft gewesen, so erlegt einer 10 x Fl. ein, alle aber legen 10 xx Fl. ein, und gewinnen mit 100 Fl. 6. Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie x + 6 Fl. und mit dem ganzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3+6xx}{10} = 392$.
Mit 10 multiplicirt kommt $x^3 + 6xx = 3920$.
Setzt man nun $x = 2y$

so erhält man $8y^3 + 24yy = 3920$

welches durch 8 dividirt giebt $y^3 + 3yy = 490$.
Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 5, 7, 10 etc. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind.

Setzt man aber $y = 7$ so kommt $343 + 147 = 490$
also ist $y = 7$ und $x = 14$.

Antwort: In der Gesellschaft sind 14 gewesen, es hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthlr., dazu legt ein jeder noch

noch 40mal so viel Rthlr. als Personen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel pr Ct. als die Gesellschaft groß ist; hierauf theilen sie den Gewinnst, und da findet es sich, daß nachdem ein jeder 10mal so viel Rthlr. gewonnen als sie stark gewesen sind, so bleiben noch 224 Rthlr. übrig. Wie groß ist also die Gesellschaft gewesen.

Die Zahl der Gesellschaft sey $= x$ so legt ein jeder noch $40x$ Rthlr. zu dem Capital von 8240 Rthlr. alle zusammen legen also dazu noch $40xx$ Rthlr. also war die ganze Summe $40xx + 8240$, mit dieser gewinnen sie von $100, x$ Rthlr. dahero wird der ganze Gewinnst seyn:

$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5}$. Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthlr. und also alle zusammen $10xx$ Rthlr. bleiben noch 224 Rthlr. übrig, woraus erhellet daß der Gewinnst gewesen sey $10xx + 224$; woraus diese Gleichung entsteht $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5} = 10xx + 224$ welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt, wird $x^3 + 206x = 25xx + 560$ oder $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$. Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn, da nun die Theiler des letzten Gliedes sind:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 etc. welche positiv genommen werden müssen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit mit $x=1$ oder $x=2$, so ist offenbar, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren:

wenn $x=4$, so wird $64+824=400+560$ welches nicht zutrift.

wenn $x=5$, so wird $125+1030=625+560$ trift auch nicht zu.

wenn $x=7$, so wird $343+1442=1225+560$ trift zu:

dahero ist $x=7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x-7$ wie folget:

$$x-7)x^3-25xx+206x-560(xx-18x+80$$
$$x^3-7xx$$
$$-18xx+206x$$
$$-18xx+126x$$
$$80x-560$$
$$80x-560$$
$$0$$

Man

Man setze also den Quotienten gleich o so hat man $xx-18x+80=0$ oder $xx=18x-80$ daher $x=9\pm1$, also sind die beyden andern Wurzeln $x=8$ und $x=10$.

Antwort: Auf diese Frage finden also drey Antwörten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, und nach der dritten 10, wie von allen die hier beygefügte Probe anzeigt.

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$	280	320	400
also alle zusammen legen ein $40xx$	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das ganze Capital ist $40xx+8240$	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. Ct als der Kaufleute sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
also alle zusammen $10xx$	490	640	1000
bleibt also noch übrig	224	224	224

Capitel 12.

Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei.

172.

Wenn eine Cubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = o$ wo a, b und c ganze Zahlen sind, dann wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$ so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder ganze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können o werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzel der Gleichung weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben irrational, und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzel-Zeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem Cardano oder vielmehr dem Scipioni Ferreo zugeschrieben worden, welche deswegen verdient hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, dessen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a+b$, so ist der Cubus davon $a^3+3aab+3abb+b^3$ welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nemlich $3aab+3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a+b$. Denn $3ab$ mit $a+b$ multiplicirt, giebt $3aab+3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x = a + b$ und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Da nun $a+b = x$ ist, so hat man diese Cubische Gleichung $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ von welcher wir wissen, daß eine Wurzel sey $x = a + b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt, so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a = 2$ und $b = 3$ so bekommt man diese Gleichung $x^3 = 18x + 35$ von welcher wir gewiß wissen, daß $x = 5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$, folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$; wenn dahero diese Cubische Gleichung vorkommt $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$ so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß sowohl $3\sqrt[3]{pq}$ als $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man im

Stand

Stande gesetzt wird, eine jede Cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey dahero diese allgemeine Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p+q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p+q$ der Zahl g gleich werde, und alsdann wissen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen: I.) $3\sqrt[3]{pq} = f$ und II.) $p+q = g$. Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$: die andere Gleichung quadrire man, so komt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$. Da nun $p+q = g$, so wird $2p = g +$

$+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ und $2g=g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ dahero erhalten wir $p=\frac{g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}$ und $q=\frac{g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}$.

179.

Wenn also eine solche Cubische Gleichung vorkommt $x^3=fx+g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit $x=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}$; woraus erhellet, daß diese Irrationalität nicht nur das Quadrat Wurzel-Zeichen sondern auch das Cubische in sich fasse: und diese Formel ist dasjenige, was die Regel des Cardani genannt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern:

Es sey $x^3=6x+9$ so ist hier $f=6$ und $g=9$, also $gg=81$, $f^3=216$ und $\frac{4}{27}f^3=32$: Dahero

gg

$gg - \frac{4}{27} f^3 = 49$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = 7$; dahero wird von der vorgegebenen Gleichung die Wurzel seyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Also ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, also $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27} f^3 = 4$; folglich die Quadrat-Wurzel aus $gg - \frac{4}{27} f^3 = 0$; dahero eine Wurzel seyn wird $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

182.

Wenn aber auch eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird, ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27} f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27} f^3 = 1568$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4.4.49.2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel

$x = \sqrt[3]{\frac{40+28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40-28\sqrt{2}}{2}}$ oder $x = \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})}$ welche Formel wirklich 4 ist, ohngeachtet solches nicht sogleich daraus erhellet.

Denn da der Cubus von $2+\sqrt{2}$ ist $20+14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Cubic-Wurzel aus $20+14\sqrt{2}$ gleich $2+\sqrt{2}$, und eben so auch $\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})} = 2-\sqrt{2}$, hieraus wird unsere Wurzel $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$.

133.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle Cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darinn das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu merken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige Cubische Gleichung vorgegeben, $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern

dern Glieds und setze $x-2=y$; so wird $x=y+2$, und die übrige Rechnung wie folget:

da $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$ und $x^3=y^3+6yy+12y+8$, so ist

$$\begin{array}{rrr} x^3 & = & y^3+6yy+12y+8 \\ -6xx & = & -6yy-24y-24 \\ +11x & = & +11y+22 \\ -6 & = & -6 \end{array}$$

$$x^3-6xx+11x-6=y^3-y$$

Dahero erhalten wir diese Gleichung $y^3-y=0$ deren Auflösung sogleich in die Augen fällt: denn nach den Factoren hat man $y(yy-1)=y(y+1)(y-1)=0$; setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

I. $\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases}$ II. $\begin{cases} y=-1, \\ x=1, \end{cases}$ III. $\begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$

welches die drey schon oben gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine Cubische Gleichung gegeben: $x^3+axx+bx+c=0$ aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.

Zu

Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Gliedes mit ihrem Zeichen, und schreibe dafür einen neuen Buchstaben, z. E. y, dieser Regel zufolge werden wir haben $x+\frac{1}{3}a=y$ und also $x=y-\frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x=y-\frac{1}{3}a$, $xx=yy-\frac{2}{3}ay+\frac{1}{9}aa$; ferner $x^3=y^3-ayy+\frac{1}{3}aay-\frac{1}{27}a^3$; also

$$\begin{array}{rl} x^3= & y^3-ayy+\frac{1}{3}aay-\frac{1}{27}a^3 \\ axx= & +ayy-\frac{2}{3}aay+\frac{1}{9}a^3 \\ bx= & +by-\frac{1}{3}ab \\ c= & +c \\ \hline & y^3-(\frac{1}{3}aa-b)y+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=0 \end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

145.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten $x^3=fx+g$ oder $x^3-fx-g=0$, so wird für unsern Fall $f=\frac{1}{3}aa-b$, und $g=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab+c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

y=

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

und da solchergestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande, die Wurzeln von allen Cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$. Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$, so wird: $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, also

$$\begin{array}{rrr} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & -6yy - 24y - 24 \\ +13x = & +13y + 26 \\ -12 = & & -12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$.

Also

Also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; dahero erhalten wir $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$y = \sqrt[3]{(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9})} + \sqrt[3]{(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9})}$, oder $y = \sqrt[3]{(\frac{9+2\sqrt{21}}{9})}$ $+ \sqrt[3]{(\frac{9-2\sqrt{21}}{9})}$, oder $y = \sqrt[3]{(\frac{27+6\sqrt{21}}{27})}$ $+ \sqrt[3]{(\frac{27-6\sqrt{21}}{27})}$, oder $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}$ $\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechterdings irrational sey, indem es sich glücklicherweise fügen könnte, daß die Binomie $27 + 6\sqrt{21}$ wirkliche Cubi wären. Dieses trift auch hier zu, denn da der Cubus von $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8}$ $= 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubic-Wurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ und die Cubic-Wurzel aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Hieraus also

wird

wird der obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$ so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-3)\ x^3 - 6xx + 13x - 12\ (xx - 3x + 4 \\
\quad x^3 - 3xx \\
\hline
\quad\quad -3xx + 13x \\
\quad\quad -3xx + 9x \\
\hline
\quad\quad\quad\quad +4x - 12 \\
\quad\quad\quad\quad +4x - 12 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $xx = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{16}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln, welche imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Cubic-Wurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in

denen

denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, die dahero weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können: wenn aber keine Rational-Wurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach des Cardani Regel ausgedrückt werden, so daß alsdann keine weitere Abkürzung Platz findet, wie z. E in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Dahero gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2+2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2-2\sqrt{-1})}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

Capitel 13.

Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch Biquadratische Gleichungen genennt werden.

189.

Wenn die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grade hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grade auch Biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor; die sogenannten reinen Biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man sogleich die Wurzel findet, wenn man beyderseits die Wurzel vom vierten Grade auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wenn man erstlich nur die Quadrat-Wurzel ausziehet, da man denn bekommt $xx = \sqrt{f}$: hernach zieht man nochmals die Quadrat-

drat-Wurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Wurzel von f.

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solchergestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey Cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzeln sollten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art herausgebracht werden können. Denn da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$, aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier Biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:

$x^4 +$

$x^4+fxx+g=o$, als welche nach der Regel der Quadratiſchen Gleichungen aufgelöſt werden können. Denn ſetzt man $xx=y$ ſo hat man $yy+fy+g=o$, oder $yy=-fy-g$ woraus gefunden wird: $y=-\frac{1}{2}f\pm\sqrt{(\frac{1}{4}ff-g)}=\frac{-f\pm\sqrt{(ff-4g)}}{2}$. Da nun $xx=y$, ſo wird daraus $x=\pm\sqrt{\frac{-f\pm\sqrt{(ff-4g)}}{2}}$ wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, ſo kann man dieſelbe immer als ein Product aus vier Factoren anſehen. Denn multiplicirt man dieſe vier Factores mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ ſo findet man folgendes Product $x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx-(pqr+pqs+prs+qrs)x+pqrs$, welche Formel nicht anders gleich o werden kann, als wenn einer von obigen vier Factoren $=o$ iſt. Dieſes kann demnach auf viererley Art geſchehen: I.) wenn $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, IV.) $x=s$, welches demnach die vier Wurzeln dieſer Gleichung ſind.

194.

Betrachten wir dieſe Form etwas genauer, ſo finden wir, daß in dem zweyten Gliede die Summe

aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Gliede findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit xx multiplicirt ist, im vierten Gliede sieht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche Biquadratische Gleichung keine andere Rational-Wurzel haben, als welche zugleich Theiler des letzten Gliedes sind, daher man aus diesem Grunde alle Rational-Wurzeln, wenn dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wenn man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Gliedes setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe; hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x=p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x-p$ dividiren, und den Quotienten gleich o setzen, welche

che eine Cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelößt werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus ganzen Zahlen bestehen, und daß das erste bloß da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey: kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müssen dieselben vorher weggeschaft werden, welches jederzeit geschehen kann, wenn man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt:
Als wenn diese Gleichung vorkäme $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx + \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, so setze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen $x = \frac{y}{6}$, so wird $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$.
Wollte man nun suchen, ob diese Gleichung Rational-Wurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben, um zu sehen, in welchen Fällen die Formel wirklich 0 werde.

197.

Da aber die Wurzeln sowohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden

Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde: man hat aber auch hier wiederum zu bemerken, daß so oft die zwey Zeichen + und — mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müssen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4+2x^3-7xx-8x+12=0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müsse, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müssen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x=+1$ so kommt wirklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x=1$. Setzt man ferner $x=-1$ so kommt folgendes $+1-2-7+8+12=21-9=12$ und dahero giebt $x=-1$ keine Wurzel.

Man

Man setze ferner $x=2$ so wird unsere Formel wieder $=0$, und also $x=2$ eine Wurzel; hingegen $x=-2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x=3$ so kommt $81+54-63-24+12=60$ geht also auch nicht an: man setze aber $x=-3$ so kommt $81-54-63+24+12=0$, folglich ist $x=-3$ eine Wurzel; eben so findet man auch, daß $x=-4$ eine Wurzel seyn werde, also daß alle vier Wurzeln rational sind und sich also verhalten, I.) $x=1$, II.) $x=2$, III.) $x=-3$, IV.) $x=-4$, von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wenn aber keine Wurzel rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden: dahero man auf folgende Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrational-Wurzeln ausdrücken zu können. Hierinn ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt hat, um zur Erkenntniß solcher Wurzeln zu gelangen, die Biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn, einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen, als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschiehet: $x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0$, welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann: $x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0$, so kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen lassen: denn man setze für diese Gleichung folgendes Product $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme. Es wird aber durch die wirkliche Multiplication gefunden $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)aaxx + (p+q)a^3x + a^4 = 0$; damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert: I.) daß $p+q=m$, und II.) $pq+2=n$, folglich $pq=n-2$.

Die erstere quadrirt giebt $pp+2pq+qq=mm$, davon die andere viermal genommen, nemlich $4pq=4n-8$ — subtrahirt bleibt $pp-2pq+qq=mm-4n+8$: davon die Quadrat-Wurzel ist: $p-q=\sqrt{(mm-4n+8)}$. Da nun $p+q=m$

so

so erhalten wir durch die Addition $2p = m + \sqrt{(mm-4n+8)}$ oder $p = \frac{m+\sqrt{(mm-4n+8)}}{2}$; durch die Subtraction aber bekommen wir $2q = m-\sqrt{(mm-4n+8)}$ oder $q = \frac{m-\sqrt{(mm-4n+8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $= 0$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden: der erste giebt $xx+pax+aa=0$ oder $xx=-pax-aa$, woraus man findet $x=-\frac{pa}{2}\pm\sqrt{(\frac{ppaa}{4}-aa)}$ oder $x=-\frac{pa}{2}\pm a\sqrt{\frac{pp}{4}-1)}$ oder $x=-\frac{pa}{2}\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(pp-4)}$; der andere Factor giebt aber $x=-\frac{qa}{2}\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(qq-4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben $x^4-4x^3-3xx-4x+1=0$. Hier ist nun $a=1$, $m=-4$, $n=-3$, dahero $mm-4n+8=36$ und die Quadrat-Wurzel daraus $=6$; dahero bekommen wir $p=-\frac{4+6}{2}=1$ und $q=-\frac{4-6}{2}=-5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden: I.) und II.) $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}=-\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$; und ferner die III.) und IV.) $x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{21}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$: also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende:

I.)

I.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, II.) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
III.) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, IV.) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andern aber möglich, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann, als man will, indem man die Wurzel durch Decimal-Brüche ausdrückt. Denn da 21 so viel als 21,00000000 so ziehe man daraus die Quadrat-Wurzel wie folget:

```
21 | 00 | 00 | 00 | 00 | 4.5825
16 |
---+
   | 500
85 | 425
   +-----
   | 7500
908| 7264
   +------
   | 23600
9162| 18324
   +-------
   | 527600
91645| 458225
   +--------
     69375
```

Da nun $\sqrt{21} = 4,5825$ so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$, welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil

Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth, der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und dieses sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau zutrift.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben. Eine solche Gleichung ist demnach: $x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x^3 + a^4 = 0$ welche durch folgendes Product kann vorgestellt werden $(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0$. Denn durch die Multiplication bekommt man $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaxx - (p+q)a^3x + a^4$ welche mit der vorgegebenen einerley wird, wenn erstlich $p+q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n+2$; denn solchergestalt wird das vierte Glied von selbsten einerley: man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ woraus die Quadrat-Wurzel giebt

$p - q$

$p-q=\sqrt{(mm-4n-8)}$, und daher erhalten wir $p=\frac{m+\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$ und $q=\frac{m-\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln $x=-\frac{1}{2}pa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$ und der zweyte Factor giebt diese $x=-\frac{1}{2}qa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4-3.2x^3+3.8x+16=0$, hier ist nun $a=2$ und $m=-3$ und $n=0$, dahero $\sqrt{(mm-4n-8)}=1$ folglich $p=\frac{-3+1}{2}=-1$, und $q=\frac{-3-1}{2}=-2$, woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden $x=1\pm\sqrt{5}$, und die zwey letztern $x=2\pm\sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden: I.) $x=1+\sqrt{5}$, II.) $x=1-\sqrt{5}$, III. $x=2+\sqrt{8}$, IV.) $x=2-\sqrt{8}$. Woraus die vier Factoren unsrer Gleichung seyn werden $(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{8})(x-2+\sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx-2x-4$ und die beyden andern geben

ben $xx-4x-4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4-6x^3+24x+16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

Capitel 14.

Von des Pombelli Regel die Auflösung der Biquadratischen Gleichungen auf Cubische zu bringen.

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die Cubische Gleichungen durch Hülfe des Cardani Regel aufgelöst werden können, so kommt die Hauptsache bey den Biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf Cubische Gleichungen zu bringen wisse. Denn ohne Hülfe der Cubischen Gleichungen ist nicht möglich die Biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: denn wenn man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine Cubische Gleichung.

Woraus

Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Namens Pombelli, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen.

Es sey demnach die allgemeine Biquadratische Gleichung gegeben $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinnliche Zahlen bedeuten können: nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey. $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p, q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx + apx + pp$$
$$+ 2pxx - 2qrx - rr$$
$$- qqxx$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$ woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man

setzen

ſetzen $ap-2qr=c$, woraus man hat $2qr=ap-c$ für das letzte Glied aber $pp-rr=d$, woraus wird $rr=pp-d$. Aus dieſen drey Gleichungen müſſen nun die drey Buchſtaben p, q und r beſtimmt werden.

206.

Um dieſes auf die leichteſte Art zu verrichten, ſo nehme man die erſte viermal, welche ſeyn wird $4qq=aa+8p-4b$, dieſe multiplicire man mit der letzten $rr=pp-d$, ſo bekommt man $4qqrr=8p^3+(aa-4b)pp-8dp-d(aa-4b)$ nun quadrire man die mittlere Gleichung $4qqrr=aapp-2acp+cc$: wir haben alſo zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich geſetzt dieſe Gleichung geben $8p^3+(aa-4b)pp-8dp-d(aa-4b)=aapp-2acp+cc$; und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben $8p^3-4bpp+(2ac-8d)p-aad+4bd-cc$ welches eine Cubiſche Gleichung iſt, daraus in einem jeden Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln beſtimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchſtaben p gefunden, worzu

es genug ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus sogleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2p - b)}$ und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wann aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgendergestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, so ist $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadrat-Wurzel gezogen wird $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. Die erstere giebt $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$ woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so wird diese Gleichung gegeben $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$, aus welchen für den Buchstaben p zu bestimmen folgende

gende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt $2p^3 - 35pp + 202d - 385 = 0$. Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11, etc. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$ so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$: will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden so dividire man die Gleichung durch 2 so kommt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Gliede $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen, so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wissen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer Biquadratischen Gleichung herauskommen müssen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdann $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = -\frac{50 + 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: dahero unsere beyden Quadrat-

drat-Gleichungen seyn werden:
I.) $xx = 5x - 4$, II.) $xx = 5x - 6$; die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$: die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$ oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$ so wird $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ und $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$ woraus diese zwey Quadrat-Gleichungen entstehen: I.) $xx = 7x - 12$, II.) $xx = 3x - 2$; deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$ dahero $x = 4$ und $x = 3$: die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, dahero $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$, denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden Quadratischen Gleichungen seyn werden:
I.) $xx = 6x - 8$, II) $xx = 4x - 3$:
aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$; welche die schon gefundenen vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$; dahero unsere Cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man setzt $p = 2t$; da wird nemlich $8t^3 + 24t - 32 = 0$ oder $t^3 + 3t - 4 = 0$. Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Dahero sind die beyden Quadrat-Gleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, wovon die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$ und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel ganz wiederhohlen:

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte ist der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung; diese Form aber entwickelt giebt $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0$, mit

drat-Gleichungen seyn werden:
I.) $xx = 5x - 4$, II.) $xx = 5x - 6$; die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$: die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$ oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$ so wird $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ und $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$ woraus diese zwey Quadrat-Gleichungen entstehen: I.) $xx = 7x - 12$, II.) $xx = 3x - 2$; deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$ dahero $x = 4$ und $x = 3$: die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, dahero $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$, denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden Quadratischen Gleichungen seyn werden:
I.) $xx = 6x - 8$, II) $xx = 4x - 3$:
aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$; welche die schon gefundenen vier Wurzeln sind.

210.

Es ſey ferner dieſe Gleichung vorgegeben $x^4-16x+12=0$, in welcher iſt $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$; dahero unſere Cubiſche Gleichung ſeyn wird $8p^3+96p-256=0$, das iſt $p^3+12p-32=0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man ſetzt $p=2t$; da wird nemlich $8t^3+24t-32=0$ oder $t^3+3t-4=0$. Die Theiler des letzten Gliedes ſind $\pm 1, 2, 4$, aus welchen $t=1$ eine Wurzel iſt, daraus wird $p=2$ und ferner $q=\sqrt{4}=2$ und $r=\frac{16}{4}=4$. Dahero ſind die beyden Quadrat-Gleichungen $xx=2x+2$ und $xx=-2x-6$, wovon die Wurzeln ſeyn werden $x=1\pm\sqrt{3}$ und $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflöſung noch deutlicher zu machen, ſo wollen wir dieſelbe bey dem folgenden Exempel ganz wiederhohlen:

Es ſey demnach dieſe Gleichung gegeben $x^4-6x^3+12xx-12x+4=0$, welche in dieſer Formel enthalten ſeyn ſoll $(xx-3x+p)^2-(qx+r)^2=0$, wo im erſten Theil $-3x$ geſetzt worden, weil -3 die Hälfte iſt der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung; dieſe Form aber entwickelt giebt $x^4-6x^3+(2p+9-qq)xx-(6p+2qr)x+pp-rr=0$, mit

dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, so bekommt man:

I.) $2p+9-qq=12$, II.) $6p+2qr=12$, III.) $pp-rr=4$; aus der ersten erhalten wir $qq=2p-3$, aus der zweyten $2qr=12-6p$ oder $qr=6-3p$, aus der dritten $rr=pp-4$: nun multiplicire man rr und qq mit einander, so bekommt man $qq\,rr=2p^3-3pp-8p+12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qq\,rr=36-36p+9pp$; daßero erhalten wir diese Gleichung: $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, oder $2p^3-12pp+28p-24=0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3-6pp+14p-12=0$, wovon die Wurzel ist $p=2$; daraus wird $qq=1$, $q=1$ und $qr=r=0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx-3x+2)^2=xx$, daraus die Quadrat-Wurzel $xx-3x+2=\pm x$: gilt das obere Zeichen, so hat man $xx=4x-2$, für das untere Zeichen aber $xx=2x-2$: woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x=2\pm\sqrt{2}$ und $x=1\pm\sqrt{-1}$.

Capitel 15.

Von einer neuen Auflösung der Biquadratischen Gleichungen.

212.

Wie durch die obige Regel des Pombelli die Biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer Cubischen aufgelöst werden, so ist seitdem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welches von dem vorigen gänzlich unterschieden ist und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nemlich, die Wurzel einer Biquadratischen Gleichung habe diese Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen Cubischen Gleichung andeuten $z^3 - fzz + gz - h = o$, also daß seyn wird $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$: dieses vorausgesetzt so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da

kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p+q+r=f$ so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$: nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird $x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}$. Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, so wird $x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$; da aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser Biquadratischen Gleichung $x^4 - 2fxx - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = o$ wovon die Wurzel gewiß ist $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, und wo p, q und r die drey Wurzeln sind der obigen Cubischen Gleichung.

$$z^3 - fzz + gz - h = o.$$

214.

Die herausgebrachte Biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darinn mangelt. Denn man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese Biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 - axx - bx - c = o$, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe dahero

hero mit der gefundenen Form um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Dazu wird erfordert, daß I.) $2f = a$ also $f = \frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h} = b$ also $h = \frac{bb}{64}$ III.) $ff - 4g = -c$, oder $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, oder $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4 - axx - bx - c = 0$ findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$ und $h = \frac{1}{64}bb$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daraus formire man diese Cubische Gleichung: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben sind nun I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$: aus welchen, wenn sie gefunden worden, eine Wurzel unserer Biquadratischen Gleichung seyn wird $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

216.

Solchergestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein jedes Quadrat-Wurzel-Zeichen sowohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form sogar alle vier Wurzeln.

Wollte

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten lassen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemerken, daß das Product dieser drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müsse dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; dahero wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist, so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Falle nur diese vier Aenderungen gelten.

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,
II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$,
III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$,
IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$,

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende;

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$,
II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$,
III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$,
IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$,

Durch Hülfe dieser Anmerkung können im jeglichen Falle alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese Biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte Glied fehlt $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$, welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$, woraus

aus man ferner erhält $f=\frac{25}{2}$, $g=\frac{625}{16}+9=\frac{769}{16}$ und $h=\frac{225}{4}$: also ist unsere Cubische Gleichung

$$z^3-\frac{25}{2}zz+\frac{769}{16}z-\frac{225}{2}=0.$$

Um hier die Brüche wegzubringen, so setze man $z=\frac{u}{4}$, so wird $\frac{u^3}{64}-\frac{25}{2}\cdot\frac{uu}{16}+\frac{769}{16}\cdot\frac{u}{4}-\frac{225}{4}=0$, welche mit 64 multiplicirt giebt $u^3-50uu+769u-3600=0$, wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wurzel ist $u=9$, um die andern zu finden, so theile man $u^3-50uu+769u-3600$ durch $u-9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu-41u+400=0$ oder $uu=41u-400$, woraus gefunden wird $u=\frac{41}{2}\pm\sqrt{(\frac{1681}{4}-\frac{1600}{4})}=\frac{41\pm9}{2}$: also sind die drey Wurzeln $u=9$, $u=16$, $u=25$, dahero wir erhalten:

I.) $z=\frac{9}{4}$, II.) $z=4$, III.) $z=\frac{25}{4}$.

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, also daß $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$; weil nun $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$ und dieser Werth $=\frac{1}{2}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, darnach richten: es muß nemlich entweder nur ein minus oder drey minus vorhanden seyn: da nun $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$ $\sqrt{q}=2$ und $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

I.) $x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$,
II.) $x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$,
III.) $x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$,
VI.) $x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$,

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen $(x-1)(x-2)(x+3)(x+6)=0$, wovon aber die beyden ersten geben $xx-3x+2$ die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie eine Biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darinn das zweyte Glied fehlt; wozu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0$. Hier setze man zu y den vierten Theil der Zahl des andern Gliedes, nemlich $\frac{1}{4}a$ und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x also daß $y + \frac{1}{4}a = x$ folglich $y = x - \frac{1}{4}a$; daraus wird $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$, ferner $y^3 = x^3 - \frac{3}{4}axx + \frac{3}{16}aax - \frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rl}
y^4 = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}aaxx - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & + ax^3 - \frac{3}{4}aaxx + \frac{3}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4 \\
+byy = & + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+cy = & + cx - \frac{1}{4}ac \\
+d = & + d
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}
x^4 + 0 - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{256}a^4 \\
+ bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\
+ cx - \frac{1}{4}ac \\
+ d
\end{array}\right\} = 0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbsten sich ergeben, weil $y = x - \frac{1}{4}a$.

216.

So weit ist man bisher in Auflösung der Algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen,

sen, also daß man nicht im Stande ist, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles was darinnen geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wenn irgend eine Rational-Wurzel statt findet, als welche durch Probiren leicht herausgebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Gliedes seyn muß: und hiermit ist es eben so beschaffen, wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grade gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn, diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind:

Eine solche Gleichung sey nun diese $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0$. Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, dahero setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Gliedes, nemlich $y - 2 = x$, so wird

$y = x$

$y = x + 2$ und $yy = xx + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$.

und $y^4 = x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16$
$-8y^3 = \quad -8x^3 - 48xx - 96x - 64$
$+14yy = \quad\quad +14xx + 56x + 56$
$+4y = \quad\quad\quad +4x + 8$
$-8 = \quad\quad\quad\quad -8$

$$x^4 + 0 - 10xx - 4x + 8 = 0$$

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, giebt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv seyn wird. Die Cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden müssen.

221.

Hier müssen nun erstlich die Brüche weggeschaft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Gliedes sind 1 und 2, so sey

erstlich

erstlich $u = 1$, da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$ so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$ welches ein Genüge leistet. Dahero ist eine Wurzel $u = 2$: um die andere zu finden, so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$u-2)u^3-10uu+17u-2(uu-8u+1$$
$$u^3-2uu$$
$$-8uu+17u$$
$$-8uu+16u$$
$$u-2$$
$$u-2$$
$$0$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drey Wurzeln der Cubischen Gleichung:

I.) $z = p = 1$, II.) $z = q = \frac{4+\sqrt{15}}{2}$, III.) $z = r = \frac{4-\sqrt{15}}{2}$.

222.

Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadrat-Wurzeln seyn $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8+2\sqrt{15})}}{2}$ $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}{2}$.

Aus

Aus demjenigen aber was oben ist gezeiget worden, da die Quadrat-Wurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(aa-b)} = c$ also ausgedrückt worden $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$, folglich $b = 60$ dahero $c = 2$, hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8-2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wissen, daß derselben Product positiv seyn muß, folgendergestalt beschaffen seyn.

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$= 1 + \sqrt{5}$.

II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$= 1 - \sqrt{5}$.

III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$= -1 + \sqrt{3}$.

IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$= -1 - \sqrt{3}$.

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

I.) $y = 3 + \sqrt{5}$,
II.) $y = 3 - \sqrt{5}$,
III.) $y = 1 + \sqrt{3}$,
IV.) $y = 1 - \sqrt{3}$.

Capitel 16.

Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung.

223.

Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzel-Zeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen, den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestallt, daß man dem wahren

ren Werthe derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.

224.

Das erste Mittel besteht darinn, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, also, daß man wisse daß derselbe z. E. grösser sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdann setze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da dann p gewiß einen Bruch bedeuten wird; ist aber p ein Bruch, und also kleiner als 1, so ist das Quadrat von p, der Cubus und eine jegliche höhere Potestät noch weit kleiner, dahero man dieselbe aus der Rechnung weglassen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4 + p$ schon genauer: hieraus erforscht man gleichergestalt einen noch genauern Werth, und geht folglich so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen als man wünschet.

225.

225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Exempel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung $xx = 20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun, daß x größer ist als 4, und doch kleiner als 5, dahero setze man $x = 4 + p$, so wird $xx = 16 + 8p + pp = 20$; weil aber pp sehr klein ist, so lasse man dieses Glied weg, um diese Gleichung zu haben $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$, daraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$, welches der Wahrheit schon weit näher kommt: man setze also ferner $x = 4\frac{1}{2} + p$ so ist man gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; dahero pp jetzt mit größerm Rechte weggelassen werden könne. Man wird also haben $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, oder $9p = -\frac{1}{4}$, und also $p = -\frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{35}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x = 4\frac{17}{35} + p$, so bekommt man $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{35}p = 20$; dahero $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$ mit 36 multiplicirt kommt $322p = -\frac{36}{1295} = -\frac{1}{36}$ und daraus wird $p = -\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$, folglich $x = 4\frac{17}{35} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, welcher Werth der Wahrheit so nahe kommt, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

226.

226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey gegeben diese Gleichung $xx = a$ und da man schon weiß daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n+1$, so setze man $x = n+p$, also daß p ein Bruch seyn muß und dahero pp als zu klein verworfen werden kann, daraus bekommt man $xx = nn + 2np = a$, also $2np = a - nn$ und $p = \frac{a-nn}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a-nn}{2n} = \frac{nn+a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kommt ihr dieser neue Werth $\frac{nn+a}{2n}$ noch weit näher. Diesen setze man von neuem für n, so wird man der Wahrheit noch näher kommen und wenn man diesen neuen Werth nochmahl für n setzet, so wird man noch näher zutreffen; und solchergestalt kann man fortgehen so weit man will.

Es sey z. E. $a = 2$, oder man verlangt die Quadrat-Wurzel aus 2 zu wissen: hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden welcher n gesetzt werde, so wird $\frac{nn+2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben. Es sey dahero

I. $n = 1$, so wird $x = \frac{3}{2}$;

II. $n = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{17}{12}$;

III. $n = \frac{17}{12}$, so wird $x = \frac{577}{408}$.

welcher letztere Werth dem $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227.

Eben so kann man verfahren, wenn die Cubic-Wurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey gegeben diese cubische Gleichung $x^3 = a$ oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sey nun beinahe $= n$ und man setze $x = n + p$; so wird, wenn man pp und die höheren Potestäten davon wegläßt, $x^3 = n^3 + 3nnp = a$: dahero $3nnp = a - n^3$ und $p = \frac{a-n^3}{3nn}$: folglich $x = \frac{2n^3+a}{3nn}$.

Kommt also n dem $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n, so kommt diese Formel der Wahrheit noch weit näher, und so kann man fortfahren so weit man will.

Es sey z. E. $x^3 = 2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welche die Zahl n schon ziemlich nahe kömme

komme, so wird diese Formel $n = \frac{2n^3+2}{3nn}$ noch näher kommen; also setze man.

I. $n = 1$ so wird $x = \frac{4}{3}$;
II. $n = \frac{4}{3}$ so wird $x = \frac{91}{72}$;
III. $n = \frac{91}{72}$ so wird $x = \frac{1621\,30896}{1286\,34294}$.

228.

Diese Methode kann mit gleichem Fortgange gebraucht werden um die Wurzel aus allen Gleichungen durch Näherungen zu finden. Es sey zu diesem Ende die folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo n einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt; Man setze daher $x = n - p$ und da p ein Bruch seyn wird, so lasse man pp und die höheren Potestäten davon weg; solchergestalt bekommt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus diese Gleichung entsteht:

$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$,
oder $n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp$
$= (3nn + 2an + b)p$: dahero $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$
und folglich bekommen wir für x den folgenden genaueren Werth

$$x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}.$$

Setzt man nun diesen neuen Werth wieder für n, so erhält man dadurch einen, der der Wahrheit noch näher kommt.

229.

Es sey z. E. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, dahero wenn n einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth seyn $x = \frac{2n3 + 2nn + 50}{3nn + 4 + 3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; man setze dahero $n = 3$ so bekommt man $x = \frac{62}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

230.

Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Exempel beyfügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß ist. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4 p$ und also $n^5 + 5n^4 p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4 p - 6p = 6n + 10 - n^5$, und folglich $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$ und dahero $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Man

setze

setze nun $n = 1$ so wird $x = \frac{14}{n-1} = +14$, welcher Werth ganz ungeschickt ist, und daher rührt weil der nahe Werth n zu klein war; man setze dahero $n = 2$, so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben und für n diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genaueren Werth der Wurzel x gelangen.

231.

Dieses ist nun die bekannteste Art die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen kann angebracht werden.

Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmerksamkeit verdienet. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, als a, b, c, &c. die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzet.

Laßt

Laßt uns setzen, wir wären damit schon gekommen bis zu den Gliedern p, q, r, s, t etc. so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau anzeigen, oder es wird seyn $\frac{q}{p} = x$ beiläufig.

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = xx$. Da ferner auch $\frac{s}{r} = x$ so wird ebenfalls $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$ so wird $\frac{t}{p} = x^4$, u. s. w.

232.

Um dieses zu erläutern, wollen wir mit dieser quadratischen Gleichung anfangen $xx = x + 1$, und in der obgedachten Reihe von Zahlen kämen nun diese Glieder vor p, q, r, s, t etc. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = xx$, so erhalten wir daraus diese Gleichung:

$$\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1 \text{ oder } q + p = r.$$

Eben so wird auch seyn $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen daß ein jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe der beyden vorhergehenden ist, wodurch die Reihe so weit man will leicht fortgesetzt werden kann, wenn man nur die zwey ersten Glieder hat, und diese kann man nach

Belie-

Belieben annehmen. Dahero setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also herauskommen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ꝛc.

wo von den entfernteren Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt, den Werth für x um so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt hat. Am Anfange ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht, geringer. Diese der Wahrheit immer näher kommende Werthe für x, gehen demnach also fort:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89} \text{ etc.}$$

wovon z. E. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt, die folgenden Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233.

Laßt uns nun auch diese Gleichung betrachten $xx = 2x + 1$, und weil allezeit $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen nebst dem vorhergehenden das folgende giebt. Wenn wir also wiederum mit 0, 1 anfangen, so bekommen wir folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, etc.

daher

daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169} \text{ etc.}$$

welche folglich dem wahren Werthe $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg, so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$ etc. von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$ so nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234.

Bey höheren Gleichungen findet diese Methode ebenfalls statt: gesetzt es wäre diese cubische Gleichung gegeben:

$x^3 = xx + 2x + 1$, so setze man $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ und $x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$, woraus man sieht wie man aus dreyen Gliedern p, q und r das folgende s finden soll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann; eine solche Reihe wird demnach seyn:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 etc.

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer angeben werden

$$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60} \text{ etc.}$$ wovon die

ersten

ersten sehr fehlen, dieser aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, wo der Fehler $\frac{13}{343}$ ist.

235.

Es ist hier wohl zu bemercken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man darauf diese Methode anwenden könne; und insonderheit wo das zweyte Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden. Es sey z. E. $xx = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$ so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$, das ist $r = 0q + 2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 etc.

woraus nichts geschloßen werden kann, indem ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Es kann diesem aber geholfen werden, wenn man setzt $x = y - 1$, so bekommt man $yy + 2y - 1 = 2$, und so man hier setzt $y = \frac{q}{p}$ und $yy = \frac{r}{p}$ so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

236.

Eben so verhält es sich auch mit dieser Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher eine solche Reihe

Zahlen

Zahlen nicht gefunden wird, die uns den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte.

Man setze aber nur $x = y - 1$ um diese Gleichung zu bekommen $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3yy - 3y + 3$. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{q}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird seyn $s = 3r - 3q + 3p$; woraus man sieht, wie aus drey Gliedern das folgende zu bestimmen ist. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an: als z. E. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 etc.

wovon die zwey letzten Glieder geben $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubic-Wurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$ dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu bemercken, daß wenn die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel herauskomme; so wird auch ein jegliches Glied derselben,

durch

durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey diese Gleichung gegeben $xx = x + 2$, worinn eine Wurzel ist $x = 2$; da man nun für die Reihe diese Formel hat $r = q + 2p$, und man den Anfang setzt 1, 2, so erhält man diese Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc., welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner $= 2$.

Eben dieses erhellet auch aus der cubischen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel ist $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ diese Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. welches wieder eine geometrische Progression ist, deren Nenner $= 3$.

238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde. Denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten, und die kleinere erhält man nicht

anders

anders, als wenn gerade der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Exempel deutlich werden. Es sey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man zum Anfang derselben 1, 1, nemlich für die kleinere Wurzel, so wird die ganze Reihe: 1, 1, 1, 1 1, 1, 1, 1, 1 etc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinn die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darinn die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu sehen:

Der Anfang sey 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 etc.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 etc.
ferner 2, 3, 6, 15, 4^2, 123, 366
1095 etc.
ferner 2, 1, −2, −11, −38, −118, −362,
−1091, −3278 etc.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden divi-

dividirt, immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleinern.

239.

Diese Methode kann auch sogar auf Gleichungen, die in das Unendliche fortlaufen, angewendet werden, zum Exempel diene diese Gleichung

$$\infty \quad \infty-1 \quad \infty-2 \quad \infty-3 \quad \infty-4$$
$$x = x + x + x + x + \text{etc.}$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede gleich sey der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc.

Hieraus sieht man daß die größte Wurzel dieser Gleichung sey $x = 2$ ganz genau; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann: man theile die Gleichung durch x^{∞} so bekommt man:

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ etc. welches eine geometrische Progression ist, davon die Summe gefunden wird $= \frac{1}{x-1}$ also das $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicire mit $x-1$, so wird $x-1 = 1$ und $x = 2$.

240.

240.

Außer dieſen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherungen zu finden, trifft man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühſam, oder doch nicht allgemein ſind. Vor allen aber verdienet die hier zuerſt erklärte Methode den Vorzug, als welche auf alle Arten von Gleichungen mit erwünſchtem Erfolg kann angewendet werden, dahingegen die andere öfters eine gewiſſe Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieſelbe nicht einmahl gebraucht werden kann, wie wir hier bey verſchiedenen Exempeln dargethan haben.

Ende des erſten Abſchnitts.

Des

Zweyten Theils

zweyter Abſchnitt.

Von der unbeſtimmten Analityc.

Capitel I.

Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

1.

Aus dem vorigen ist zu ersehen, wie eine unbekannte Zahl durch eine Gleichung, zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen, 3 durch 3, 4 durch 4 und so fort, bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wenn aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlassen; dahero solche Fragen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Theil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genennt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekannte Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Zahlen, ganze und sogar positive, oder zum wenigsten National-Zahlen seyn müssen wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige, öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen aber auch sogar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger

ger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen ganz und positiv seyn müssen.

Dieselben Zahlen sind nun x und y, also daß seyn soll $x+y=10$, woraus gefunden wird $x=10-y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl seyn muß; man könnte dahero für y alle ganze Zahlen, von 1 bis ins Unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonst x negativ seyn würde; und wenn auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonst $x=0$ würde; daher nur die folgenden Auflösungen Platz haben:

Wenn $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
so wird $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, dahero in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2, der andere aber durch 3 theilen lasse?

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x+3y=25$. Also $2x=25-3y$. Man theile durch 2 so kommt $x=\frac{25-3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und dahero y nicht größer als 8. Man ziehe so viel ganze daraus als möglich, das ist, man theile den Zähler $25-3y$ durch den Nenner 2, so wird $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; also muß sich $1-y$ oder auch $y-1$ durch 2 theilen lassen. Man setze dahero $y-1=2z$ und also $y=2z+1$, so wird $x=12-2z-1-z=11-3z$; weil nun y nicht größer seyn kann als 8, so können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden als solche, die $2z+1$ nicht größer geben als 8.

Folglich

Folglich muß z kleiner seyn als 4, dahero z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man	$z=0$,	$z=1$,	$z=2$,	$z=3$.
so wird	$y=1$,	$y=3$,	$y=5$,	$y=7$.
und	$x=11$,	$x=8$,	$x=5$,	$x=2$.

dahero die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

I.) 22+3, II.) 16+9, III.) 10+15, IV.) 4+21.

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse?

Der erste Theil sey demnach 7x, der andere aber 11y, so muß seyn $7x+11y=100$; dahero $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}$, also wird $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; also muß 2—4y oder 4y—2 sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber 4y—2 durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon 2y—1 durch 7 theilen lassen; man setze dahero $2y-1=7z$, oder $2y=7z+1$, so wird $x=14-y-2z$; da aber seyn muß

2y

$2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$, so hat man $y = 3z + \frac{z+1}{2}$. Nun setze man $z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$. Folglich kann man für u eine jede ganze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdenn bekommt man:

$$y = 7u - 3 \text{ und } x = 19 - 11u.$$

Nach der ersten Formel muß 7u größer seyn als 3, nach der andern aber muß 11u kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmal 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur ein einiger Werth übrig, nemlich $u = 1$, daraus bekommen wir $x = 8$ und $y = 4$; dahero die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I. 56 und II. 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wenn man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweyten durch 7 theilt, daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$, hieraus $x = 18 - y$

$-y-\frac{2y+4}{5}$; also muß $4-2y$, oder $2y-4$, oder auch die Hälfte davon $y-2$ durch 5 theilbar seyn. Man setze dahero $y-2=5z$ oder $y=5z+2$, so wird $x=16-7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht gröſſer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I. $z=0$, giebt $x=16$ und $y=2$; woraus die beiden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82+18$.

II. $z=1$, giebt $x=9$ und $y=7$; woraus die beiden Theile seyn werden $47+53$.

III. $z=2$, giebt $x=2$ und $y=12$; woraus die beiden Theile sind $12+88$.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wenn ich die meinigen zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten

$8x+7$, der andern aber $10y+7$, also daß $8x+10y+14=100$, oder $8x=86-10y$, oder $4x=43-5y=40+3-4y-y$; dahero setze man $y-3=4z$, so wird $y=4z+3$ und $x=10-4z-3-z=7-5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I. $z=0$, giebt $x=7$, und $y=3$: dahero die erste Bäuerin gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II. $z=1$, giebt $x=2$, und $y=7$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 23 Eyer und die andere 77.

§.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop. Wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey $=x$, der Weiber aber $=y$, so bekommt man diese Gleichung $19x+13y=1000$. Daraus wird $13y=1000-19x$ oder $13y=988+12-13x-6x$, also wird $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12-6x$ oder $6x-12$, und auch der sechste Theil davon $x-2$ durch 13 theilen lassen. Man setze also $x-2=13z$, so wird $x=13z+2$

und

und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$ oder $y = 74 - 19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, daher folgende vier Auflösungen statt finden:

I.) $z = 0$, giebt $x = 2$ und $y = 74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II.) $z = 1$, giebt die Zahl der Männer $x = 15$ und die Zahl der Weiber $y = 55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.) $z = 2$, giebt die Zahl der Männer $x = 28$ und die Zahl der Weiber $y = 36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV.) $z = 3$, giebt die Zahl der Männer $x = 41$, und die Zahl der Weiber $y = 17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI. Frage: Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthlr. Zahlt für ein Pferd 31 Rthlr., für einen Ochsen aber 21 Rthlr. Wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $= x$ der Ochsen aber $= y$, so muß seyn: $31x + 21y = 1770$ oder $21y = 1770 - 31x$,

$-31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$; dahero muß $10x-6$ und also auch die Hälfte $5x-3$ durch 21 theilbar seyn: man setze also $5x-3 = 21z$, dahero $5x = 21z+3$ also daß $y = 84 - x - 2z$. Da nun $x = \frac{21z+3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z+3}{5}$, so setze man $z+3 = 5u$, so wird $z = 5u-3$, $x = 21u - 12$ und $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$; dahero u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u = 1$ giebt die Zahl der Pferde $x = 9$ und der Ochsen $y = 71$; jene haben gekostet 279 Rthlr. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthlr.

II.) $u = 2$ giebt die Zahl der Pferde $x = 30$ und der Ochsen $y = 40$; jene haben 930 Rthlr. gekostet, diese aber 840, zusammen 1770 Rthlr.

III.) $u = 3$ giebt die Zahl der Pferde $x = 51$ und der Ochsen $y = 9$; jene haben gekostet 1581 Rthlr. diese aber 189 Rthlr. zusammen 1770 Rthlr.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c ganze und positive

positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax = by + c$, so sind die Fragen von einer ganz andern Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind solche. Wenn man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6; so setze man die kleinere $= x$ die größere $= y$, und da muß seyn $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor x alle mögliche ganze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird y allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x = 100$ so wäre $y = 106$; woraus ganz klar ist, daß unendlich viele Auflösungen statt finden.

II.

Hernach folgen die Fragen, wo $c = 0$ und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich sowohl durch 5 als auch durch 7 theilen lasse, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich seyn $N = 5x$, weil die Zahl N durch 5 theilbar

seyn

seyn soll; hernach muß auch seyn $N = 7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen lassen: dahero bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, dahero die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, also daß für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 910 etc.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch überdies durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch seyn $N = 9u$ also $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$: woraus klar ist, daß sich z durch 9 muß theilen lassen. Es sey demnach $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wenn die Zahl c nicht $= 0$ ist; als wenn seyn soll $5x = 7y + 3$, welche Gleichung heraus kommt, wenn eine solche Zahl N gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen lasse; wenn aber dieselbe durch 7 dividirt wird und 3 übrig bleiben, alsdenn muß seyn $N = 5x$, hernach aber

$N = 7y + 3$ und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich $x = \frac{7y-3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Man setze $2y+3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y+3 = 5z$, oder $2y - 5z = -3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$ oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$ so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$ und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze Zahlen können angenommen werden, auch sogar negative, wenn nur N positiv wird, welches hier geschiehet, wenn $u = -1$, denn da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt, dahero die gesuchten Zahlen sind: 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 etc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf das Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürzer bald weitläuftiger. Folgende Frage leidet eine kurze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig lasse, durch 13 aber dividirt 3 übrig bleiben?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N = 6x + 2$ hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380 etc. welche nach einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78 = 6.13$. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weiß, so lassen sich alle übrige leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N welche durch 39 dividirt, 16 übrig lasse, und durch 56 dividirt, 27 übrig lasse?

Erstlich muß also seyn $N = 39p + 16$, hernach aber $N = 56q + 27$; dahero wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q$

$+\frac{17q+11}{39} = q+r$; also daß $r = \frac{17q+11}{39}$; daher wird $39r = 17q+11$ und $q = \frac{39r+11}{17} = 2r+\frac{5r-11}{17} = 2r+s$; also daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder $17s = 5r-11$, daher wird $r = \frac{17s+11}{5} = 3s+\frac{2s+11}{5} = 3s+t$; also daß $t = \frac{2s+11}{5}$, oder $5t = 2s+11$ und so wird $s = \frac{5t-11}{2} = 2t+\frac{t-11}{2} = 2t+u$; also daß $u = \frac{t-11}{2}$ und $t = 2u+11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen:

$t = 2u+11$

$s = 2t+u = 5u+22$

$r = 3s+t = 17u+77$

$q = 2r+s = 39u+176$

$p = q+r = 56u+253$

und endlich $N = 39.56u+9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$: setzt man $u = x-4$, so wird $N = 2184x-8736+9883$, oder $N = 2184x+1147$. Diese Zahlen machen demnach eine arithmetische Progression, deren erstes Glied ist 1147 und die Differenz $= 2184$.

Diese Zahlen sind demnach 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 etc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen $= p$, der Männer aber $= q$, so haben die Weiber verzehrt $16p$, die Männer aber $25q$; dahero muß seyn $16p = 25q + 1$ und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$; also daß $r = \frac{9q+1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; dahero wird $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r-1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; dahero wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, also daß $t = \frac{2s+1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; dahero wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, also daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, dahero $t = 2u + 1$. Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$t = 2u + 1$$
$$s = 3t + u = 7u + 3$$

$t = s$

$$r = s + t = 9u + 4$$
$$q = r + s = 16u + 7$$
$$p = q + r = 25u + 11$$

dahero war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in gantzen Zahlen annehmen kann was man will, die kleineren Zahlen sind demnach nebst den folgenden also:

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111 etc.
Anzahl der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71 etc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinsten Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

X. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthlr. für einen Ochsen aber 20 Rthlr. und es findet sich daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde: wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, der Pferde aber $= q$, so muß $20p = 31q + 7$, dahero $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$, dahero $20r = 11q + 7$, und $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11}$

$= r + s$; dahero $11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s+7}{9}$
$= s\,\frac{2s+7}{9} = s + t$, dahero $9t = 2s + 7$, und
$s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, dahero
$2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$

$s = 4t + u = 9u + 28$
$r = s + t = 11u + 35$
$q = r + s = 20u + 63$ Zahl der Pferde
$p = q + r = 31u + 98$ Zahl der Ochsen.

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wenn man setzt $u = -3$; die größeren steigen nach arithmetischen Progressionen wie folgt:

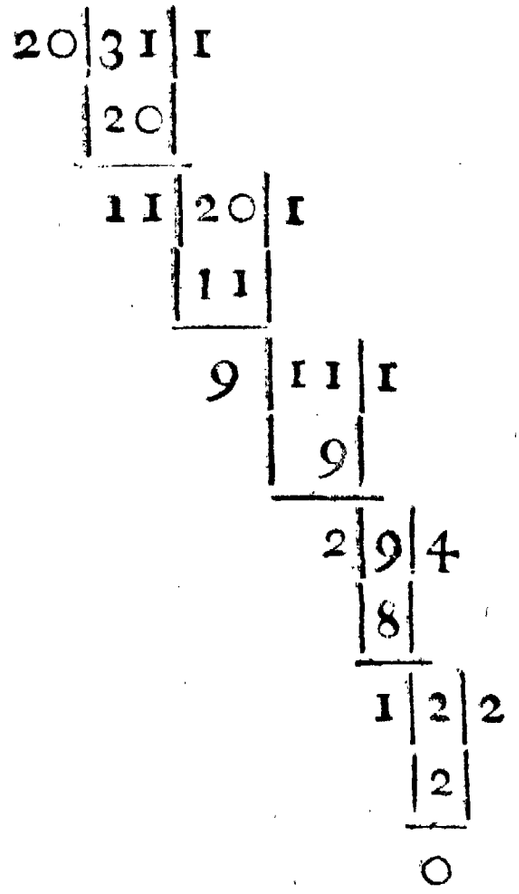
Zahl der Ochsen $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160,$
$191, 222, 253$ etc.
Zahl der Pferde $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103,$
$123, 143, 163$ etc.

17.

Wenn wir bey diesem Exempel erwägen, wie die Buchstaben p und q durch die folgenden bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf das Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der

größte

größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:



Hier ist es also klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s etc. vorkommen und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt zuerst die Zahl 7 zum Vorschein und zwar mit dem Zeichen +, weil die letzte Bestimmmung die fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerade gewesen, so hätte −7 gesetzt werden müssen. Solches wird

noch deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r ꝛc. vorkommt.

$31 = 1.\ 20 + 11.$	$p = 1.\ q + r$
$20 = 1.\ 11 + 9.$	$q = 1.\ r + s$
$11 = 1.\ 9 + 2.$	$r = 1.\ s + t$
$9 = 4.\ 2 + 1.$	$s = 4.\ t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0.$	$t = 2.\ u + 7.$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel §. 14. vorgestellt werden, wie folget:

$56 = 1.\ 39 + 17$	$p = 1.\ q + r$
$39 = 2.\ 17 + 5$	$q = 2.\ r + s$
$17 = 3.\ 5 + 2$	$r = 3.\ s + t$
$5 = 2.\ 2 + 1$	$s = 2.\ t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2.\ u + 11.$

19.

Solchergestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen.

Es sey nemlich gegeben diese Gleichung: $bp = aq + n$, wo a, b und n bekannte Zahlen

len sind. Hier muß man nun eben die Operation anstellen, als wenn man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen sogleich p und q durch die folgenden Buchstaben bestimmt werden, wie folget:

Es sey		so wird	
$a = Ab + c$		$p = Aq + r$	
$b = Bc + d$		$q = Br + s$	
$c = Cd + e$		$r = Cs + t$	
$d = De + f$		$s = Dt + u$	
$e = Ef + g$		$t = Eu + v$	
$f = Fg + o$		$u = Fv \pm n$	

Hier wird in der letzten Bestimmung $+n$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, hingegen aber $-n$, wenn dieselbe Zahl gerade ist. Solchergestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwinde aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen:

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig lasse, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey N, dahero muß erstlich seyn $N = 11p + 3$, hernach auch $N = 19q + 5$, und

so

so wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19p + 2$, woraus folgende Tabelle verfertiget wird.

$19 = 1.\ 11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1.\ 8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2.\ 3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1.\ 2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2u + 2.$

Wo man u nach Belieben annehmen kann, um daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts zu bestimmen, wie folget:

$t = 2u + 2$
$s = t + u = 3u + 2$
$r = 2s + t = 8u + 6$
$q = r + s = 11u + 8$
$p = q + r = 19u + 14.$

Hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$, dahero ist die kleinste Zahl für N, 157.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl N welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig lasse; wenn dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach

Nach der letzten Bedingung muß seyn: $N = 29p + 10$, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden $N = 209u + 157$, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, dahero wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Operation angestellet wird:

$209 = 7.29 + 6$;	also	$p = 7q + r$
$29 = 4.6 + 5$;		$q = 4r + s$
$6 = 1.5 + 1$;		$r = s + t$
$5 = 5.1 + 0$;		$s = 5t - 147$

von wannen wir folgendergestalt zurück gehen:

$s = 5t - 147$
$r = s + t = 6t - 147$
$q = 4r + s = 29t - 735$
$p = 7q + r = 209t - 5292$

Dahero $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wenn man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemercken daß wenn eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelöst wer-

werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Frage unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denselben gemeinen Theiler hätte.

Denn wenn z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemahls 2 werden kann; wäre aber in diesem Falle $n = 3$ oder $n = 6$ etc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da dann herauskäme $3p = 5q + 1$ welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die vorgegebene Regel in keine andere Fälle Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Wege behandeln. Da wird nun seyn $p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9} = q + r$, also daß

$9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; dahero $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s$, also daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; dahero $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, welches offenbar niemahls eine gantze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine gantze Zahl seyn muß, woraus folglich zu ersehen daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.

Capitel 2.

Von der sogenannten Regel Coeci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt, daß dafür gantze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als

zwey

zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechenbüchern vor und pflegen nach der sogenannten Regel=Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirthshause 50 Rthlr. davon zahlt ein Mann 3 Rthlr. ein Weib 2 Rthlr. und ein Kind 1 Rthlr. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgenden Gleichungen:

$$\text{I. } p + q + r = 30;$$

$$\text{II. } 3p + 2q + r = 50;$$

aus welchen die drey Buchstaben p, q und r in gantzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner seyn als 30:

dieser

dieser Werth in der andern für r geschrieben giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbsten kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind, als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen:

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;

Zahl der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8\ 6, 4, 2, 0$;

Zahl der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$.

Läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Rthlr. nun kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthlr. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthlr. und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Rthlr.; wie viel waren es von jeder Gattung?

Es sey die Zahl der Schweine $= p$, der Ziegen

gen $= q$, der Schafe $= r$, so hat man die folgenden zwey Gleichungen:

I. $p + q + r = 100$;

II. $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$;

diese letztere multiplicire man mit 6 um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern gesetzt, giebt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$; also muß $18p$ durch 5 theilbar seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige gantze Zahl genommen werden kann, doch so daß q nicht negativ werde, dahero s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wenn 0 ausgeschlossen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden:

nemlich wenn	$s = 1, 2, 3$
so wird	$p = 5, 10, 15$
	$q = 42, 24, 16$
	$r = 53, 66, 79.$

27.

Wenn man dergleichen Exempel selbsten vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen ob, dieselben möglich sind; um nun davon zu urtheilen, ist folgendes zu bemercken:

Es seyn die beyden Gleichungen so wir bisher gehabt, also vorgestellt I. $x + y + z = a$, II. $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind: nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste, da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$, dahero muß fa größer seyn als b, oder b muß kleiner seyn als fa; und da ferner $hx + hy + hz$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wofern demnach die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, so ist die Frage unmöglich.

Diese Bedingung pflegte auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl b zwischen diesen Gräntzen fa und ha enthalten seyn muß: ferner muß dieselbe auch nicht einer der beyden Gräntzen gar

zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Exempel wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{2}$, waren die Gräntzen 350 und 50, wollte man nun setzen $b = 51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x + 8y + 3z = 306$; man nehme die erste dreymahl so wird $3x + 3y + 3z = 300$, so von jener abgezogen, läßt $18x + 5y = 6$, welche gleich offenbar unmöglich ist, weil x und y gantze Zahlen seyn müssen.

28.

Diese Regel kommt auch den Müntzmeistern und Goldschmieden wohl zu statten, wenn sie aus drey oder mehrere Sorten Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammenschmelzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Müntzmeister hat dreyerley Silber, das erste ist 14-löthig, das andere 11-löthig, und das dritte 9-löthig. Nun soll er eine Masse 30 Mark schwer machen, welche 12-löthig

seyn

seyn soll: wie viel Mark muß er also von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x + y + z = 30$, welches die erste Gleichung ist.

Da ferner ein Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark enthalten $14x$ Loth; eben so werden die y Mark von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Mark von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber: dahero die gantze Masse enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, wovon ein Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber, nemlich 360 Loth darinn seyn; woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x + 11y + 9z = 360$, hiervon subtrahire man die erste 9 mahl genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in gantzen Zahlen, alsdann aber wird $z = 30 - x - y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x = 2u$ so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$, also muß u gröber

als

als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden.

u = 5,	6,	7,	8,	9.
x = 10,	12,	14,	16,	18.
y = 20,	15,	10,	5,	0.
z = 0,	3,	6,	9,	12.

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekannte Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl., 1 Ochsen für 10 Rthl., 1 Kuh für 5 Rthl. 1 Kalb für 2 Rthl., 1 Schaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey = p, der Kühe = q, der Kälber = r, und der Schafe = s, so ist die erste Gleichung $p + q + r + s = 100$, die zweite aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt giebt $20p + 10q + 4r + s = 200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man $19p + 9q + 3r = 100$; hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$

$-9q$ und $r=33+\frac{1}{3}-6p-\frac{1}{3}p-3q$, oder $r=33-6p-3q+\frac{1-p}{3}$, dahero muß $1-p$ oder $p-1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze demnach

$p-1=3t$ so wird:

$p=3t+1$
$q=q$
$r=27-19t-3q$
$s=72+2q+16t$

also muß $19t+3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t+3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wenn $t=0$,	II. wenn $t=1$,	t kann nicht $=2$ gesetzt werden, weil sonsten r negativ würde.
so wird $p=1$	so wird $p=4$	
$q=q$	$q=q$	
$r=27-3q$	$r=8-3q$	
$s=72+2q$	$s=88+2q$	

Im ersten Falle muß q nicht größer seyn als 9, und im zweyten Falle muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Falle erhalten wir diese 10 Auflösungen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Falle aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wenn man aber 0 nicht wollte gelten lassen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey ganze Zahlen, wenn die erste mit 3, die andere mit 5 und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wenn aber die erste mit 9, die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$, die zweyte $= y$ und die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen I.) $3x+5y+7z=560$, II.) $9x+25y+49z=2920$ von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nemlich $9x+15y+21z=1680$, so bleiben übrig $10y+28z=1240$, oder durch 2 dividirt $5y+14z=620$, daraus wird $y=124-\frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen lassen; dahero setze man $z=5u$, so wird $y=124-14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x-35u+620=560$, oder $3x=35u-60$ und $x=\frac{35u}{5}-20$; deswegen setze man $u=3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung: $x=35t-20$, $y=124-42t$, und $z=15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

I.) wenn $t = 1$ so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$
II.) wenn $t = 2$ wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.

Capitel 3.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt.

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt, oder in einer höhern Potestät vorkommt, wenn nur von der andern blos die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{etc.} = 0$, in welcher nur y vor-

vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten, und mit den leichtern den Anfang machen.

32.

I. Frage: Man suche zwey Zahlen, wenn ihre Summe zu ihrem Producte addirt wird, daß 79 herauskommen?

Es seyn die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß seyn $xy+x+y=79$, woraus wir bekommen $xy+y=79-x$ und $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$, woraus erhellet, daß $x+1$ ein Theiler seyn muß von 80; da nun 80 viele Theiler hat, so findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgenden zu ersehen:

die Theiler sind 1,	2,	4,	5,	8,	10,	16,	20,	40,	80,
daher wird x = 0,	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und y = 79,	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I.)

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solchergestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelößt werden $xy+ax+by=c$, woraus kommt $xy+by=c-ax$ und also $y=\frac{c-ax}{x+b}$ oder $y=-a+\frac{ab+c}{x+b}$; dahero muß $x+b$ ein Theiler seyn der bekannten Zahl $ab+c$, und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefungen werden. Man setze dahero es sey $ab+c=fg$ also daß $y=-a+\frac{fg}{x+b}$. Nun nehme man $x+b=f$ oder $x=f-b$, so wird $y=-a+g$ oder $y=g-a$; derohalben auf so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab+c$ durch zwey Factores als fg vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nemlich $x=f-b$ und $y=g-a$, die andere aber kommt gleichergestalt heraus, wenn man $x+b=g$ setzt, da wird $x=g-b$ und $y=f-a$.

Sollte dahero diese Gleichung vorgegeben seyn $xy+2x+3y=42$ so wäre $a=2$, $b=3$, und $c=42$ folglich $y=-2+\frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl

48 auf vielerley Art durch 2 Factores als f g vorgestellt werden, da denn immer seyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$. Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	1. 48		2. 24		3. 16		4. 12		6. 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgestellt werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c, und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y so bekommt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$, damit hier x aus dem Zähler weggebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit m, so hat man $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle dahero den Zähler durch zwey Factores als f g vor, welches

öfters

öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe, ob sich einer davon mit $mx-b$ vergleichen lasse, also daß $mx-b$, f: hierzu wird aber erfordert, weil $x=\frac{f+b}{m}$, daß $f+b$ sich durch m theilen lasse; daher hier nur solche Factores von $mc+ab$ gebraucht werden können, welche, wenn dazu b addirt wird, sich durch m theilen lassen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy=2x+3y+18$. Hieraus bekommt man $y=\frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}$, hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96, welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet, daß nur diese, nemlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach I.) $5x-3=2$, so wird $5y=50$
und daher $x=1$, und $y=10$

II.) $5x-3=12$, so wird $5y=10$
und dahero $x=3$, und $y=2$

III.) $5x-3=32$, so wird $5y=5$
und dahero $x=7$, und $y=1$

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung $my-a = \frac{mc+ab}{mx-b}$ wird, so ist dienlich diese Anmerkung zu machen: daß wenn eine in dieser Form $mc+ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form $mx-b$ enthalten ist, alsdenn der Quotient nothwendig diese Form $my-a$ haben müsse, und daß alsdenn die Zahl $mc+ab$ durch ein solches Product, $(mx-b)(my-a)$ vorgestellt werden könne: Es sey z. E. $m=12$, $a=5$, $b=7$ und $c=15$; so bekommt man $12y-5=\frac{215}{12x-7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x-7$ enthalten sind, oder wenn man 7 dazu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x-7=5$ und $12y-5=43$. Wie nun aus der ersten wird $x=1$, so findet man auch aus der andern y in ganzen Zahlen, nemlich $y=4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdient deswegen wohl bemerkt zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser

Art

Art betrachten $xy+xx=2x+3y+29$. Hieraus findet man nun $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$ oder $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$; also muß $x-3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdann wird der Quotient $=y+x+1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26, so erhalten wir diese Auflösungen:

I. $x-3=1$ oder $x=4$, so wird $y+x+1=y+5=26$; und $y=21$

II. $x-3=2$ oder $x=5$, also $y+x+1=y+6=13$; und $y=7$

III. $x-3=13$ oder $x=16$, so wird $y+x+1=y+17=2$; und $y=-15$

welcher negative Werth wegzulassen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x-3=26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden

werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdann kommt es darauf an, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierinn bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrational-Formeln zur Rationalität gebracht werden können, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.

Capitel 4.

Von der Art diese irrationale Formeln $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ rational zu machen.

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadrat-Wurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x, wobey zum voraus zu bemerken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde: wenn aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit Rational-Werthe begnügen, und nicht fordern, daß dieselben sogar ganze Zahlen seyn sollen, als welches eine ganz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmahl die zweyte Potestät vorkommen, und $c = 0$ seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen $a+bx = yy$, woraus man sogleich erhielte $x = \frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational herauskäme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wenn zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht

nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadrat-Zahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, dahero man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1+xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1+xx=yy$, so würde $xx=yy-1$ und $x=\sqrt{(yy-1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige, und also hierdurch nichts gewonnen würde.

Daß es aber wirklich solche Brüche gebe welche für x gesetzt, $1+xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I. Wenn $x=\frac{3}{4}$ so wird $1+xx=\frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II. Eben dieses geschieht wenn $x=\frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$ herauskommt.

III. Hernach wenn man setzt $x=\frac{5}{12}$ so erhält man $1+xx=\frac{169}{144}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und sogar alle mögliche gefunden werden, soll hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1+xx)} = x+p$ so wird $1+xx = xx+2px+pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx, so wird $2px+pp = 1$, woraus gefunden wird $x = \frac{1-pp}{2p}$ wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch sogar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze dahero $p = \frac{m}{n}$ so wird $x = \frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$: diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x = \frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1+xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viele Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{nn-mm}{2mn}$, so wird $1+xx = 1+\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn}$ oder $1+xx = \frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$

welcher

welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist und daraus gefunden wird $\sqrt{(1+xx)} = \frac{nn+mm}{2mn}$.

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerkt werden:

wenn	$n =$	2,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und	$m =$	1,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird	$x =$	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{15}{8}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$,

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (nn-mm)^2 = (nn+mm)^2$; wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat ist, hierdurch wird nun diese Frage aufgelößt.

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadrat-Zahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$ so wird $r=nn+mm$; da hernach ferner $(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, so können wir auch diese Frage auflösen.

Zwey

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadrat-Zahl sey? also daß $pp-qq=rr$; denn da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$; oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdenn $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgendergestalt:

Man setze $\sqrt{(1+xx)}=1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man $1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mxx}{nn}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt, und folglich giebt $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt $nnx=2mn+mmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{2mn}{nn-mm}$: denn setzt man diesen Werth für x, so wird $1+xx=1+\frac{4mmnn}{n^4-2mmnn+m^4}$ oder $=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{n^4-2mmnn+m^4}$, welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Da man nun also diese Gleichung bekommt $1+\frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$ so fließt daraus wie oben $(nn-mm)^2+(2mn)^2=$

$= (nn+mm)^2$ welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, um die allgemeine Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erste gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; die andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadrat-Zahl oder die gegebene Formel sey $a+bx+ffxx$, welche ein Quadrat werden soll; zu diesem Ende setze man $\sqrt{(a+bx+ffxx)} = fx+\frac{m}{n}$, so wird $a+bx+ffxx = ffxx+\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, wo sich die xx beyderseits aufheben, also daß $a+bx = \frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna+nnbx = 2mnfx+mm$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$; wird nun dieser Werth für x geschrieben, so wird $\sqrt{(a+bx+ffxx)} = \frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf}+\frac{m}{n} = \frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, also daß $p = mm - nna$, und $q = nnb - 2mnf$, und alsdenn wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat wenn sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird: dahero auch diese Formel $aqq + bpq + ffpp$ ein Quadrat wird, wenn man setzt $p = mm - nna$ und $q = nnb - 2mnf$, woraus endlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II. Der zweyte Fall findet statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{(ff + bx + cxx)} = f + \frac{mx}{n}$ so wird $ff + bx + cxx = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, wo sich die ff aufheben und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, also daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$ oder $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; setzt man nun

diesen Werth für x, so wird $\sqrt{(ff+bx+cxx)} = f + \frac{2nmf-mnb}{nnc-mm} = \frac{nncf+mmf-mnb}{nnc-mm}$, setzt man hier $x = \frac{p}{q}$ so kann wie oben folgende Formel zu einem Quadrate gemacht werden, $ffqq+bpq+cpp$, als welches geschiehet wenn man setzt $p = 2mnf-nnb$ und $q = nnc-mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = 0$; oder wenn diese Formel $bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; darf man nur setzen $\sqrt{(bx+cxx)} = \frac{mx}{n}$ so wird $bx+cxx = \frac{mmxx}{nn}$, wo durch x dividirt und mit nn multiplicirt herauskommt, $bnn+cnnx = mmx$, folglich $x = \frac{nnb}{mm-cnn}$. Man suche zum Exempel alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadrat Zahlen sind, so muß $\frac{xx+x}{2}$, und also auch $2xx+2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx+2nn = mmx$ und $x = \frac{2nn}{mm-2nn}$; wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdenn aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch ganze Zahlen herauskommen, nemlich wenn man setzt $m = 3$

und

und $n = 2$ so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch setzen $m = 7$, und $n = 5$, so wird $x = -50$ wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$ und auch das Quadrat von 35; dieses wäre auch herausgekommen, wenn man gesetzt hätte $n = 7$ und $m = 10$, denn da wird $x = 49$.

Eben so kann man setzen $m = 17$ und $n = 12$, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, welches eine Quadrat-Zahl ist, deren Wurzel $= 12 \cdot 17 = 204$.

50.

Bey diesem letzten Falle ist zu erwegen, daß die Formel $bx + cxx$ aus diesem Grunde zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt wenn sich $a + bx + cxx$ in zwey Factores theilen läßt, welches geschiehet

wenn

wenn bb—4ac ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen, so ist zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a+bx+cxx=0$, so wird $cxx=-bx-a$ und $xx=-\frac{bx}{c}-\frac{a}{c}$, woraus gefunden wird $x=-\frac{b}{2c}\pm\sqrt{(\frac{bb}{4cc}-\frac{a}{c}}$, oder $x=-\frac{b}{2c}\pm\frac{\sqrt{(bb-4ac)}}{2c}$, woraus erhellet, daß wenn $bb-4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzeln rational angegeben werden können.

Es sey demnach $bb-4ac=dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b\pm d}{2c}$, oder es ist $x=\frac{-b\pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a+bx+cxx$ diese Divisores $x+\frac{b-d}{2c}$ und $x+\frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen; man findet nemlich $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{dd}{4cc}$; da nun $dd=bb-4ac$, so hat man $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{bb}{4cc}+\frac{4ac}{4cc}=xx+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt giebt $cxx+bx+a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Producte gleich seyn:

$$(cx+\frac{b}{2}-\frac{d}{2})(x+\frac{b}{2c}+\frac{d}{2c})$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb-4ac$ ein Quadrat ist.

51.

§ 1.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrate gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III. Dieser Fall ereignet sich nun, wenn unsere Formel durch ein solches Product vorgestellt werden kann $(f+gx).(h+kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon: $\sqrt{(f+gx).(h+kx)} = \frac{m.(f+gx)}{n}$, so bekommt man $(f+gx)(h+kx) = \frac{mm.(f+gx)^2}{nn}$ welche Gleichung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx = \frac{mm.(f+gx)}{nn}$, das ist $hnn+knnx = fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x = \frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

§ 2.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen x, daß wenn man von ihrem doppelten Quadrate 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun $2xx-2$ ein Quadrat seyn muß, so ist zu erwegen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2.(x+1)(x-1)$: man setze also die Wurzel davon $\frac{m.(x+1)}{n}$, so wird $2.(x+1)(x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; man dividire durch $x+1$ und multiplicire mit nn, so bekommt man $2nnx-2nn = mmx + mm$ und dahero $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2 = 16 = 4^2$.

Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleich viel ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$, aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a=6$, $b=13$ und $c=6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also ob $bb-4ac$ ein Quadrat werde; da nun 25 kommt, so weiß man, daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind $(2+3x).(3+2x)$; davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekommt man $(2+3x).(3+2x)$

=

$= \frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird $3nn + 2nnx = 2mm + 3mmx$ und daher wird $x = \frac{2mm - 3nn}{2nn - 3mm} = \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3nn$ größer seyn als $2mm$, und also $2mm$ kleiner als $3nn$; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß $3mm$ größer seyn als $2nn$ und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um dahero für x positive Zahlen zu finden, so müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$.

Setzt man nun $m = 6$ und $n = 5$, so wird $\frac{mm}{nn} = \frac{36}{25}$ welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$ und offenbar größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x = \frac{3}{58}$.

54.

IV. Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wenn die Formel $a + bx + cxx$ dergestalt in zwey Theile getheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen lasse, also daß eine solche Form herauskomme $pp + qr$, wo die Buchstaben

p, q und r Formeln von dieser Art $f+gx$ bedeuten. Denn da darf man nur setzen $\sqrt{(pp+qr)} = p+\frac{mq}{n}$, so wird $pp+qr = pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$, wo sich die pp aufheben und die übrigen Glieder durch q theilen lassen, also daß $r = \frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$ oder $nnr = 2mnp+mmq$, daraus sich leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrate gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen und 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wenn man davon 1 subtrahirt ein Quadrat übrig bleibe? wie bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen 50 ist, wovon 1 subtrahirt das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx-1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a=-1$, $b=0$, und $c=2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen; weil $bb-4ac=8$ kein Quadrat ist, und dahero keiner von den drey ersten Fällen statt findet.

Nach

Nach dem vierten Falle aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$ Hiervon werde nun die Wurzel gesetzt $x+\frac{m(x+1)}{n}$, dahero wird $xx+(x+1).(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, wo sich die xx aufheben und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen lassen, da denn kommt $nnx-nn=2mnx+mmx+mm$ und $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; und weil in unserer Formel $2xx-1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel ob die Werthe von x positiv oder negativ herauskommen. Man kann auch sogleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben, damit man bekomme $x=\frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x=1$ und $2xx-1=1$. Es sey ferner $m=1$ und $n=2$, so wird $x=\frac{5}{7}$ und $2xx-1=\frac{1}{49}$. Setzt man aber $m=1$ und $n=-2$, so wird $x=-5$, oder $x=+5$ und $2xx-1=49$.

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100?

Es muß also diese Formel $2xx+2$ ein Quadrat seyn, wo $a=2$, $b=0$ und $c=2$, also weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $bb-4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der 4ten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen.

Man setze den ersten Theil $=4$, so wird der andere seyn $2xx-2=2(x+1).(x-1)$, und daher unsere Formel $4+2(x+1).(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2+\frac{m.(x+1)}{n}$, woraus diese Gleichung entspringt $4+2(x+1).(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$ wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x+1$ theilen lassen, also daß $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$ und daher $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Setzt man $m=1$ und $n=1$ so wird $x=7$, und $2xx+2=100$. Nimmt man $m=0$ und $n=1$ so wird $x=1$ und $2xx+2=4$.

57.

Oefters geschiehet es auch, daß wenn weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man

man nicht finden kan, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wenn diese Formel vorkäme $7+15x+13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der erste Theil ist $(1-x)^2$ oder $1-2x+xx$, und daher wird der andere seyn $6+17x+12xx$, welcher deswegen Factoren hat weil $17^2-4.6.12=1$ und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch wirklich $(2+3x).(3+4x)$; also daß diese Formel seyn wird $(1-x)^2+(2+3x)(3+4x)$ welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; dahero wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen; weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Falle möglich, so ist es leicht alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der ganze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darinn, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Quadrat wird? indem man für n einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen ob in keinem Falle ein Quadrat herauskomme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wenn etwann eine gebrochene Zahl für x gesetzt dieses leisten sollte, kann man sogleich für x einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a+\frac{bt}{u}+\frac{ctt}{uu}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat uu multiplicirt ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen kann, daß diese Formel $auu+btu+ctt$ ein Quadrat werde? denn alsdann wenn man setzt $x=\frac{t}{u}$ so wird auch diese Formel $a+bx+cxx$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sey, die

Formel

Formel zu einem Quadrate zu machen; als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2+7xx$, wo $a=2$, $b=0$ und $c=7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x=1$; dahero setze man $x=1+y$, so wird $xx=1+2y+yy$, und unsere Formel wird seyn $9+14y+7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadrat-Wurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; da bekommen wir $14nn+7nny=6mn+mmy$ und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7nn-mm}{7nn-mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt

Setzt man nun $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{1}{3}$, oder auch weil nur xx vorkommt, $x = +\frac{1}{3}$, dahero wird $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -1$ oder $x = +1$.

Setzt man aber $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = 17$; daraus wird $2 + 7xx = 2025$, welches das Quadrat ist von 45.

Laßt uns auch setzen $m = 8$ und $n = 3$, so wird $x = -17$ wie zuvor.

Setzen wir aber $m = 8$ und $n = -3$, so wird $x = 271$, daraus wird $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx + 3x + 7$, welche ein Quadrat wird, wenn $x = -1$. Deswegen setze man $x = y - 1$ so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - 7y + 9 \end{array}$$

davon

davon setze man die Quadrat-Wurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, so wird $5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$; dahero wir bekommen $5nny - 7nn = -6mn + mmy$, und $y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}$, folglich $x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}$.

Es sey $m = 2$ und $n = 1$, so wird $x = -6$ und also $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, so wird $x = 18$ und $5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx + 15x + 13$, und so gleich setzen $x = \frac{t}{u}$, also daß diese Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen wie folget:

Es sey $t = 1$ und $u = 1$, so wird unsere Formel $= 35$
$t = 2$ und $u = 1$ $= 71$
$t = 2$ und $u = -1$ $= 11$
$t = 3$ und $u = 1$ $= 121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$ und so

wird unsere Formel $7yy+42y+63+15y+45$ $+13$ oder $7yy+57y+121$; davon setze man die Wurzel $=11+\frac{my}{n}$, so bekommt man $7yy+57y$ $+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny+57nn$ $=22mn+mmy$, und daher $y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$ und $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$.

Man setze z. E. $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Es sey ferner $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{17}{6}$. Nimmt man $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=\frac{129}{2}$ und unsere Formel $7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2$.

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, oder wenn man für x schreibt $\frac{t}{u}$, oder bey dieser $3tt$ $+2uu$, welche man mag auch für t und u Zahlen annehmen welche man will, niemals ein Quadrat wird. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrate gemacht werden können, giebt es unendlich viele, und deswegen wird es der Mühe werth

seyn

seyn einige Kennzeichen anzugeben, woran die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat herauskommt; wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

Capitel 5.

Von den Fällen, da die Formel $a+bx+cxx$ niemals ein Quadrat werden kann.

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet wenn man setzt $x = \frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt $a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}$, oder $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$. Soll diese ein Quadrat werden, so setze man solche $= \frac{zz}{4}$, so wird $4ac-bb+yy = czz$ folglich $yy = czz+bb-4ac$. Wenn also

unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese $czz+bb-4ac$ ein Quadrat und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich wenn man für $bb-4ac$ schreibt t, so kommt es darauf an, ob eine solche Formel $czz+t$ ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

64.

Wenn $t=o$ ist, so ist offenbar, daß die Formel czz nur alsdann ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein anderes dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann czz kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$ das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel czz auf keinerley Weise ein Quadrat werden: Ist aber c vor sich eine Quadrat-Zahl, so ist auch czz ein Quadrat, man mag für z annehmen was man will.

65.

65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen lassen, und durch diese Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig lassen, und in dieser Formel $3n+1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und durch diese Formel $3n+2$ vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen drey Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadrate davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn$, welches sich also nicht nur durch 3, sondern sogar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n+1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn+6n+1$, welches durch 3 dividirt giebt $3nn+2n$ und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n+1$ gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel $3n+2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn+12n+4$, welches durch 3 dividirt, giebt $3nn+4n+1$, und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n+1$ gehöret: daher ist klar, daß alle Quadrat-Zahlen in Ansehung des Theilers 3, nur von zweyerley Arten sind. Denn entweder lassen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdenn müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Dahero keine Zahl, die in der Formel $3n+2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3xx+2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt diese Formel $3xx+2$ durch 3, so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wenn

aber

aber x ein Bruch ist, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruche wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also t und u keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu} + 2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit uu multiplicirt, das ist diese $3tt + 2uu$ ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Denn entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonsten t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze dahero $u = 3f$, so wird unsere Formel $3tt + 18ff$, welche durch 3 getheilt giebt $tt + 6ff$, so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrate erfordert wird, weil sich zwar $6ff$ theilen läßt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Rest bloß auf das zweyte Glied $2uu$ an. Nun aber uu durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art $3n + 1$: so wird $2uu$ eine Zahl von dieser Art $6n + 2$ seyn, und also durch 3 dividirt

2 übrig lassen: dahero unsere Formel $3tt+2uu$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadrat-Zahl seyn kann.

67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel $3tt+5uu$ niemals ein Quadrat seyn kann, und sogar auch keine von diesen: $3tt+8uu$, $3tt+11uu$ $3tt+14uu$ etc. wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 etc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u=3s$, so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also uu eine Zahl von dieser Art $3n+1$, so wäre zwar das erste Glied $3tt$ durch 3 theilbar, das andere aber $5uu$ von dieser Formel $15n+5$, oder $8uu$ von dieser Formel $24n+8$, oder $11uu$ von dieser $33n+11$ etc. würde durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn können.

68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel $3tt+(3n+2).uu$, welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wenn für n negative

Zahlen

Zahlen gesetzt würden. Also wenn $n = -1$, so ist es unmöglich, diese Formel $3tt - uu$ zu einem Quadrate zu machen. Denn wenn u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar; wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde uu eine Zahl von dieser Art $3n+1$, und also unsre Formel seyn $3tt - 3n - 1$, welche durch 3 dividirt übrig läßt -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$ so wird unsere Formel $3tt - (3m-2)uu$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen dahero auch 4 als einen Theiler betrachten, da denn alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

I. $4n$, II. $4n+1$, III. $4n+2$, IV. $4n+3$,

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16nn$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art $4n+1$, so ist ihr Quadrat $16nn+8n+1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt und gehört also zu dieser Formel $8n+1$.

Ists eine Zahl von der dritten Art $4n+2$ so ist ihr Quadrat $16nn+16n+4$, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Formel $16n+4$ enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten Art $4n+3$, so ist ihr Quadrat $16nn+24n+9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich: daß alle gerade Quadrat-Zahlen in dieser Formel $16n$ oder in dieser $16n+4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n+2$; $16n+6$; $16n+8$; $16n+10$; $16n+12$; $16n+14$, können niemals Quadrat-Zahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel $8n+1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest lassen. Dahero alle übrige ungerade Zahlen welche in einer von diesen Formeln $8n+3$; $8n+5$; $8n+7$, enthalten sind, niemals Quadrate werden können.

71.

Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel $3tt+2uu$ kein Quadrat seyn kann.

kann. Denn entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerad und die andere ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich sowohl tt als uu in dieser Formel $8n+1$ enthalten, so würde das erste Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3 übrig lassen, das andere Glied aber 2 übrig lassen, beyde zusammen aber würden 5 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3tt$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig lassen, also beyde zusammen würden 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerade, nemlich $u=2s$, aber t ungerade, und folglich $tt=8n+1$, so würde unsere Formel seyn $24n+3+8ss$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen $3tt+(8n+2)uu$; imgleichen auch auf diese $(8m+3)tt+2uu$, und auch sogar auf diese $(8m+3)tt+(8n+2)uu$, wo für m und n alle ganze Zahlen sowohl positive als negative genommen werden können.

72.

Wir gehen solchergestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

I. $5n$, II. $5n+1$, III. $5n+2$, IV. $5n+3$. V. $5n+4$,

enthalten sind. Ist es nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbar ist.

Ist es eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+10n+1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt, und also in dieser Formel $5n+1$ enthalten ist.

Ist es eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+20n+4$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist es eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25nn+30n+9$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist es endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25nn+40n+16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wenn dahero eine Quadrat-Zahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest

immer

immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; dahero in diesen Formeln $5n+2$ und $5n+3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

73.

Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5tt+2uu$ noch diese $5tt+3uu$ ein Quadrat werden könne; denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht: im erstern Falle würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht theilbar durch 5, so ist uu entweder $5n+1$ oder $5n+4$, im erstern Falle wird die erste Formel $5tt+10n+2$, welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird $5tt+15n+3$, welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $uu = 5n+4$, so wird die erste Formel $5tt+10n+8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird $5tt+15n+12$, welche durch 3 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Falle kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grunde sieht man auch, daß weder diese Formel $3tt+(5n+2)uu$, noch diese $5tt+(5n+3)uu$ ein Quadrat seyn kann, weil

eben

eben dieselben Reste als vorher übrig bleiben, man kann auch sogar im ersten Gliede $5mtt$ anstatt $5tt$ schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

74.

Wie alle gerade Quadrate in dieser Formel $4n$, alle ungerade aber in dieser Formel $4n+1$ enthalten sind, und also weder $4n+2$, noch $4n+3$, ein Quadrat seyn kann; so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ niemals ein Quadrat seyn kann. Denn wäre t gerade, so würde sich tt durch 4 theilen lassen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen: wären aber beyde Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von tt und uu, 1 seyn, also von der ganzen Formel würde 2 der Rest seyn. Nun aber ist keine Zahl welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu merken, daß sowohl m als n negativ, und auch $=0$ genommen werden kann, dahero weder diese Formel $3tt+3uu$ noch diese $3tt-uu$ ein Quadrat seyn kann.

75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate

drate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, wo sich immer einige Arten finden die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadrate untersuchen wollen.

Arten der Zahlen	ihre Quadrate	gehören zu der Art
I. $7n$	$49nn$	$7n$
II. $7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III. $7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV. $7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V. $7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI. $7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII. $7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Da nun die Quadrate, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun, $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$, und der Grund davon ist offenbar, weil sich immer zwey Arten finden, davon die Quadrate zu einer Gattung gehören.

76.

Um dieses deütlicher zu zeigen, so bemerke man daß die letzte Art $7n+6$ auch also $7n-1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die Formel $7n+5$ mit dieser $7n-2$ einerley, und $7n+4$ ist ebenfalls so viel als $7n-3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n+1$ und $7n-1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen, nemlich 1; eben so sind auch die Quadrate dieser beyden Arten $7n+2$ und $7n-2$ von einerley Gattung.

77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedenen Arten der Zahlen folgende

dn;

$dn+1$, $dn+2$, $dn+3$ etc.

$dn-1$, $dn-2$, $dn-3$ etc.

wo die Quadrate von $dn+1$ und $dn-1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt 1 übrig lassen, und also beyde zu einer Art, nemlich zu $dn+1$ gehören. Eben

so

so verhält es sich auch mit den beyden Arten dn+2 und dn−2, deren Quadrate zu der Art dn+4 gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten dn+a und dn−a, deren Quadrate durch d dividirt einerley übrig lassen, nemlich aa; oder so viel als übrig bleibt, wann man aa durch d theilt.

78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln att+buu welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von diesen drey Formeln 7tt+3uu, 7tt+5uu und 7tt+6uu jemals ein Quadrat werden kann, weil u durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt: ferner weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrate geschehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen mögte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden können.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $a\,xx + b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x = \frac{1}{u}$, also daß diese Formel $att + buu$ zu einem Quadrate gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle wo sogar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

Capitel 6.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird.

79.

Wir haben schon oben gewiesen wie solche Formeln $a + bx + cxx$ verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und dahero begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form $axx + b$ einzuschräncken, wobey es darauf ankommt, daß für x nur gantze Zahlen gefunden werden aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist es nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, denn wäre sie unmöglich so könnten nicht einmahl Brüche für x, geschweige denn gantze Zahlen statt finden.

80.

Man setze also die Formel $axx + b = yy$, da denn beyde Buchstaben x und y gantze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder

errathen habe, denn sonsten würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde, wenn man setzt $x = f$, und wollen das Quadrat durch gg andeuten, also daß $aff + b = gg$ wo demnach f und g bekannte Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Falle noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81.

Da nun schon gefunden worden $aff + b = gg$, und über dieses auch seyn soll $axx + b = yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx - aff = yy - gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit pq, so hat man $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$: um nun diese Gleichung herauszubringen mache man diese Vertheilung $ap(x+f) = q(y+g)$ und $q(x-f) = p(y-g)$, und

aus

aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben x und y: die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt, giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(app - qq)x + (app + qq)f}{pq}$, mit pq multiplicirt wird $2pqg = (app - qq)x + (app + qq)f$, und dahero $x = \frac{2gpq}{app - qq} - \frac{(app + qq)f}{app - qq}$, und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app - qq} - \frac{(app + qq)fq}{(app - qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey ersteren Glieder den Buchstaben g, welche zusammengezogen geben $\frac{g(app + qq)}{app - qq}$; die beyden andern enthalten den Buchstaben f und geben unter einer Benennung $- \frac{2afpq}{app - qq}$, dahero wir erhalten $y = \frac{g(app + qq) - 2afpq}{app - qq}$.

§ 2.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzwecke gar nicht gemäß zu seyn, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y gantze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen was man für p und q für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheinet als unsere

Haupt-

Haupt-Frage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzwecke gelangen: denn da hier alles in gantzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{ap^2+qq}{ap^2-qq} = m$ und $\frac{2pq}{ap^2-qq} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir denn haben werden:

$$mm = \frac{aap^4 + 2app\,qq + q^4}{aap^4 - 2app\,qq + q^4} \text{ und } nn = \frac{4pp\,qq}{aap^4 - 2app\,qq + q^4}$$

dahero bekommen wir:

$$mm - ann = \frac{aap^4 + 2app\,qq + q^4 - 4app\,qq}{aap^4 - 2app\,qq + q^4}$$

$$= \frac{aap^4 - 2app\,qq + q^4}{aap^4 - 2app\,qq + q^4} = 1.$$

83.

Hieraus sieht man daß die beiden Zahlen m und n also beschaffen seyn müssen, daß $mm = ann + 1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche gantze Zahl für n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über

dieses

dieses auch die Zahl f gefunden hat, daß aff + b ein Quadrat werde nemlich gg, so bekommt man vor x und y folgende Werthe in gantzen Zahlen $x = ng - mf$, und $y = mg - naf$, und dadurch wird $axx + b = yy$.

§. 84.

Es ist für sich klar, daß wenn einmahl m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um dahero x und y in gantzen Zahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich sey $aff + b = gg$; so bald dieser Fall bekannt ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da denn seyn wird $axx + b = yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekannt angenommen worden und schreibt $ng + mf$, anstatt f und $mg + naf$, anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue

Wer-

Werthe, aus welchen weiter, wenn sie für f und g gesetzt werden, andere neue herausgebracht werden, und so immerfort, also daß wenn man nur anfänglich einen solchen Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzwecke sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonderes Glück haben weggeschaft werden können, es wird dahero gut seyn noch einen andern kürtzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx + b = yy$ und man schon gefunden hat $aff + b = gg$, so giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, diese aber $b = gg - aff$, folglich muß auch seyn $yy - axx = gg - aff$, und jetzt kommt alles darauf an, wie man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll: da denn sogleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man

setzt $x = f$ und $y = g$: allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den, der schon für bekannt genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann + 1 = mm$, dahero wird nun $mm - ann = 1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg - aff$ so muß auch seyn $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. Laßt uns zu diesem Ende setzen $y = gm + afn$, so bekommen wir: $ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$, welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I.

I. Frage. Man suche alle gantze Zahlen für x, also daß $2xx-1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx-1=yy$?

Hier ist $a=2$ und $b=-1$, der erste Fall so in die Augen fällt ist nun wenn man nimmt $x=1$ und $y=1$. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f=1$ und $g=1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für n zu finden, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, nemlich mm, solches geschiehet nun wenn $n=2$ und $m=3$, dahero wir aus einem jeden bekannten Falle f und g diese neue finden $x=3f+2g$, und $y=3g+4f$; da nun der erste bekannte Fall ist $f=1$ und $g=1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	etc.

88.

II. Frage. Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadrat-Zahlen sind?

Es sey z die Dreyecks-Wurzel, so ist das Dreyeck $\frac{zz+z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß seyn $\frac{zz+z}{2}=xx$: Man multiplicire mit 8 so wird $4zz+4z=8xx$ und

bey-

beyderseits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1=(2z+1)^2 = 8xx+1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wenn man setzt $8xx+1 = yy$, so wird $y = 2z+1$, und also die gesetzte Dreyeck-Wurzel $z = \frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a=8$, und $b=1$, und der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nemlich $f=0$ und $g=1$. Damit ferner werde $8nn+1 = mm$, so ist $n=1$ und $m=3$; dahero bekommt man $x = 3f+g$ und $y = 3g+8f$, ferner $z = \frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen:

$x=f=0$	1	6	35	204	1189	
$y=g=1$	3	17	99	577	3363	
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Frage. Man suche alle Fünfecks-Zahlen welche zugleich Quadrat-Zahlen sind?

Die Fünfecks-Wurzel sey $=z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3zz-z}{2}$, so dem Quadrate xx gleich gesetzt werde; dahero wird $3zz-z = 2xx$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36zz-12z+1 = 24xx+1 = (6z-1)^2$.

Setzt

Setzt man nun $24xx+1=yy$, so ist $y=6z-1$ und $z=\frac{y+1}{6}$: da nun hier $a=24$, $b=1$, so ist der bekannte Fall $f=0$ und $g=1$. Da hernach seyn muß $24nn+1=mm$, so nehme man $n=1$ und da wird $m=5$, dahero erhalten wir $x=5f+g$ und $y=5g+24f$, und $z=\frac{y+1}{6}$; oder auch $y=1-6z$, so wird ebenfalls $z=\frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden:

$x=f=0$	1	10	99	980
$y=g=1$	5	49	485	4801
$z=\frac{y+1}{6}=\frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z=\frac{1-y}{6}=0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage. Man suche alle Quadrate in gantzen Zahlen, welche sieben mal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx+2=yy$, wo $a=7$ und $b=2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x=1$, und denn ist $x=f=1$ und $y=g=3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn+1=mm$, und da findet man leicht

$n=3$

$n = 3$ und $m = 8$; dahero erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus die folgenden Werthe für x gefunden werden.

$x = f =$	1	17	271
$y = g =$	3	45	717

91.

V. Frage. Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es sey die Dreyecks-Wurzel $= p$ und die Fünfecks-Wurzel $= q$, so muß seyn $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq - q = pp + p$; hieraus suche man q, und da $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$, so wird

$q = \frac{1}{6} \pm \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{pp+p}{3})}$, das ist

$q = \frac{1 \pm \sqrt{(12pp + 12p + 1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp + 12p + 1$ ein Quadrat werde, und zwar in ganzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp = 3xx - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, dahero $12pp + 12p + 1 = 3xx - 2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx - 2 = yy$, so ha-

ben wir daraus $p = \frac{x-1}{2}$ und $q = \frac{1+y}{6}$: da nun die ganze Sache auf die Formel $3xx - 2 = yy$ ankommt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$: hernach haben wir für diese Gleichung $mm = 3nn + 1 : n = 1$ und $m = 2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Da also $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$ ist, so wird:

$x = f =$	1	3	11	41
$y = g =$	1	5	19	71
$p =$	0	1	5	20
$q =$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder $q =$	0	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q = \frac{1-y}{6}$ ist.

92.

Bisher waren wir gezwungen aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wenn eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formel anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach

die

die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll diese, $axx + bx + c = yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekannt $aff + bf + c = gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird $a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg$, welche also durch Factores ausgedrückt werden kann $(x-f)(ax+af+b) = (y-g)(y+g)$. Man multiplicire beyderseits mit pq, so wird $pq(x-f)(axx+af+b) = pq(y-g(y+g)$, welche in diese zwey zergliedert werden I. $p(x-f) = q(y-g)$.

II. $q\ ax+af+b) = p(y+g)$.

Man multiplicire die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq-pp)x + (aqq+pp)f + bqq = 2gpq$, daraus finden wir $x = \frac{agpq}{aqq-pp} - \frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}$. Aus der ersten Gleichung ist $q(y-g = p(x-f) = p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{2afqq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}\right)$; also $y - g = \frac{2gpp}{aqq-pp} - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$, und dahero $y = g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$.

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen $\frac{aqq+pp}{aqq-pp} = m$ und $\frac{2pq}{aqq-pp} = n$, so wird $m+1 = \frac{2aqq}{aqq-pp}$ und also $\frac{qq}{aqq-pp} = \frac{m+1}{2a}$: also

wird

wird seyn $x = ng - mf - b\frac{(m+1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen wie oben, nemlich $mm = ann + 1$.

93.

Solchergestalt sind aber die für x und y gefundene Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzwecke kein Genüge leisten. Doch ist zu bemercken, daß wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer gantze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Man nehme p und q dergestalt an, daß $pp = aqq + 1$; da nun $aqq - pp = -1$, so fallen daselbst die Brüche von selbsten weg: und da wird $x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$ und $y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, weil aber in dem bekannten Falle $aff + bf + c = gg$ nur das Quadrate gg vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder — giebt; man schreibe also $-g$ statt $+g$, so werden unsere Formeln seyn: $x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$;

und

und $y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, da denn gewiß seyn wird $axx + bx + c = yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechseck-Zahlen, welche zugleich Quadrate sind?

Da muß denn seyn $2xx - x = yy$, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$ und $y = g = 1$.

Da hernach seyn muß $pp = 2qq + 1$, so wird $q = 2$, und $p = 3$; dahero wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	etc.

94.

Wir wollen aber bey der ersten Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird in ganzen Zahlen.

Es sey demnach $axx + b = yy$ und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich, daß man einen Fall wisse, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff + b = gg$.

Zweytens, daß man solche Zahlen für m und n wisse, daß $mm = ann + 1$ wird; wozu im folgenden Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach ebensowohl neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgendergestallt vorstellen wollen:

$x =$	f	A	B	C	D	E	
$y =$	g	P	Q	R	S	T	etc.

wo $A = ng + mf$ | $B = nP + mA$ | $C = nQ + mB$ | $D = nR + mC$ |
und $P = mg + anf$ | $Q = mP + anA$ | $R = mQ + anB$ | $S = mR + anC$ | etc.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wissen, noch die untere ohne die obere zu wissen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wissen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wissen.

Die

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewissen Progression fort, wovon man ein jedes Glied, z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E=nS+mD=n(mR+anC)+m(nR+mC)$, das ist $E=2mnR+annC+mmC$, so wird, weil $nR=D-mC$, gefunden $E=2mD-mmC+annC$ oder $E=2mD-(mm-ann)C$; da aber $mm=ann+1$ also $mm-ann=1$, so haben wir $E=2mD-C$, woraus erhellet, wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T=mS+anD$, und $D=nR+mC$ so wird $T=mS+annR+amnC$. Da nun ferner $S=mR+anC$, so ist $anC=S-mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt, $T=2mS-R$, also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle ganze Zahlen x, daß da werde $2xx-1=yy$. Da nun $f=1$ und $g=1$ ist: ferner weil $mm=2nn+1$, so wird $n=2$

und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nemlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger des vorhergehenden, giebt das folgende; daher die für x verlangten Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 etc.

Woraus man sieht, daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten lassen, so würde nach der oben gegebenen Methode, eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

Capitel 7.

Von einer besondern Methode die Formel $ann+1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen.

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl a, eine solche ganze Zahl n zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß man bekomme $mm = ann+1$.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1+\frac{np}{q}$. Denn da wird $mm = 1+\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq} = ann+1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen lassen, da denn mit qq multiplicirt kommt $2pq+npp = anqq$, daraus gefunden wird $n = \frac{2pq}{aqq-pp}$, woraus unendlich viele Werthe

für

für n gefunden werden können. Da aber n eine ganze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts; dahero eine ganz andere Methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu bemerken, daß wenn ann+1 ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn welche sie will, solches nicht allezeit möglich sey.

Denn erstlich werden alle Fälle ausgeschlossen wo a eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschlossen, wo a selbst eine Quadrat-Zahl ist, weil alsdenn ann ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber +1 in ganzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Dahero muß unsere Formel also eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadrat-Zahl sey; so oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß ann+1 ein Quadrat werde.

Hat man also eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel

andere

andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist genug, eine einzige, und zwar die kleinste ausfindig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, sondern nur für einen jeglichen besondern Fall gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach mit den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2nn+1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadrat-Wurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als 2n. Man setze dahero dieselbe $=n+p$ so wird p gewiß kleiner seyn als n. Also haben wir $\sqrt{(2nn+1)}=n+p$ und dahero $2nn+1=nn+2np+pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun $nn=2np+pp-1$ ist, so wird $n=p+\sqrt{(2pp-1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp-1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wenn $p=1$, und hieraus

aus findet man $n=2$ und $\sqrt{(2nn+1)}=3$. Wäre dieses letztere nicht sogleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp-1)}$ größer als p und dahero n größer als $2p$, so setze man $n=2p+q$, da denn wird $2p+q=p+\sqrt{(2pp-1)}$ oder $p+q=\sqrt{(2pp-1)}$, hiervon die Quadrate genommen, kommt $pp+2pq+qq=2pp-1$ oder $pp=2pq+qq+1$ und daraus wird $p=q+\sqrt{(2qq+1)}$, also muß $2qq+1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wenn $q=0$, dahero $p=1$ und $n=2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a=3$, so daß die Formel $3nn+1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3nn+1)}=n+p$, da wird $3nn+1=nn+2np+pp$ und $2nn=2np+pp-1$ und daraus $n=\frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$: da nun $\sqrt{(3pp-2)}$ größer als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p ist, so setze man $n=p+q$, da wird $2p+2q=p+\sqrt{(3pp-2)}$ oder $p+2q=\sqrt{(3pp-2)}$: hiervon die Quadrate genommen, wird $pp+4pq+4qq=3pp-2$ oder $2pp=4pq+4qq+2$,

das

das ist $pp = 2pq + 2qq + 1$, dahero $p = q + \sqrt{(3qq+1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich, und also $q = 0$ leistet ein Genüge, daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3nn+1)} = 2$.

100.

Nun sey $a = 5$, um diese Formel $5nn+1$ zu einem Quadrate zu machen, davon die Wurzel grösser ist als $2n$; dahero setze man $\sqrt{(5nn+1)} = 2n+p$ da wird $5nn+1 = 4nn+4np+pp$ und daraus $nn = 4np+pp-1$; und also $n = 2p + \sqrt{(5pp-1)}$. Weil nun $\sqrt{(5pp-1)}$ grösser ist als $2p$, so ist auch n grösser als $4p$; deswegen setze man $n = 4p+q$, so wird $2p+q = \sqrt{(5pp-1)}$ oder $4pp+4pq+qq = 5pp-1$; dahero $pp = 4pq+qq+1$ und also $p = 2q + \sqrt{(5qq+1)}$; dieses leistet ein Genüge wenn $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; dahero $\sqrt{(5nn+1)} = 9$.

101.

Es sey ferner $a = 6$, um $6nn+1$ zu einem Quadrate zu machen, wovon die Wurzel grösser ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6nn+1)} = 2n+p$, so wird $6nn+1 = 4nn+4np+pp$ oder $2nn = 4np+pp-1$, und dahero $n = p + \frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6pp-2)}}{2}$

also

also n gröſser als 2p; man setze deswegen $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$ oder $2pp = 8pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 4pq + 2qq + 1$, woraus gefunden wird $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, daraus denn wird $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6nn + 1)} = 5$.

102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7nn + 1 = mm$; es ist also m gröſser als 2n, dahero setze man $m = 2n + p$, so wird $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $3nn = 4np + pp - 1$, daraus gefunden wird $n = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$. Da nun n gröſser ist als $\frac{4}{3}p$ und also gröſser als p, so setze man $n = p + q$, so wird $p + 3q = \sqrt{(7pp - 2)}$, die Quadrate genommen $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; $6pp = 6pq + 9qq + 3$, oder $2pp = 2pq + 3qq + 1$, daraus kommt $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$. Da nun hier n gröſser ist als $\frac{3}{2}q$, also gröſser als q, so setze man $p = q + r$, so wird $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$, die Quadrate genommen $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$ oder

6qq

$6qq = 4qr + 4rr - 2$, oder $3qq = 2qr + 2rr - 1$ daraus gefunden wird $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$. Die Quadrate genommen $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, oder $3rr = 12rs + 9ss + 3$ und $rr = 4rs + 3ss + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekommt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann folgendergestalt sehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn + 1 = mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$ oder $2nn = 6np - pp + 1$, und daraus $p = \frac{3p - \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n = 3p - q$, so wird $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$ und die Quadrate genommen $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$ und $pp = 6pq - 2qq + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$. Hier kann man nun sogleich setzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$ und $m = 8$, wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn+1 = mm$ und daher m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n-p$, so wird $8nn+1 = 9nn-6np+pp$, oder $nn = 6np-pp+1$, daraus $n = 3p+\sqrt{(8pp+1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, dahero man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleichergestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wenn dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzel-Zeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $\sqrt{(att+1)}$, da man denn nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Falle die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $ann+1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzwecke, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich

lich geschwind, kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger, und dahero wird es gut seyn, diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a = 13$ also daß seyn soll $13nn + 1 = mm$. Weil nun mm größer ist als $9nn$, und also m größer ist als $3n$, so setze man $m = 3n + p$, da wird $13nn + 1 = 9nn + 6np + pp$, oder $4nn = 6np + pp - 1$, daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(13pp-4)}}{4}$, dahero n größer ist als $\frac{6}{4}p$ und also größer als p; man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13pp-4)}$, die Quadrate genommen $13pp - 4 = pp + 8pq + 16qq$, dahero $12pp = 8pq + 16qq + 4$, oder durch 4 getheilt $3pp = 2pq + 4qq + 1$ und daraus $p = \frac{q + \sqrt{(13qq+3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q+3q}{3}$, also größer als q; man setze demnach $p = q + r$, so wird $2q + 3r = \sqrt{(13qq+3)}$, das Quadrat genommen $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, das ist $9qq = 12qr + 9rr - 3$, durch 3 dividirt $3qq = 4qr + 3rr - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + \sqrt{(13rr-3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r+3r}{3}$ und also q größer als r; dahero setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13rr-3)}$, die Quadrate ge-

genommen $13rr-3 = rr+6rs+9ss$, oder $12rr = 6rs+9ss+3$, durch 3 dividirt wird $4rr = 2rs+3ss+1$ und daraus $r = \frac{s+\sqrt{(13ss+4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s+3s}{4}$ oder s; dahero setze man $r = s+t$, so wird $3s+4t = \sqrt{(13ss+4)}$, das Quadrat genommen $13ss+4 = 9ss+24st+16tt$ und also $4ss = 24ts+16tt-4$; durch 4 dividirt $ss = 6ts+4tt-1$, daraus wird $s = 3t+\sqrt{(13tt-1)}$. Also ist s größer als $3t+3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t+u$, so wird $3t+u = \sqrt{(13tt-1}$, das Quadrat genommen $13tt-1 = 9tt+6tu+uu$ und daraus $4tt = 6tu+uu+1$ und $t = \frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u; man setze deswegen $t = u+v$, so wird $u+4v = \sqrt{(13uu+4)}$, die Quadrate genommen $13uu+4 = uu+8uv+16vv$ und $12uu = 8uv+16vv-4$, durch 4 dividirt $3uu = 2uv+4vv-1$, daraus $u = \frac{v+\sqrt{(13vv-3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, folglich setze man $u = v+x$, so wird $2v+3x = \sqrt{(13vv-3)}$, die Quadrate genommen $13vv-3 = 4vv+12vx+9xx$ oder $9vv = 12vx+9xx+3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx+3xx+1$, daraus man findet $v = \frac{2x+\sqrt{(13xx+3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{5}{3}x$ und also größer als x, deswegen

setze

setze man $v = x + y$, so wird $x+3y = \sqrt{(13xx+3)}$, die Quadrate genommen $13xx+3 = xx+6xy+9yy$ oder $12xx = 6xy+9yy-3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy+3yy-1$ und $x = \frac{y+\sqrt{(13yy-4)}}{4}$, wo x grösser ist als y, daherò setze man $x = y+z$, so wird $3y+4z = \sqrt{(13yy-4)}$, die Quadrate genommen $13yy-4 = 9yy+24yz+16zz$ oder $4yy = 24yz+16zz+4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz+4zz+1$, daraus $y = 3z+\sqrt{(13zz+1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist, so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwärts, wie folget:

$z = 0$

$y = 1$

$x = y + z = 1$

$v = x + y = 2$

$u = v + x = 3$

$t = u + v = 5$

$s = 6t + u = 33$

$r = s + t = 38$

$q = r + s = 71$,

$p =$

$$p = q + r = 109$$
$$n = p + q = 180$$
$$m = 3n + p = 649$$

Also ist 180 nach o die kleinste ganze Zahl für n, daß $13nn+1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, dahero es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu bemerken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden

gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadrat-Zahl, welches zu zeigen der Mühe werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadrat-Zahl, und da seyn soll $(ee-2)nn+1 = mm$, so ist offenbar m kleiner als en, deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee-2)nn+1 = eennn-2enp+pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, wo sogleich in die Augen fällt, daß wenn man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee - 1$.

Wäre z. E. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn+1 = mm$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nemlich $a = ee-2$, so wird $ann+1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee-1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee - 1$ nemlich um 1 weniger als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn

soll $(ee-1)nn+1 = mm$. Da nun hier m wieder kleiner ist als en, so setze man $m = en-p$, so wird $(ee-1)nn+1 = eennn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$: wo das Wurzelzeichen wegfällt, wann $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieses ist auch leicht zu sehen: denn da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, so wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, welches das Quadrat von $2ee - 1$ ist. Es sey z. E. $a = 24$, also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$ *).

110.

Es sey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadrat-Zahl, daß also seyn soll $(ee+1)nn + 1 = mm$, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee+1)nn + 1 = eennn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird

$n = 2e$

*) Das Wurzel-Zeichen in diesem Falle verschwindet auch wenn $p = 0$ gesetzt wird; dahero wir denn unstreitig die kleinsten Zahlen für n und m erhalten, welche sind $n = 1$ und $m = e$. Also wird, wenn $e = 5$, die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat wann $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

$n = 2e$ und $m = 2ee + 1$: dieses ist auch leicht einzusehen, denn da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, so ist $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat von $2ee + 1$ ist. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn + 1 = mm$, wann $n = 8$ und $m = 33$.

III.

Es sey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadrat-Zahl, also soll seyn $(ee + 2)nn + 1 = mm$, wo m offenbar größer ist als en, dahero setze man $m = en + p$, so wird $eennn + 2nn + 1 = eennn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieses fällt auch sogleich in die Augen, denn da $a = ee + 2$ und $n = e$, so ist $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat von $ee + 1$ ist. Es sey z. E. $a = 11$, also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn + 1 = mm$, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen $a = 83$ so ist $e = 9$, und es wird $83nn - 1 = mm$, wenn man nimmt $n = 9$ und $m = 82$.

Tabelle

welche für jeden Werth von a die kleinsten Zahlen n und m angiebt, daß also $mn = an^2 + 1$ wird.

a	n	m	a	n	m
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Capitel 8.

Von der Art diese Irrational-Formel $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3)}$ rational zu machen.

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel wo x zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weitrr zu gehen, ohngeachtet diese beyden Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müssen.

Es soll also diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrate gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für x in Rational-Zahlen gesucht werden: denn da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in gantzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu bemercken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte

Methode

Methode auf einmahl zu unendlich vielen Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a + bx + cxx$ unendlich viele Fälle giebt, wo die Auflösung schlechterdings unmöglich ist; so findet solches noch mehr bey dergegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedencken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat: dahero man bloß allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solchergestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wenn gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemercken ist, weil in dem vorhergehenden Falle aus einer einzigen Auflösung unendlich viele neue gefunden werden können.

114.

Wenn also eine solche Formel $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrate gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall vorausgesetzt werden wo dieses geschicht; ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff+bx\ cxx+dx^3$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man setzt $x=0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehen wie aus dem bekannten Falle $x=0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne; zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondere Fälle den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1+2x-xx+x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel von diesem Quadrate also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach

die Quadrat-Wurzel $1+x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir $1+2x-xx+x^3 = 1+2x+xx$, wo die beiden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx = -xx+x^3$ oder $x^3 = 2xx$, welche durch xx dividirt sogleich giebt $x = 2$, woraus unsere Formel wird $1+4-4+8 = 9$.

Gleichergestalt wenn diese Formel $4+6x-5xx+3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $= 2+nx$ und suche n, also daß die beiden ersten Glieder wegfallen; weil nun wird $4+6x-5xx+3x^3 = 4+4nx+nnxx$, so muß seyn $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$, woraus diese Gleichung entspringt $-5xx+3x^3 = \frac{9}{4}xx$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}xx$, dahero $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrate macht, dessen Wurzel seyn wird $2+\frac{3}{2}x = \frac{45}{2}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f+gx+hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen:

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1-4x+6xx-5x^3$, hievon setze man die Wurzel $1-2x+hxx$ da denn seyn soll $1-4x+6xx-5x^3 = 1-4x+4xx+2hxx-4hx^3+hhx^4$; hier fallen die zwey ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6=2h+4$ und also $h=1$, daraus bekommen wir $-5x^3 = -4x^3+x^4$, wo durch x^3 dividirt wird; $-5=-4+x$ und $x=-1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode, der Wurzel zwey Glieder giebt als $f+px$, wo f die Quadrat-Wurzel des ersten Gliedes ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfalle, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich $cxx+dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da denn die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird $x = \frac{pp-c}{d}$. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselbe

f+

$f + px + qxx$, wenn nemlich $a = ff$, und bestimmt p und q dergestalt, daß die drey ersten Glieder beiderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da $ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$, so muß seyn $b = 2fp$ also $p = \frac{b}{2f}$, und $c = 2fq + pp$ also $q = \frac{c - pp}{2f}$: und die übrige Gleichung $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$ läßt sich theilen, und daraus wird $x = \frac{d - 2pq}{qq}$.

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a = ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff + dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Denn setzt man nach der ersten, die Wurzel $= f + px$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, dahero bekommt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4 + ppxx$, so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner

$0 =$

$0 = 2fq + pp$, und also $q = 0$, dahero man bekommt $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man denn aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wenn gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen so soll diese Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschichet wenn $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$ und da bekommt man diese $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen ist $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = pp$ und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3$

$+y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo
$+ppyy$
nun das zweyte Glied wegzuschaffen ist $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + pp$, also $q = \frac{3-pp}{4} = \frac{39}{64}$; so haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1+2pq}{qq}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wenn $x = f$, und daß alsdenn sey $a + bf + cff + df^3 = gg$. Hierauf setze man $x = t + y$, so erhält man diese neue Formel:

a
$+bf + by$
$+cff + 2cfy + cyy$
$+df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3$

$gg + (b + 2cf + 3dff)\,y + (c + 3df)\,yy + dy^3$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also

also daß die beiden obigen Methoden angewandt werden können, wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nemlich $x = f + y$.

121.

Bisweilen hilft es aber auch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wann man setzt $x = 2$. Denn setzt man diesem zufolge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus $9 + 12y + 6yy + y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$; so seyn muß $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdann wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werthe nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = q + 6py + 6qyy + 2pqy^3 + qqy^4 + ppyy$

wo seyn muß, erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$;

daher

dahero $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschloßen werden kann: denn wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne außer in diesen drey Fällen:

I. $x = 2$; II. $x = 0$; III. $x = -1$.

welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1 + 3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird I. $x = 0$; II. $x = 1$; III. $x = 2$; und wollen sehen ob wir noch andere Werthe solcher Art finden können.

Da nun bekannt daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$ und da bekommt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$ also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, wo seyn muß $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$: die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$ und $y = \frac{21}{16}$; folg-

folglich $x = -\frac{5}{16}$, da denn $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$; wollte man nun weiter setzen $x = -\frac{5}{16} + z$, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2 + py + qyy$, also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, so müßte erstlich seyn $+ ppyy$

$9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{128} + qqy$, oder $567 + 128qqy = 384$, oder $128qqy = -183$, das ist $126 \cdot \frac{63}{64} y = -183$, oder $42 \cdot \frac{63}{64} y = -61$, dahero $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue Werthe gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekannten Falle $x = 1$ zwey neue Werthe erhalten, aus welchen, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitläuftige Brüche gerathen würde.

Dahero

Daher hat man Ursache sich zu verwundern, das aus diesem Falle $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, herausgebracht worden, welches ohne Zweifel ein Zeichen von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode ist. Man kann gleichergestalt aus dem Falle $x = 2$ andere neue Werthe herausbringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, also daß diese Formel ein Quadrt seyn soll $25 + 36y + 18yy + 3y^3$; hievon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18yx + 3y^3 = 25 + 10py + ppyy$, und also $36 = 10p$ oder $p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern durch yy dividirt, $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$ und $x = \frac{8}{25}$, daraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat, davon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5 + py + qyy$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + 10qyy + 2pqy^3 + ppyy + qqy^4$; wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen, seyn muß $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$; hernach $18 = 10q + pp$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = -\frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder durch

y^3 getheilt, geben $3 = 2pq + qqy$, oder $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{375}{1323}$, und $x = -\frac{629}{1323}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grunde es ganz leicht ist, sogar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1 - x - xx + y^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x = nn - 1$, da n eine jede beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$, und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein ganz besonderer Umstand, welchen wir eine so leichte Auflösung zu verdancken haben, und welcher sogleich in die Augen fallen wird, wenn wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen lasse und der Quotient seyn werde $1 - xx$, welcher weiter aus diesen Factoren besteht $(1+x)(1-x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält:

$1 - x$

$1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x)$
$= (1 - x)^2 . (1 + x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1 + x$ ein Quadrat seyn, und umgekehrt wenn $1 + x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1 - x)^2 (1 + x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1 + x = nn$, so bekommt man sogleich $x = nn - 1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerckt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wenn es nemlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden: man setzt nemlich die gegebene Formel $= 0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da denn eine jede Wurzel z. E. $x = f$, einen Factor $f - x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler der bloßen Zahl sind.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel $a+bx+cxx+dx^3$, wenn die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll: denn alsdann muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nemlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man denn nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x=\frac{nn-c}{d}$, welche auf einmahl unendlich viele, und sogar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wenn man bey dem Gebrauche der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff+bx+cxx+dx^3$, und man setze die Wurzel davon $=f+px$, so wird $ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+ppxx$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt, geben $b+cx+dxx=2fp+ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird, wie folget:

$$x=\frac{pp-c+\sqrt{(p^4-2cpp-8dfp+cc-4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

Capitel 9.

Von der Art diese irrational-Formel $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ rational zu machen.

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zugleich unsere Untersuchung über die Quadrat-Wurzel-Zeichen endigen müssen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht hat, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadrate machen könne.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wenn das erste

Glied

Glied a ein Quadrat; der andere, wenn das letzte ex^4 ein Quadrat ist; den dritten Fall wenn das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I. Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist, so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen daß die beyden ersten Glieder wegfielen und die übrigen sich durch xx theilen liessen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzelzeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da denn nur eine einfache Gleichung herauskommt, aus welcher x ohne Wurzelzeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze dahero die Wurzel $= f + px + qxx$, daß also ist $ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4$, wo die $+ ppxx$ ersten Glieder von selbsten wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c = 2fq + pp$, oder $q = \frac{c - pp}{2f}$; ist dieses geschehen, so lassen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d + ex = 2pq + qqx$; woraus gefunden wird $x = \frac{d - pq}{qq - e}$ oder $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

131.

Es ist aber leicht zu sehen daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wenn das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wenn sowohl $b = 0$ als $c = 0$, weil alsdann $p = 0$ und $q = 0$, folglich $x = \frac{d}{e}$; woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, denn in diesem Falle wird offenbar $dx^3 + ex^4 = 0$ und also unsere Formel dem Quadrate ff gleich. Insonderheit aber, wenn auch $d = 0$, so kommt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, dahero diese Methode für solche Formel $ff + ex^4$ keine Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet

sich

sich auch, wenn $b = o$ und $d = o$, oder wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff + cxx + ex^4$: denn da wird $p = o$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x = o$, welcher Werth sogleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führet.

132.

II. Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a + bx + cxx + dx^4 + ggx^4)}$$

Diese Formel könnte sogleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x = \frac{1}{y}$, denn weil alsdann diese Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$ ein Quadrat seyn seyn müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrate y^4 multiplicirt, ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekommt man diese Formel $ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg$, welche rückwärts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx + px + q$, oder umgekehrt $q + px + gxx$, da denn $a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + 2gpx^3 + ggx^4$, weil sich nun hier $+ ppxx$

die

die fünften Glieder von selbsten aufheben, so bestimme man erstlich p, also daß sich auch die vierten Glieder aufheben, welches geschieht wenn $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, also daß sich auch die dritten Glieder aufheben, welches geschieht wenn $c = 2gq + pp$ oder $q = \frac{c - pp}{2g}$: ist dieses geschehen so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a + bx = qq + 2pqx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - qq}{2pq - b}$, oder $x = \frac{qq - a}{b - 2pq}$.

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wenn das zweyte und vierte Glied fehlt oder wenn $b = 0$ und $d = 0$; denn da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a - qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x = 0$ im ersteren Falle; dahero diese Methode bey solchen Gleichungen $a + cxx + ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III. Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}.$$

Es ist klar daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, denn da das

erste

erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f+px+qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q+px+gxx$, und zwar, daß die drey letzten Glieder verschwinden, da man denn zwey Werthe für x herausbringt. Auch kann man diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln welche derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $= f+px+gxx$, und bestimmt p also daß die zweyten Glieder wegfallen, weil nemlich seyn soll $ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4 = ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4$, so mache man $b=2fp$ oder $p=\frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch xx dividirt diese Gleichung $c+dx=2fg+pp+2gpx$, woraus gefunden wird $x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d}$, oder $x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$. Hier ist insonderheit zu bemercken daß da in der Formel nur das Quadrat gg vorkommt, die Wurzel davon g sowohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nemlich $x=\frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}$ oder $x=\frac{pp-2fg-c}{2gp+d}$.

135.

135.

Es giebt auch noch ein anderer Weg diese Formel aufzulösen: man setze nemlich wie vorhero die Wurzel $= f + px + gxx$, bestimme aber p dergestalt daß die vierten Glieder sich einander aufheben, und setze nemlich in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, woraus man findet $x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c}$; wobey zu mercken, daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkommt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, daß also auch seyn wird $x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c}$; also daß auch hieraus zwey neue Werthe für x gefunden werden und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe herausgebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber wiederum der verdrießliche Umstand, daß wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, oder aus $b = 0$ und $d = 0$, kein hinreichender Werth für x herausgebracht werden kann; und also die Auflösung dieser Formel $ff + cxx + ggx^4$

dadurch

dadurch nicht erhalten werden kann. Denn weil $b = o$ und $d = o$, so hat man für die beiden Arten $p = o$, und dahero giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{o}$, die andere Art aber $x = o$, aus welchen beiden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln auf welche die bisher erklärten Methoden angewand werden können; wenn aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat, durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden daß unsere Formel ein Quadrat werde wenn man setzt $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk$, so darf man nur setzen $x = h + y$, so bekommt man eine neue Formel in welcher das erste Glied seyn wird kk und also ein Quadrat, dahero der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wenn man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x = h$ gefunden hat, denn da darf man nur setzen $x = h + y$, so erhält man eine neue Gleichung auf welche die

obige

obige Methode angewandt werden kann: da man denn aus dem schon gefundenen Werthe für x andere neue herausbringt, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und also immer mehr neue Werthe für x ausfindig machen.

130.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu bemercken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie alsdann zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a + ex^4$ zeigen, welche sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth für $x = h$ errathen, daß also sey $a + eh^4 = kk$, um nun daraus noch andere zu finden, setze man $x = h + y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müßen $a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, das ist $kk + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehöret; man setze dahero die Quadrat-Wurzel davon $k + py + qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrate

kk +

$kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo erstlich $+ ppyy$

p und q so bestimmt werden müssen daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weshalb seyn muß $4eh^3 = 2kp$ und also $p = \frac{2ah^3}{k}$; ferner $6ehh = 2kq + pp$, dahero $q = \frac{6ehh - pp}{2k}$, oder $q = \frac{3ehhkk - 2eeh^6}{k3}$, oder $q = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k3}$; folglich da $eh^4 = kk - a$, so wird $q = \frac{ehh(kk \quad 2a)}{k3}$: hernach geben die folgenden Glieder durch y^3 dividirt $4eh + ey = 2pq + qqy$, woraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, wovon der Zähler in dieser Form $\frac{4ehk4 - 4eeh^5(kk + 2a)}{k4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4 = kk - a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4eh^4 - 4eh(kk - a)(kk + 2a)}{k4}$, oder $\frac{4eh \quad - a\,kk + 2a^2)}{k4}$, oder $\frac{4ach(2a - kk)}{k4}$ Der Nenner aber $qq - e$ wird $= \frac{e(kk - a)(kk \quad 2a)^2 - ek^6}{k6}$, und dieses wird $= \frac{e(3ak^4 - 4a3)}{k6}$ $= \frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k6}$, woraus der gesuchte Werth seyn wird $y = \frac{2aeh(2a - kk)}{k4} \cdot \frac{k6}{ae(3k^4 - 4aa)}$, das ist $y = \frac{2hkk(2a - kk)}{3k4 - 3aa}$, und dahero $x = \frac{h(8akk - k^4 - 4aa)}{3k^4 - 4aa}$ oder $x = \frac{h(k4 \quad 8ahk + 4aa)}{+aa - 3k^4}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel $a + ex^4$ ein Quadrat, davon die Wurzel seyn wird $k + py + qyy$, so zu dieser Form gebracht

wird

wird: $k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa} + \frac{16k(kk-a)(kk-2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2}$, weil aus den obigen ist $p = \frac{2eh^3}{k}$, und $q = \frac{eh^3(kk-a)}{k^3}$, und $y = \frac{4hkk(2a-kk}{3k^4-4aa}$.

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a + ex^4$ noch stehen bleiben, denn weil der Fall $a + eh^4 = kk$ bekannt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen, weil sowohl $x = -h$ als $x = +h$ und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht wann wir setzen $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgriff öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel:

$$\frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4} \text{ oder}$$

$$\frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4}.$$

Hievon setze man die Quadrat-Wurzel nach den dritten Fall $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrate $kk + 2kpy - 2kkyy + ppyy - 2kpy^3 + kky^4$. Man mache daß die zweyten Glieder wegfallen welches geschieht wenn $4kk - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2kk-4a}{k}$; die übrigen Glieder durch yy divi-

dirt,

dirt, geben $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, oder $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$, da nun $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, und $pk = 2kk - 4a$, so wird $y(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}$; folglich $y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$; um nun daraus x zu finden, so ist erstlich

$1 + y = \frac{k4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, und zweytens

$1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk - 4a)}$; also

$\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; folglich bekommen wir $x = \frac{k^4 - 8akk - 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h$, welches aber der nemliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekannte Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird ist, wenn $x = 1$: also ist $h = 1$ und $kk = 1$, das ist $k = 1$: hieraus erhalten wir sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1 + 8 + 4}{3 - 4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkommt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekannt an,

so

so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nemlich $x = \frac{81573072\mathrm{I} + 228488 + 4}{244192163 - 4} : 13 = \frac{81595921\mathrm{3}}{2447192159} \cdot 13$, also wird $x = \frac{1060769769}{244192159}$.

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cxx + ex^4$ betrachten, und für den bekannten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, also daß $a + chh + eh^4 = kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline kk + (2ch + 4eh^3)y + c + 6ehh\,yy + 4ehy^3 \cdot ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze demnach die Quadrat-Wurzel davon $k + py + qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrate gleich seyn soll $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$; nun $+ ppyy$ bestimme man p und q also daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, wozu erfordert wird, erstlich daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, hernach

aber daß $c + 6ehh = 2kq + pp$, oder $q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$: alsdann geben die folgenden Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh + cy = 2pq + qqy$, daraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Falle die Quadrat-Wurzel aus unserer Formel seyn wird $k + py + qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekannten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solchergestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - xx + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen nemlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadrat-Wurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekannte Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = +1$.

143.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $2 - 3xx + 2x^4$, wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekannte Fall giebt sich auch sogleich, nemlich $x = 1$: es sey demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadrat-Wurzel $1 + py + qyy$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts neues gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1 + 8xx + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; denn nimmt man $h = 2$ so wird $k = 7$, setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qyy$, so muß seyn $p = \frac{32}{7}$, und $q = \frac{272}{343}$; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x = -\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen — weggelassen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu bemercken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Falle angenommen werden kann.

Es ſey demnach wie vorher $x = 2 + y$ ſo bekommen wir

1

$32 + 32y + 8yy$

$16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4$

$49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4$

welche jetzt auf mehrere Art zu einem Quadrate gemacht werden kann; denn erſtlich kann man die Wurzel $7 + py + yy$ alſo ſetzen, daß unſere Formel dieſem Quadrate gleich wird $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^4 + y^4$; nun kann man die letzte ohne ein Glied verſchwindend zu machen, ſetzen $2p = 8$ oder $p = 4$; da dann die übrigen durch y dividirt geben $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$, und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$ welches der bekannte Fall ſelbſt iſt.

Nimmt man aber p ſo an, daß die zweyten Glieder wegfallen, ſo wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da denn die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, oder $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, und dahero $y = -\frac{71}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$ oder $x = +\frac{15}{28}$ welcher Werth unſere Formel zu einem Quadrate macht,

davon

davon die Wurzel $\frac{141}{784}$ ist. Da auch $-yy$ die Wurzel des letzten Gliedes ist, so kann man die Quadrat-Wurzel davon also setzen $7 + py - yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrate gleich $49 + 14py - 14yy - 2py^3 + y^4 + ppyy$

Und nun die letzte ohne ein Glied wegzubringen, setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$ wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$: die übrigen aber durch yy dividirt geben $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{71}{28}$ und $x = +\frac{15}{28}$, welches mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$, wenn ein Fall, nemlich $x = h$, bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat, nemlich kk, wird: denn alsdann setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern, davon das erste kk seyn wird; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k + py + qyy$, und man be-

stimmt p und q dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekannten $x = h$ einerley ist, weil alsdann nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadrat-Wurzel-Zeichen, da nemlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen, so betrachte man diese Formel $k\,k + b\,x + c\,x\,x + d\,x^3 + e\,x^4 + f\,x^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist,

wollte

wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k + px + qxx$ und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzel-Zeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel $k + px + qxx + rx^3$ setzen, so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, also daß wenn gleich p, q, und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzel-Zeichen aufgelößt werden könnte. Dahero wir genöthiget sind hiemit die Formeln, die ein Quadrat seyn sollen, zu verlassen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzel-Zeichen fortschreiten.

Capitel 10.

Von der Art diese Irrational-Formel $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen.

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ eine Cubic-Zahl werde, und daraus also die Cubic-Wurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern, daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müsse, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a+bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a+bx=p^3$, und daraus sogleich gefunden würde $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu merken daß

daß wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedenken sey, wofern nicht schon ein Fall, darin die Formel ein Quadrat wird, bekannt ist, derselbe mag nun sogleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müssen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wenn das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x = 0$; hernach auch wenn das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a + bx + cxx + g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f + px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$: da nun die ersten Glieder von selbsten wegfallen, so bestimme man p dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches ge-

schieht wenn $b = 3ffp$, oder $p = \frac{b}{3ff}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 3fpp + p^3 x$, woraus gefunden wird $x = \frac{c - 3fpp}{p^3 - d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubic-Wurzel schlecht weg setzen $= f$, da man dann bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cxx$: oder $b + cx = 0$ und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschlossen werden könnte.

150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestalt $a + bx + cxx + g^3x^3$, man setze die Cubic-Wurzel $p + gx$, davon der Cubus ist $p^3 + 3gppx + 3ggpxx + g^3x^3$, da sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wenn $c = 3ggp$ oder $p = \frac{c}{3gg}$: alsdann geben die zwey ersten diese Gleichung $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubic-Wurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$ oder $0 = b + cx$,

$+cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + g^3x^3$, worinn so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; dahero dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractirt und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen kann man aber auch noch die Wurzel setzen $f + gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, da denn die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt diese Gleichung geben $b + cx = 3ffg + 3fggx$, und daraus $x = \frac{b - 3ffg}{3fgg - c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, daß dieselbe ein Cubus wird: hat man einen solchen gefunden, welcher sey $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$,

so

so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird.

a

$bh + by$

$chh + 2chy + cyy$

$dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3$

$k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3$ welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man denn einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachgehends auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1 + x + xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubic-Wurzel $= 1$ setzen, daraus gefunden würde $x + xx = 0$, das ist $x(1 + x) = 0$; folglich entweder $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze dahero die Cubic-Wurzel $1 + px$, wovon

wovon der Cubus ist $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, und mache $1=3p$ oder $p=\frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1=3pp+p^3x$, oder $x=\frac{1-3pp}{p^3}$: da nun $p=\frac{1}{3}$, so wird $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, und dahero unsere Formel $1+18+324=343$, wovon die Cubic-Wurzel ist $1+px=7$. Wollte man nun weiter setzen $x=18+y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343+37y+yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubic-Wurzel zu setzen wäre $7+py$, wovon der Cubus ist $343+147py+21ppyy+p^3y^3$: nun setze man $37=147p$, oder $p=\frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1=21pp+p^3y$, also $y=\frac{1-21pp}{p^3}$, das ist $y=\frac{34c.121.147}{373}=-\frac{1049580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2+xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x=5$: man setze demnach so gleich $x=5+y$, so bekommt man $27+10y+yy$; davon sey die Cubic-

bic Wurzel $3+py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$ gleich; man mache $10=27p$, oder $p=\frac{10}{27}$, so bekommt man $1=9pp+p^3y$, und daraus $y=\frac{1-9pp}{p^3}$, das ist $y=-\frac{10.9.27}{1000}$ oder $y=-\frac{4617}{1000}$, und $x=\frac{383}{1000}$: hieraus wird unsere Formel $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubic-Wurzel seyn muß $3+py=\frac{1}{100}\frac{9}{0}$.

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1+x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer in den zwey offenbaren Fällen $x=0$ und $x=-1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Falle gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1+x$ nichts, weil der Cubus davon $1+3x+3xx+x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x+3xx=0$ oder $x(1+x)=0$ giebt, das ist entweder $x=0$ oder $x=-1$.

Will man ferner setzen $x=-1+y$, so bekommen wir diese Formel $3y-3yy+y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Falle gehöret: setzt man daher die Cubic-Wurzel $p+y$ wovon der Cubus ist $p^3+3ppy+3pyy+y^3$, und macht $-3=3p$ oder $p=-1$, so geben die übrigen $3y=p^3+3ppy=-1+3y$, folglich $y=\frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus

also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann, daß diese Formel $1 + x^3$ außer den gemeldeten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; denn man hat gezeiget daß die Summe von zweyen Cubis als $t^3 + x^3$ niemals ein Cubus werden kann, dahero ist es auch nicht möglich in dem Falle $t = 1$.

156.

Man behauptet auch daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne außer in dem Falle $x = -1$: diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekommt man diese Formel $1 + 3y - 3yy + y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1 + y$, davon der Cubus $1 + 3y + 3yy + y^3$ ist, so wird $-3yy = 3yy$, welches nur geschieht wenn $y = 0$. Setzt man nach dem zweyten Falle die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3yy + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unend-

endlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1+y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3+3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Falle $x=-1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, hernach aber auch in dem Falle $x=2$: man setze deswegen $x=2+y$, so kommt diese Formel heraus $27+36y+18yy+3y^3$, welche zum ersten Falle gehöret, dahero sey die Wurzel $3+py$, wovon der Cubus $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; man mache also $36=27p$, oder $p=\frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch yy dividirt, $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y=-2$, dahero $y=-\frac{54}{17}$, folglich $x=-\frac{20}{17}$; hieraus wird unsere Formel $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubic Wurzel ist $3+py=\frac{21}{17}$; und aus diesem Werthe könnte man noch mehrere finden wenn man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten $4+xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus

wird

wird, nemlich wenn $x = 2$ und $x = 11$. Setzt man nun erstlich $x = 2 + y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8 + 4y + yy$, dessen Wurzel sey $2 + \frac{1}{3}y$, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}yy + \frac{1}{27}y^3$, woraus man erhält $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$, dahero $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekommt man $125 + 22y + yy$, so dem Cubo von $5 + py$, das ist $125 + 75py + 15ppyy + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{2}{75}$ genommen, giebt $1 = 15pp + p^3y^3$ oder $p^3y^3 = 1 - 15pp = -\frac{109}{375}$, dahero $y = -\frac{122625}{10648}$, und also $x = -\frac{5497}{10648}$.

Weil x sowohl negativ als positiv seyn kann, so setze man $x = \frac{2 + 2y}{1 - y}$, so wird unsere Formel $\frac{8 + 8yy}{(1-y)^2}$ welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1 - y$, damit der Nenner ein Cubus werde und da bekommt man $\frac{8 - 8y + 8yy - 8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zähler $8 - 8y + 8yy - 8y^3$, oder eben derselbe durch 8 dividirt nemlich $1 - y + yy - y^3$ zu einem Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$, so

wird $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, oder $27-27y=9-y$, dahero $y=\frac{9}{13}$, folglich $1+y=\frac{22}{13}$ und $1-y=\frac{4}{13}$, folglich $x=11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3}-y$, findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel setzt $1-y$, wovon der Cubus ist $1-3y+3yy-y^3$, bekommt man $-1+y=-3+3y$, und also $y=1$, folglich $x=\frac{4}{0}$, das ist unendlich; dahero wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wissen $x=2$ und $x=11$, so kann man setzen $x=\frac{2+11y}{1+y}$: dann ist $y=0$ so wird $x=2$, ist aber y unendlich groß so wird $x=+11$.

Es sey demnach erstlich $x=\frac{2+11y}{1+y}$, so wird unsere Formel $4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy}$ oder $\frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2}$; man multiplicire oben und unten mit $1+y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler welcher seyn wird $8+60y+177yy+125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $=2+5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder sondern

dern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p+5y$, davon der Cubus $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$ und mache $177=75p$, oder $p=\frac{59}{25}$, so wird $8+60y=p^3+15ppy$, dahero $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{15625}$ und $y=\frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x=\frac{2+11y}{1-y}$, und da wird unsere Formel $4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$, wovon der Zähler mit $1-y$ multiplicirt ein Cubus wird. Also muß auch $8+28y+89yy-125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $=2+\frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^4$, so wird $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, und also $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; folglich $x=11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2-5y$, wovon der Cubus ist $8-60y+150yy-125y^3$, so erhalten wir $28+89y=-60+150y$

$+150y$, folglich $y = \frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrate oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wenn nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht übersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzufügen, da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht übersteigen muß. Wenn aber eine solche Formel $a + bx + cxx$ ein Biquadrat seyn soll, so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrate gemacht werden, da dann nur noch übrig ist, daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrate gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wenn zum Exempel $xx + 7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat welches geschieht, wenn $x = \frac{7pp - qq}{2pq}$

oder

oder auch $x = \frac{qq - 7pp}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich diesem Quadrate $\frac{q^4 - 14qq\,pp + 49p^4}{4\,pp\,qq} + 7 = \frac{q^4 + 14qq\,pp + 49p^4}{4\,pp\,qq}$, wovon die Wurzel ist $\frac{7pp + qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrate gemacht werden muß: man multiplicire demnach oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zähler $2pq\,(7pp + qq)$ ein Quadrat seyn müssen, welches nicht anders geschehen kann als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q = pz$, damit diese Formel $2ppz\,(7pp + ppzz) = 2p^4z\,(7 + zz)$ und also auch durch p^4 dividirt, nemlich diese $2z\,(7 + zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z = 1$, dahero setze man $z = 1 + y$, so bekommen wir $(2 + 2y)\,(8 + 2y + yy) = 16 + 20y + 6yy + 2y^3$, wovon die Wurzel sey $4 + \frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16 + 20y + \frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt giebt $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{1}{8}$ und $z = \frac{9}{8}$: da nun $z = \frac{q}{p}$, so wird $q = 9$ und $p = 8$, dahero $x = \frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7 + xx = \frac{2798\,41}{2073\,5}$, davon erstlich die Quadrat-Wurzel ist $\frac{529}{144}$, und hievon nochmals die Quadrat-Wurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: denn wenn z. E. cxx ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $= px$, und da wird $cxx = p^3x^3$ oder $c = p^3x$, dahero $x = \frac{c}{p^3}$: man schreibe $\frac{1}{q}$ an statt p, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, dahero auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $abb+2abcx+accxx$ ganz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; denn man setze die Cubic-Wurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt giebt $a = \frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x = \frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet, wie höchst nützlich es sey die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen, so oft solches geschehen kann; und von dieser Materie soll weitläuftig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

Capitel II.

Von der Auflösung dieser Formel.

$$axx+bxy+cyy$$

in Factoren.

162.

Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch, so darf man nur setzen $x = \frac{t}{u}$, da dann für t und u immer ganze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie dieselben zu einem Quadrate, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll,

soll, so ist nöthig zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wenn sich diese Formel wirklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie wir schon oben gesehen haben, wenn $bb-4ac$ eine Quadrat-Zahl wird.

Der andere Fall ist, wenn diese beyden Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht wenn $bb-4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber wenn $bb-4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle welche wir hier zu erwegen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden

$(fx+gy)$

$(fx+gy)(hx+ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx+gy=pq$ und $hx+ky=rs$, da denn unsere Formel diesem Producte $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth nemlich $x=\frac{pq-gy}{f}$ und $x=\frac{rs-ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq-hgy=frs-fky$, und also $y=\frac{fr.-hp}{fk-hg}$ und $x=\frac{kpq-grs}{fk-hg}$; damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, so müssen die Buchstaben p, q, r, s, also angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen lasse, welches geschieht, wenn sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen lassen.

165.

Um dieses zu erläutern so sey diese Formel vorgegeben $xx-yy$, welche aus diesen Factoren besteht, $(x+y)(x-y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factores haben, so setze man $x+y=pq$ und $x-y=rs$, so bekommt man $x=\frac{pq+rs}{2}$ und $y=\frac{pq-rs}{2}$; damit nun

diese

diese Zahlen ganz werden, so müssen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerad seyn oder beyde ungerad.

Es sey z. E. $p=7$, $q=5$, $r=3$ und $s=1$, so wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$; hieraus entspringt $xx-yy=105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren 7. 5. 3. 1. besteht: also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt und demnach also vorgestellet werden kann $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann als welche aus der Wurzel $fx+gy$ entspringen; setzt man also $fx+gy=pqr$, so wird unsere Formel $ppqqrr$ und kann also so viel Factoren haben als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, da man bekommt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel von dieser Art ist xx, nimmt man

$x=pqr$,

$x = pqr$, so schließt das Quadrat xx drey quadratische Factoren in sich, nemlich pp, qq und rr.

167.

Weit mehr Schwierigkeit aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, so ist zu merken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nemlich nur setzen $x = \frac{z - by}{2a}$, da dann diese Formel herausgebracht wird.

$$\frac{zz - 2byz + bb'yy}{4a} + \frac{byz - bbyy}{2a} + cyy = \frac{zz + (4ac - bb)yy}{4a}$$

Wir wollen demnach so gleich das mittlere Glied weglassen und diese Formel betrachten $axx + cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten, daß solches von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx+yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summe von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, unter welchen sich einige Prim-Zahlen befinden die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müsse, daß die Formel $xx+yy$ Theiler oder Factores habe und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdann $xx+yy$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen; dann wäre z. E. $x=7p$ und $y=7q$ so würde die Summe ihrer Quadrate $49pp+49qq=49(pp+qq)$ sich gar durch 49 theilen lassen. Dahero geht die Frage nur auf solche Formel wo x und y keinen gemeinen Theiler haben oder unter sich untheilbar seyn. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen,

gen, denn ob man gleich sieht, daß wenn die beyden Zahlen x und y ungerad sind, alsdann die Formel $xx+yy$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbar werde; ist aber eine gerade und die andere ungrad, so wird die Formel ungerad, ob sie aber Theiler habe oder nicht, ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerad seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müssen.

169.

Es seyn demnach die beyde Zahlen x und y untheilbar unter sich, und gleichwohl soll die Formel $xx+yy$ zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationalen Factores, in welchen die Formel aufgelößt wird und durch dieses Product vorgestellet werden kann $(x+y\sqrt{-1}).(x-y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten, denn wenn die Formel $xx+yy$ wirkliche Factores hat, so müssen die irrationalen Factoren wiederum Factores haben, indem wenn diese Factoren keine weitere Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese

Facto-

Factores irrational ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müssen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also daß diese Formel $xx+yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, da dann weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann, von selbsten seyn wird $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, also daß das Product davon, das ist unsere Formel, seyn wird $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nemlich $pp+qq$ und $rr+ss$. Hier ist aber noch übrig, die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müssen.

Wenn man nun jene rationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$, und $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$: addirt man diese

For-

Formeln so wird $x = pr - qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, oder $y = ps + qr$.

Nimmt man also $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, so erhält unsere Formel $xx + yy$ gewiß zwey Factores, indem herauskommt $xx + yy = (pp + qq)(rr + ss)$. Verlangt man mehr Factores, so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp + qq$ zwey Factores hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehrt werden kann.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß wenn eine Zahl einem solchen Product $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$.

Es sey z. E. $p=3$, $q=2$, $r=2$, und $s=1$, also daß dieses Product heraus käme $13.5=65=xx+yy$, da dann seyn wird entweder $x=4$ und $y=7$, oder $x=8$ und $y=1$; in beyden Fällen aber ist $xx+yy=65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe von zwey Quadrat-Zahlen seyn. Man multiplizire z. E. $2^2+1^2=5$, $3^2+2^2=13$, und $4^2+1^2=17$ mit einander, so kommt 1105 welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann:

I) 33^2+4^2, II.) 22^2+9^2, III.) 31^2+12^2, IV.) 24^2+23^2.

172.

Unter den Zahlen die in der Formel $xx+yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammengesetzt sind; hernach aber auch solche welche nicht solchergestalt zusammen gesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Formel $xx+yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; dahero werden die einfachen Zahlen dieser Art seyn

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 etc.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich

lich Prim-Zahlen oder solche welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß wenn man 1 davon weg nimmt die übrigen durch 4 theilbar werden, oder welche alle in dieser Form $4n+1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadrat-Zahlen vorhanden 9, 49 etc. deren Wurzeln aber 3, 7 etc. nicht vorkommen; wobey zu merken, daß diese Wurzeln 3, 7 etc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn könne, denn da diese Zahlen ungerad sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerad das andere aber ungerad seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbar sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wenn man dahero ein grades und ein ungrades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summe immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Prim-Zahlen von der Form $4n+1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen was x und y

für Werthe haben müssen damit dieselben Factores erhalten. Da nun diese Formel durch diese imaginären Factores vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, so ersieht man wie vorher, daß wenn unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginären Factores welche haben müssen; man setze dahero erstlich $x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, so folget von selbsten daß auch seyn müsse $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$, und hieraus wird unsere Formel $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, und hat also zwey Factores, deren sogar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber dieses geschehe so müssen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgendergestalt geschehen kann: Da $x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+(qr+ps)\sqrt{-2}$ und $x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-(qr+ps)\sqrt{-2}$ so ist die Summe $2x=2pr-4qs$, folglich $x=pr-2qs$; hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2}=(qr+ps)\sqrt{-2}$, dahero $y=qr+ps$. Wenn also unsere Formel $xx+2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp+2qq$ und der andere $rr+2ss$, oder beyde Zahlen sind von eben der Art als $xx+2yy$; und damit dieses geschehe, so können x und y wieder auf zweyerley

ley Art bestimmt werden, weil q sowohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nemlich haben, erstlich $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$.

174.

Diese Formel $xx + 2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrate bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden dann die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49 welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Prim-Zahlen sind, von denen aber die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemerken, daß alle Prim-Zahlen die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$ oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen welche entweder in dieser Form $8n+5$ oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr

aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewiß, daß alle Prim-Zahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx+cyy$ fortschreiten, und sehen was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.

Da nun dieselbe durch dieses Product vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c}$, so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nemlich $x+y\sqrt{-c} = (p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$, und $x-y\sqrt{-c} = (p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$; und da wird unsere Formel werden $xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css)$, woraus erhellet, daß die Factoren wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgendergestalt verhalten; $x = pr+cqs$ und $y = qr+ps$, oder

$y =$

$y = ps - qr$, und hieraus ist leicht abzusehen wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.

176.

Nun ist es auch leicht dieser Formel $xx - cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf: inzwischen lassen sich dieselben auch unmittelbar also finden; da unsere Formel diesem Producte gleich ist $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$, so setze man $x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c})$ und $x - y\sqrt{c} = (p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c})$, woraus so gleich diese Factores erfolgen $xx - cyy = (pp - cqq)(rr - css)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y lassen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen, nemlich erstlich $x = pr + cqs$, $y = qr + ps$, und hernach auch $x = pr - cqs$ und $y = ps - qr$. Will man die Probe machen, ob solchergestalt das gefundene Product herauskomme, so probire man die erstern Werthe, da dann seyn wird $xx = pprr + 2cpqrs + ccqqss$ und $y = ppss + 2pqrs + qqrr$, also $cyy = cppss + 2cpqrs + cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx - cyy = pprr - cppss + ccqqss - cqqrr$$

wel-

welches mit dem gefundenen Producte $(pp - cqq)(rr - css)$ überein kommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied blos betrachtet, nun wollen wir setzen daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen was die Formel $axx + cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar daß unsere Formel diesem Producte gleich sey $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c}$, welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müssen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, denn wenn man zu folge der obigen Art setzen wollte $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}\,(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$, woraus man erhielte $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, und $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$, so würde man so wohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keineswegs statt finden.

178.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholfen werden, wenn man setzet:
$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})$
$=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$ und
$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c}\,(r-s\sqrt{-ac})$
$=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-aps\sqrt{-c}$; woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden; $x=pr-cqs$ und $y=qr+aps$, alsdann aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen $axx+cyy=(app+cqq)(rr+acss)$, von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer ganz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen so in der ersteren Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx+acyy$, als welche mit der obigen $xx+cyy$ übereinkommt,

mit

mit einander multipliciret wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wenn zwey Zahlen von der ersten Form $axx+cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art $(app+cqq)(arr+css)$ mit ein ander multipliciren, und da ist leicht zu sehen, daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr+cqs$ x und $ps-qr$ y, so bekommen wir diese Formel $xx+acyy$, welche von der letzteren Art ist; dahero dann zwey Zahlen von der erstern Art $axx+cyy$ mit einander multiplicirt eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürzlich also vorstellen kann; die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II, andeuten, und also I. I giebt II; I. II giebt I; II. II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wenn man mehrere solche Zahlen mit einander multiplicirt; als I. I. I giebt I; I. I. II giebt II; I. II. II giebt I; II. II. II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern so sey a = 2 und c = 3 woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx + 3yy$, die andere aber in der Form $xx + 6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten.

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx + 3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085 - 3yy$ ein doppeltes Quadrat, nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich, wenn $y = 3$, denn da wird $x = 23$; hernach auch wenn $y = 11$, denn da wird $x = 19$; drittens auch noch wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und endlich viertens wenn $y = 19$, denn da wird $x = 1$. Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und

zu=

zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgenden einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, etc.

Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Capitel 12.

Von der Verwandelung dieser Formel. $axx+cyy$ in Quadrate oder auch höheren Potestäten.

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Formel $axx+cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a=1$ ist. Z. E. diese Formel $2pp-qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solchergestalt vorstellen $(2p+q)^2=2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p+q=x$ und $p+q=y$, so kommt diese Formel $xx-2yy$ heraus, wo $a=1$ und $c=-2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist, dergleichen Formeln zu einem Quadrate zu machen.

Wenn demnach diese Formel $axx+cyy$ zu einem Quadrate oder einer andern höhern geraden Po-

Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a = 1$, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx + cyy$, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so müssen dieselben entweder Quadrate, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Denn wenn das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. pq, so wird erfordert, entweder daß $p = rr$ und $q = ss$, das ist, daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mrr$ und $q = mss$, daß ist, daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyn, deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbsten $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, dahero bekommen wir $xx + cyy = mm(pp + cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$ und $x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$ wo offenbar das x gleich seyn muß dem rationalen Theil; $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theil; dahero wird $x = mpp - mcqq$

$-mcqq$; und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mpp - -mcqq$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $xx + cyy$ ein Quadrat, nemlich $mm(pp+cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp+mcqq$.

183.

Sollen die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $xx+cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = pp - cqq$ und $y = 2pq$, da dann diese Formel dem Quadrate $pp+cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = pp - cqq$, so kann man auch setzen $x = cqq - pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nnn eben diejenigen Formeln, die wir schon oben aus ganz anderen Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $xx+cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$ und da bekommt man $xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q}$

$+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$, wo sich die xx aufheben, die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy=2pqx+ppy$, oder $cqqy-ppy=2pqx$; man theile nun durch 2 pq und durch y, so wird $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zähler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x=cqq-pp$ und $y=2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbsten Factores, als wenn die vorgegebene Formel wäre $xx+acyy$ welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche giebt $x=acqq-pp$ und $y=2pq$, sondern auch noch diese $x=cqq-app$ und $y=2pq$; denn da wird ebenfalls $xx+acyy=ccq^4+2acppqq+aap^4=(cqq+app)^2$, welches auchgeschieht, wenn man nimmt $x=app-cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley herauskommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze

x +

$x+y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^2$, und $x-y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme $xx+acyy = (app+cqq)^2$, und also gleich einem Quadrate; alsdann aber wird $x+y\sqrt{-ac} = app+2pq\sqrt{-ac}-cqq$ und $x-y\sqrt{-ac} = app-2pq\sqrt{-ac}-cqq$, woraus folgt $x = app-cqq$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx+yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$, so nehme man $x = pp-qq$ und $y = 2pq$, so wird $xx+yy = (pp+qq)^2$.

Soll zweytens diese Formel $xx-yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = pp+qq$ und $y = 2pq$, da denn $xx-yy = (pp-qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx+2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$ so nehme man $x = pp-2qq$ oder $x = 2pp-qq$ und $y = 2pq$, und dann wird $xx+2yy = pp+2qq)^2$, oder $xx+2yy = (2pp+qq)^2$,

Soll

Soll viertens diese Formel $xx - 2yy$ ein Quadrat werden wo $ac = -2$, so nehme man $x = pp + qq$ und $y = 2pq$ da dann kommt $xx - 2yy = (pp - 2qq)^2$.

Soll fünftens diese Formel $x + 6yy$ ein Quadrat werden wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$, oder $a = 2$ und $c = 3$; so kann man erstlich setzen $x = pp - 6qq$ und $y = 2pq$, da dann $xx + 6yy = (pp + 6qq)^2$. Hernach kann man auch setzen $x = 2pp - 3qq$ und $y = 2pq$, da dann $xx + 6yy = (2pp + 3qq)^2$.

186.

Sollte aber diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrate gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne, wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat werde. Dieser bekannte Fall sey demnach, wenn $x = f$ und $y = g$, also daß $aff + cgg = hh$; und alsdann kann unsere Formel in einer andern von dieser Art $tt + acuu$ verwandelt werden, wenn man setzt $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u = \frac{gx - fy}{h}$; denn da wird $tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh}$ und $acuu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh}$, woraus folgt

$tt + acuu = \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{bb}$
$= \frac{axx(aff+cgg)}{bb} + \frac{cyy(aff+cgg)}{bb}$; da nun $aff+cgg = hh$, so wird $tt + acuu = axx + cyy$; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel $axx+cyy$ diese Form $tt+acuu$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir weiter fortgehen und zusehen wie diese Formel $axx+cyy$, wo x und y unter sich untheilbar seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keinesweges hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgange angewandt werden kann; wobey noch dieses insonderheit zu merken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten, etc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wann demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher

$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$, denn daraus wird das Product $axx + cyy = (app + cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden können? welches glücklicher weise gelingt: denn wenn die angesetzten Cubi wirklich genommen werden, so erhalten wir diese zwey Gleichungen $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpqq$, und $y = 3appq - cq^3$.

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summe $xx + yy$ ein Cubus ausmache: weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pqq$ und $y = 3ppq - q^3$, und alsdann wird $xx + yy = (pp + qq)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $xx + yy = 125 = 5^3$.

189.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx+3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a=1$ und $c=3$, so wird $x=p^3-9pqq$ und $y=3ppq-3q^3$, und alsdann $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt so wollen wir davon die leichteren Fälle hierher setzen.

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn $axx+cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x=tz$ und $y=uz$, so wird unsere Formel $attzz+cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus so gleich gefunden wird $z=v^3(att+cuu)$; folglich sind die gesuchten Werthe für x

und y, $x = tv^3 (att + cuu)$ und $y = uv^3 att + cuu)$, welche außer dem Cubo v^6 noch $att + cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich $axx + cyy = v^6 (att + cuu)^2 (att + cuu) = v^6 (att + cuu)^3$, welches offenbar der Cubus ist von $v^2 (att + cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginäner Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einzig und allein rationale und sogar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen, wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: denn wenn z. E. $xx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müssen, weil dieselben unter sich untheilbar sind, indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wenn z. E. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr statt finden, weil alsdann die beyden Factoren, nemlich $x + y$ und $x - y$ allerdings

dings gemeine Theiler haben könnten, ohngeachtet x und y dergleichen nicht haben, z. E. wenn beyde ungerade Zahlen wären.

Wenn demnach $xx-yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig, daß so wohl $x+y$ als $x-y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x+y=2p^3$ und $x-y=4q^3$, da denn $xx-yy$ ohnstreitig ein Cubus würde, nemlich $8pq^3$, davon die Cubic-Wurzel ist $2pq$: alsdann aber wird $x=p^3+2q^3$, und $y=p^3-2q^3$. Wenn aber diese Formel $axx+cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen diese Abhandlung durch einige merkwürdige Fragen erläutern:

I. Frage: Man verlangt in ganzen Zahlen ein Quadrat xx daß wenn darzu 4 addirt wird, ein Cubus herauskommie; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx+yy$ ein Cubus wird, welches, wie aus dem obigen erhellet, geschieht wenn $x=p^3-3pqq$ und

$y=$

$y = 3ppq - q^3$: da nun hier $yy = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß seyn $3ppq - q^3 = +2$ oder $3ppq - q^3 = -2$: im erstern Fall wird also $q(3pp - qq) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q = 1$, so wird $3pp - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$, und $xx = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6pp - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen +, so wird $6pp = 10$ und $pp = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen — so wird $6pp = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadrate gegeben werden, nemlich 4 und 121, welche, wenn dazu 4 addirt wird, Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche, wenn dazu 2 addirt wird, Cubi werden, wie bey dem Quadrate 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt, wird hier gefragt?

Da also $xx + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx + 2yy$ ein Cubus wird, wel-

welches aus dem obigen Artikel (188), wo $a = 1$ und $c = 2$ geschieht, wenn $x = p^3 - 6pqq$ und $y = 3ppq - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$ so muß seyn $3ppq - 2q^3 = q(3pp - 2qq) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q = 1$, so wird $3pp - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt, daß nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wenn dazu 7 addirt wird, daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx + 7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $5xx + 7yy$ ein Cubus wird, welches nach dem Artikel (188) wo $a = 5$ und $c = 7$ geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pqq$ und $y = 15ppq - 7q^3$: weil nun hier seyn soll $y = \pm 1$, so wird $15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1$, da denn q ein Theiler seyn muß von 1, folglich $q = 1$; daher wird $15pp - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten,

da

da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde; solches geschieht wirklich wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$, denn da wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche doppelt genommen und davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx - 5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx - 5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Artikel, wo $a = 2$ und $c = -5$, geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pqq$ und $y = 6ppq + 5q^3$. Hier aber muß seyn $y = \pm 1$, und folglich $6ppq + 5q^3 = q(6pp + 5qq) = \pm 1$, welches in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmal in Brüchen; dahero dieser Fall sehr merkwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wenn nemlich $x = 4$, denn da wird $2xx - 5 = 27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx - 5yy$ ein Cubus seyn könne, dessen Wurzel so gar diese Form hat

$2pp-5qq$, wenn nemlich $x=4$, $y=1$ und $p=2$, $q=1$, und demnach haben wir einen Fall wo $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, ungeachtet die beyden Factoren von $2xx-5yy$ nemlich $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Falle $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, welches keineswegs mit $4\sqrt{3}+\sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu merken, daß diese Formel $rr-10ss$ in unendlich vielen Fällen 1 oder -1 werden kann; wenn nemlich $r=3$ und $s=1$, ferner wenn $r=19$ und $s=6$, welche mit dieser Formel $2pp-5qq$ multiplicirt, wieder eine Zahl von der letzten Form giebt.

Es sey demnach $ff-10gg=1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx-5yy=(ff-10gg).(2pp-5qq)^3$, und die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=(f+g\sqrt{10})\,(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}+(6pq+5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze halber

ber schreiben wollen $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, welches mit $f+g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet $x=Af+5Bg$ und $y=Bf+2Ag$; da nun $y=\pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig, daß $6ppq+5q^3=1$ werde, sondern es ist genug wenn nur die Formel $Bf+2Ag$, das ist $f(6ppq+5q^3)+2g(2p^3+15pqq)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f=3$ und $g=1$, so muß diese Formel $18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdann, wenn in der Formel $axx+cyy$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann diese Formel $axx+cyy$ oder diese $xx-acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann, wenn c eine positive Zahl ist, weil $axx+cyy$ oder $xx+acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden.

Da-

Dahero die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wenn die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemerken zuförderst, daß wenn die Formel $axx+cyy$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a=1$ seyn müsse; denn wenn dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrate zu machen, oder wenn es möglich wäre, so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt+acuu$ verwandelt werden, dahero wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx+cyy$ wenn $a=1$ übereinstimmt, einschränken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müssen, daß diese Formel $xx+cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, dahero gesetzt werden muß $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^4$ und $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})^4$, wodurch unsere Formel dem Biquadrate $(pp+cqq)^2$ gleich wird, die Buchstaben x und y selbst aber wer-

werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmmt, wie folget:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq - 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq + 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

folglich $x = p^4 - 6cppqq + ccq^4$ und

$$y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

199.

Wenn also $xx + yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$, so haben wir diese Werthe $x = p^4 - 6ppqq + q^4$ und $y = 4p^3q - 4pq^3$, und alsdann wird seyn $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Laßt uns z. E: setzen $p = 2$ und $q = 1$, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $xx + yy = 625 = 5^4$.

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekommt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $xx + yy = 13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx + cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrate

ge-

gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist, daß man nur einen einzigen Fall wisse, wo dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel, wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt+acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Formel $xx+cyy$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx+cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Denn verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$, da denn offenbar wird $axx+cyy=(app+cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ ist $aap^5\sqrt{a}+5aap^4q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acpp^5\sqrt{-c}+5ccpq^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich

gleich geschlossen wird $x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4$ und $y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5$.

Verlangt man also eine Summe von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $q = 41$, und $xx + yy = 3125 = 5^5$.

Capitel 13.

Von einigen Formeln dieser Art $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrate machen lassen.

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadrat-Zahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man sogar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle aus-

ausgenommen, wo nemlich bey den ersten entweder $x=0$ oder $y=0$, bey den andern aber wo entweder $y=0$ oder $y=x$, und in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so vielmehr merkwürdig, weil, wenn nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viele Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbar unter sich angesehen werden können; denn sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben, also daß man setzen könnte $x=dp$ und $y=dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4+d^4q^4$ und $d^4p^4-d^4q^4$, welche wenn sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müßen, also daß auch diese Formel p^4+q^4 und p^4-q^4 Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genug, zu beweisen, daß diese Formeln, in dem Falle da x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt

sich

sich der Beweis von selbsten auf alle Fälle, da auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach mit der Summe zweyer Biquadraten nemlich dieser Formel $x^4 + y^4$ den Anfang machen, und wo wir x und y als unter sich untheilbare Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß $x^4 + y^4$ außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wenn jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten, daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, dieselben mögten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten, welche aber zu keine andere führen; so kann man sicher

schlies-

schliessen, daß auch in größern, ja sogar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir so gleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat seyn könne außer in den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind, oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerad, oder die eine ist gerad und die andere ungerad.

II. Beyde aber können nicht ungerad seyn, weil die Summe von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: denn ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n+1$ enthalten, und also würde die Summe zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n+2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wenn demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerad, das andere aber ungerad seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wenn die Summe zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp - qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx = pp - qq$ und $yy = 2pq$ und da würde $x^4 + y^4 = (pp + qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerad, x aber ungerad seyn: da nun $xx = pp - qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn: die erstere p aber kann nicht gerad seyn, weil sonsten $pp - qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerad, q aber gerad seyn, wo sich von selbsten versteht, daß dieselben untheilbar unter sich seyn müssen.

V. Da nun $pp - qq$ ein Quadrat, nemlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses, wie wir oben gesehen, wenn $p = rr + ss$ und $q =$

2rs:

2rs: denn da wird $xx = (rr-ss)^2$, und also $x = rr - ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy = 2pq$, so wird jetzt $yy = 4rs(rr+ss)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(rr+ss)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, also daß auch die hier befindlichen drey Factores, r, s, und $rr+ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = tt$ und $s = uu$: so muß auch t^4+u^4 ein Quadrat seyn Wenn demnach x^4+y^4 ein Quadrat wäre, so würde auch hier t^4+u^4, das ist ebenfalls eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu merken, daß weil hier $xx = (t^4-u^4)^2$ und $yy = 4ttuu(t^4+u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner seyn würden als x und y, indem

x und y sogar durch die vierten Potestäten von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müssen.

VIII. Wenn dahero zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfalls ein Quadrat wären; und aus diesen könnte nachhero noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden u. s. w., bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden, daß es in den kleinen Zahlen wirklich solche gebe wie schon anfänglich bemerkt worden, nemlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre

bey

bey der kleineren Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = o$ oder $u = o$, so würde auch bey der größern Summe nothwendig $yy = o$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als $x^4 - y^4$ niemals ein Quadrat werden könne, außer in den Fällen $y = o$ und $y = x$; zu dessen Beweis folgende Punkte zu merken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbar unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerad oder die eine gerad und die andere ungerad. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

II. Es seyn also erstlich die beyden Zahlen x und y ungerad, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerad, die andere aber gerad seyn. Nun wird $xx - yy = 4pq$ und $xx + yy = 2pp + 2qq$

$+2qq$, folglich unsere Formel $x^4-y^4=4pq(2pp+2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq(2pp+2qq)=2pq(pp+qq)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q, und $pp+qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl p gerad, die andere q aber ungerad ist. Man setze dahero um die beyden ersten zu Quadraten zu machen. $2p=4rr$ oder $p=2rr$, und $q=ss$, wo s ungerad seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4+s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun s^4+4r^4 eine Summe von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerad, $4r^4$ aber gerad ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss=tt-uu$, wo t ungerad und u gerad ist; des letztern aber $2rr=2tu$ oder $rr=tu$, wo t und u unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu=rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß so wohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t=mm$ und $u=nn$, wo m un-

ungerad und n gerad ist, so wird $ss = m^4 - n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten nemlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar, daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbar kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und s; wenn also die Sache in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind, wenn das eine Biquadrat gleich o oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n = o$ folglich $u = o$, ferner $r = o$ und $p = o$ und $x^4 - y^4 = o$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Falle ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$ weiter $s = o$, $q = o$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m unge-

rad

rad und n gerad ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen, daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat seyn könne, wenn das eine Biquadrat gerad und das andere ungerad ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerad und y^4 ungerad, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n+3$ herauskäme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerad und y gerad, so muß seyn $xx = pp + qq$ und $y = 2pq$, denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2$, wovon p und q das eine gerad das andere aber ungerad seyn muß.

II. Da nun $pp + qq = xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p = rr - ss$ und $q = 2rs$; folglich $x = rr + ss$. Hieraus aber wird $yy = 2(rr - ss).2rs$ oder $yy = 4rs\,rr\,ss)$, welches ein Quadrat seyn muß, und also auch der vierte Theil davon, nemlich $rs(rr - ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III.

III. Man setze demnach $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr - ss = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist, welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, also daß wenn auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbaren Fälle zu kommen: dahero gewiß auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerad genommen werden, kann folgendergestalt abgekürzet werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx = pp + qq$ und $yy = pp - qq$, wo von den Buchstaben p und q, der eine gerad der andere aber ungerad wäre: alsdann aber würde $xxyy = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon

das

das eine gerad das andere aber ungerad ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also die zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe noch die Differenz zweyer Biquadraten jemals eine Quadrat-Zahl werden könne, außer einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich, daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: denn weil diese Formel eine Summe von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbar unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man dahero $p = rr$ und $q = ss$,

$q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: denn da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdann heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müssen, welches nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; denn da dasselbe gerad seyn müßte, und folglich

$2x^4+2y^4=4zz$ wäre, so würde seyn $x^4+y^4=2zz$, und dahero $2zz+2xxyy=x^4+2xxyy+y^4$ und also ein Quadrat. Eben so würde seyn $2zz-2xxyy=x^4-2xxyy+y^4$ und also auch ein Quadrat. Da nun so wohl $2zz+2xxyy$ als $2zz-2xxyy$ ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4-4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4-x^4y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4-2y^4$ kein Quadrat seyn; denn da beyde Zahlen x und y nicht gerad sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerad und die andere ungerad, weil sonsten der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar seyn würde, so müssen beyde ungerad seyn. Setzt man nun $x=p+q$ und $y=p-q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerad, die andere aber ungerad, und da:

$2x^4-2y^4=(xx+yy)(xx-yy)$, so bekommt man $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$ und $xx-yy=4pq$; also unsere Formel $16pq(pp+qq)$ deren sechzehnte Theil, nemlich $pq(pp+qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p=rr$ und $q=ss$, so wird der dritte r^4+s^4, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel x^4+2y^4 kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerad seyn, weil alsdann y ungerad seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen lassen: dahero muß x ungerad seyn.

II. Man setze demnach die Quadrat-Wurzel unserer Formel $=xx+\frac{2pyy}{q}$, damit dieselbe ungerad werde; so wird $x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{pp}+\frac{4ppy^4}{qq}$, wo sich die x^4 aufheben,

die

die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben $4pqxx+4ppyy = 2qqyy$ oder $4pqxx = 2qqyy-4ppyy$, daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq-2pp}{2pq}$; woraus folget $xx = qq-2pp$ und $yy = 2pq$, welche eben die Formeln sind, die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq-2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = rr+2ss$ und $p = 2rs$; denn da würde $xx = (rr-2ss)^2$; hernach aber würde $4rs(rr+2ss) = yy$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(rr+2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr+2ss = t^4+2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach x^4+2y^4 ein Quadrat, so würde auch t^4+2u^4 ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so

kann

kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrifft $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte; und wenn man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viele Fälle gefunden werden, da dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdann bekommt $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wenn $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; denn da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu merken, daß dieses auch geschehen würde, wenn man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, dahero zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs(rr - 2ss)$; und müß-

ten

ten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu(t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind, als x und y, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, deswegen, weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen gelanget; denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn, ohne auf diese Formel $t^4 - 2u^4$ zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Falle, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, so wird zwar wie vorher $xx = rr + 2ss$ allein für y bekommt man $yy = 2pq = 4rs(2ss - rr)$. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so bekommt man $yy = 4ttuu(u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu\sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus erhellet, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn diese

$2u^4$

$2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2.16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wenn $u = 13$ und $t = 1$, weil alsdann $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich $x = 1 + 2.13^4 = 57123$ und $y = 2.13.239 = 6214$.

IV. So bald man aber Werthe für x und y gefunden hat, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, da man denn wieder neue für x und y erhalten wird.

Weil wir nun gefunden haben $x = 3$ und $y = 2$, so laßt uns in der No. I. gegebenen Formeln setzen $t = 3$ und $u = 2$, da denn $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, so bekommen wir folgende neue Werthe $x = 81 + 2.16 = 113$ und $y = 2.3.2.7 = 84$. Hieraus erhalten wir $xx = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $yy = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird $x^4 - 2y^4 = 63473089$

wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrift mit der anfänglich angesetzten pp—2qq. Denn da t=3 und u=2, so wird r=9 und s=4, dahero p=81—32=49 und q=72, woraus pp—2qq=2401—10368—=—7967.

Capitel 14.

Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theil der Analytic gehören.

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören, aufzulösen; dahero wir um dieses in ein größeres Licht zu setzen, einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wenn man dazu 1 sowohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß sowohl $x+1$ als auch $x-1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x+1 = pp$, so wird $x = pp-1$ und $x-1 = pp-2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey $p-q$, so wird $pp-2 = pp-2pq+qq$, wo sich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p = \frac{qq+2}{2q}$; daraus man ferner erhält $x = \frac{q^4+4}{4qq}$: wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze dahero $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4+4s^4}{4rrss}$, wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen.

wann	$r = 1$	2	1	3
und	$s = 1$	1	2	1
so wird	$x = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{30}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müssen also diese zwey Formeln $x+4$ und $x+7$ Quadrate werden; man setze daherd für die erstere $x+4=pp$, so wird $x=pp-4$, die andere Formel aber wird $x+7=pp+3$, welche auch ein Quadrat seyn muß; man setze daher die Wurzel davon $=p+q$, so wird $pp+3=pp+2pq+qq$, woraus gefunden wird $p=\frac{3-qq}{2q}$, folglich $x=\frac{c-2qq+q4}{4qq}$. Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x=\frac{9s4-22rrss+r4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r=1$ und $s=1$, so wird $x=-3$, und daraus wird $x+4=1$ und $x+7=4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s=2$ und $r=1$, da bekommt man $x=\frac{57}{16}$, woraus wird $x+4=\frac{121}{16}$ und $x+7=\frac{169}{16}$: will man ferner setzen $s=3$ und $r=1$, so bekommt man $x=\frac{133}{9}$, woraus $x+4=\frac{169}{9}$ und $x+7=\frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, so setze man $r=5$ und $s=1$, da wird $x=\frac{21}{25}$ und daraus $x+4=\frac{121}{25}$ und $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch x, daß wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder

von

von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Da diese beyden Formeln $1+x$ und $1-x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1+x = pp$, da wird $x = pp-1$, und die andere Formel $1-x = 2-pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p=1$, deswegen setze man $p=1-q$, also daß $x=qq-2q$, so wird unsere Formel $2-pp = 1+2q-qq$, davon setze man die Wurzel $=1-qr$, so bekommt man $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$; hieraus $2-q=-2r+qrr$ und $q=\frac{2r+2}{rr+1}$; hieraus wird $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze man $r=\frac{t}{u}$, so wird $x=\frac{4tu3-4t3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$; also muß u größer seyn als t.

Man setze demnach $u=2$ und $t=1$, so wird $x=\frac{24}{25}$; setzt man $u=3$ und $t=2$, so wird $x=\frac{120}{169}$, und daraus $1+x=\frac{289}{169}$ und $1-x=\frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen x, welche

so

sowohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen?

Es müssen also diese Formeln $10+x$ und $10-x$ Quadrate seyn, welche nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat seyn müsse, nemlich $100-xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $=10-px$, so wird $100-xx=100-20px+ppxx$ und also $x=\frac{20p}{pp+1}$: hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede Formel besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch ein seyn; nun aber wird die erste $10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$; und weil $pp+2p+1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß diese Zahl $10pp+10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist wenn $p=3$ und deswegen setze man $p=3+q$, so bekommt man $100+60q+10qq$; davon setze man die Wurzel $10+qt$, so wird $100+60q+10qq=100+$

$20qt$

$20\,qt+qqtt$ daraus $q=\frac{60-20t}{tt-10}$, daraus $p=3+q$, und $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Setzt man $t=3$, so wird $q=0$ und $p=3$, folglich $x=6$, dahero wird $10+x=16$ und $10-x=4$. Es sey aber $t=1$, so wird $q=-\frac{40}{9}$ und $p=-\frac{13}{9}$ und $x=-\frac{234}{25}$: es ist aber gleich viel zu setzen $x=+\frac{234}{25}$, und dann wird $10+x=\frac{484}{25}$ und $10-x=\frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerkung: Wollte man diese Frage allgemein machen und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also, daß sowohl $a+x$ als $a-x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen, Summen von zwey Quadraten, oder in der Form $xx+yy$ enthalten sind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

die übrigen also, welche gleichfalls bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a+x=pp$ und $a-x=qq$, und da giebt die Addition $2a=pp+qq$, also daß 2a eine Summe von zwey Quadraten seyn muß; ist aber 2a eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wenn dahero a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a+x$ und $a-x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wenn demnach $a=3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und daß deswegen, weil 3 keine Summe von zwey Quadraten ist: man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit qqss, so würde $3qqss=ppss+qqrr$, wo $ppss+qqrr$ eine Summe

von

von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine andere Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach $ff+gg$ und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe $xx+yy$ gleich sey der Zahl $ff+gg$, also

also daß $xx+yy=ff+gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wenn x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müßte als g. Man setze dahero $x=f+pz$ und $y=g-qz$, so wird $ff+2fpz+ppzz+gg-2gqz+qqzz=ff+gg$, wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Dahero wird $2fp+ppz-2gq+qqz=0$ oder $ppz+qqz=2gq-2fp$, und also $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$ und $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f=1$ und $g=1$ so wird $xx+yy=2$, wenn $x=\frac{2pq+qq-pp}{pp+qq}$ und $y=\frac{2pq-pp-qq}{pp+qq}$; setzt man $p=2$ und $q=1$, so wird $x=\frac{1}{5}$ und $y=\frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wenn die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finde, daß so wohl $a+x$ als $a-x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a=13=9+4$, und man setze $13+x=pp$ und $13-x=qq$, so giebt erstlich die Addi-

tion

tion $26 = pp + qq$, die Subtraction aber $2x = pp - qq$: also müssen p und q so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekommt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelöst werden. Denn weil $f = 5$ und $g = 1$, wenn wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q schreiben t und u, vor x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir $p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu}$ und $q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu}$. Nimmt man nur für t und u Zahlen nach Belieben an und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$.

Es sey z. E. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = \frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $pp - qq = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die gesuchte aber $= z$, also

alſo daß dieſe Formeln $a+z$ und $a-z$ Quadrate werden ſollen.

Nun ſetze man $a+z=xx$ und $a-z=yy$, ſo wird erſtlich $2a=2(cc+dd)=xx+yy$, und hernach $2z=xx-yy$. Es müſſen alſo die Quadrate xx und yy ſo beſchaffen ſeyn, daß $xx+yy=2(cc+dd)$, wo $2(cc+dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten iſt, nemlich $(c+d)^2+(c-d)^2$. Man ſetze Kürze halber $c+d=f$ und $c-d=g$: alſo daß ſeyn muß $xx+yy=ff+gg$, dieſes geſchieht aber aus dem obigen, wenn man nimmt $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$ und $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, hieraus bekommt man die leichteſte Auflöſung, wenn man nimmt $p=1$ und $q=1$, denn daraus wird $x=\frac{2g}{2}=g=c-d$ und $y=f=c+d$, und hieraus folglich $z=2cd$. Hieraus wird nun offenbar $cc+dd+2cd=(c+d)^2$ und $cc+dd-2cd=(c-d)^2$. Um eine andere Auflöſung zu finden, ſo ſey $p=2$ und $q=1$, da wird $x=\frac{c-7d}{5}$, und $y=\frac{7c+d}{5}$, wo ſo wohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer ſeyn ſoll als y, ſo nehme man d negativ, und da wird $x=\frac{c+7d}{5}$ und $y=\frac{7c-d}{5}$. Hieraus folgt $z=\frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, welcher Werth zu $a=cc+dd$

addirt

addirt, giebt $\frac{cc+14cd+4cdd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{c+7d}{5}$. Subtrahirt man aber z von a so bleibt $\frac{9cc-14cd+dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{7c-d}{5}$; jene ist nemlich x, diese aber y.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn sowohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrate xx, 1 addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also die beyde Formeln $x+1$ und $xx+1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze dahero für die erste $x+1=pp$, so wird $x=pp-1$, und die zweyte Formel $xx+1=p^4-2pp+2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber fällt so gleich in die Augen, nemlich wo $p=1$. Man setze dahero $p=1+q$, so wird $xx+1=1+4qq+4q^3+q^4$, welches auf vielerley Art zu einem Quadrate gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1+qq$, so wird $1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$,

dar-

daraus wird $4q+4qq=2q$ oder $4+4q=2$ und $q=-\frac{1}{2}$, folglich $p=\frac{1}{2}$ und $x=-\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1-qq$, so wird $1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4$, und daher $q=-\frac{3}{2}$ und $p=-\frac{1}{2}$, hieraus $x=-\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1+2q+qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird $1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4$, daraus wird $q=-2$ und $p=-1$, daher $x=0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1-2q-qq$, so wird $1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+2qq+4q^3+q^4$, daraus wird $q=-2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1+2qq$, da wird $1+4qq+4q^3+q^4=1+4qq+4q^4$ und daraus $q=\frac{4}{3}$ und $p=\frac{7}{3}$, folglich $x=\frac{40}{9}$, woraus folgt $x+1=\frac{49}{9}=(\frac{7}{3})^2$ und $xx+1=\frac{1681}{81}=(\frac{41}{9})^2$.

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man eine von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q=-\frac{1}{2}+r$; daraus aber wür-

würde $p = \frac{1}{2} + r$; $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und dahero auch mit 16 multiplicirt, nemlich $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, also daß $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr \pm 8fr^3 + 16r^4$. Da nun die $+ ffrr$ ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch rr dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = \left(\frac{31}{20}\right)^2$, und $xx + 1 = \left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus $r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III.

III. Es sey die Wurzel $4rr+4r\pm5$, also daß $16r^4+32r^3-8rr-24r+25 = 16r^4+32r^3 \pm 40rr \pm 40r+25$: wo die zwey ersten und $+16rr$ die ganz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r-24 = \pm 40r +16r \pm 40$, oder $-24r-24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, so wird $-24r -24 = 40r+40$, oder $0 = 64r+64$, oder $0 = r+1$, daß ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5+fr+grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun $25-24r-8rr+32r^2+16r^4 = 25+10fr+10grr+2fgr^3+ggr^4, +ffrr$ so wird erstlich $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$, ferner $-8 = 10g+ff$, und also $g = \frac{-8-ff}{10}$, oder $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32+16r = 2fg+ggr$ und daraus $r = \frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der Zähler $2fg-32 = \frac{+24.172-32.625}{5.125}$ $= \frac{-32.496}{625}$, oder dieser Zähler $= -\frac{16.32.31}{625}$; der

Nen-

Nenner aber giebt $16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328}{125}\cdot\frac{672}{125}$ oder $16-gg=\frac{8.32+1.21}{25.625}$; daraus wird $r=-\frac{150}{861}$, hieraus $p=-\frac{239}{172}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x=pp-1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt, ein Quadrat hervorbringe?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadrate gemacht werden, nemlich $x+a$, $x+b$, und $x+c$.

Man setze für die erstere $x+a=zz$, also daß $x=zz-a$, so werden die beyden andern Formeln $zz+b-a$ und $zz+c-a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hievon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b-a$, und $c-a$ beruhet. Denn wäre z. E. $b-a=1$ und $c-a=-1$, das ist $b=a+1$ und $c=a-1$, so müßten $zz+1$ und $zz-1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze dahero $z=\frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müssen,

$pp+qq$ und $pp-qq$, folglich müßte auch ihr Product, nemlich p^4-q^4, ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey, ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b-a=2$, und $c-a=-2$, das ist $b=a+2$ und $c=a-2$, so müßten, wenn man wiederum setzte $z=\frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp-2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product p^4-4q^4, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b-a=m$ und $c-a=n$, ferner auch $z=\frac{p}{q}$, so müssen diese Formeln Quadrate seyn $pp+mqq$ und $pp+nqq$; welches, wie wir eben gesehen, unmöglich ist, wenn entweder $m=+1$ und $n=-1$, oder wenn $m=+2$ und $n=-2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich wenn $m=ff$ und $n=-ff$, denn alsdann würde das Product derselben $p^4-f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so wenn $m=2ff$ und $n=-2ff$, so können auch diese Formeln $pp+2ffqq$ und $pp-2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4-4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wenn man setzt $fq=r$, diese Formel p^4-4r^4 heraus kömmt, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, also daß diese Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der ersteren $pp = rr - qq$, und also die andere $rr + qq = ss$: daher müßte so wohl $rr - qq$ als $rr + qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Genüge, daß es nicht leicht ist, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solchergestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff + mgg = hh$ und $ff + ngg = kk$, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{hh - ff}{gg}$, und aus der andern $n = \frac{kk - ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, daß die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Jetzo sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$

zu Quadrate zu machen, und solches geschieht wenn $p=1$ und $q=2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wann $p=rr-2ss$ und $q=2rs$; denn da wird $pp+qq=rr+ss^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, wovon ein Fall bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wenn $p=1$ und $q=0$, und welches geschieht wenn $r=1$ und $s=1$, oder wenn überhaupt $r=s$; denn da wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r=s+t$, so wird $rr=ss+2st+tt$ und $r^4=s^4+4s^3t+6sstt+4st^3+t^4$; daher unsere Formel seyn wird $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$, davon sey die Wurzel $5ss+fst+tt$, wovon das Quadrat ist $25s^4+10fs^3t+10sstt+2fst^3+ffsstt+t^4$, wo sich die ersten und letzten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht, wenn $4=2f$ und $f=2$; alsdann geben die übrigen durch sst dividirt diese Gleichung $44s+26t=10fs+10t+fft=20s+14t$, oder $2s=-t$ und $\frac{s}{t}=-\frac{1}{2}$ daher wird $s=-1$ und $t=2$, oder $t=-2s$, folglich $r=-s$ und $rr=ss$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $4 + 10f$, oder $f = -\frac{2}{5}$; da denn die übrigen Glieder durch s t t dividirt, geben $26s + 4t = 16s + ffs + 2ft$, das ist $-\frac{84}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$; dahero $r = 3$, und $s = 10$: hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden: $pp + 2qq = 43681 = 209^2$, und $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

224.

Anmerkung: Dergleichen Zahlen für m und n, wodurch sich unsere Formeln zu Quadrate machen lassen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden. Es ist aber zu merken, daß das Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey dieses Verhältniß wie a zu b, und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kommt es nun darauf an wie man z bestimmen soll, daß diese beyde Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadrate gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wenn a und b gegebene Zahlen sind; die Zahl z zu finden, daß sich diese beyde Formeln $pp + azqq$ und

und $pp + bzqq$ zu Quadrate machen laſſen, und zugleich die kleinſten Werthe für p und q zu beſtimmen?

Man ſetze $pp + azqq = rr$ und $pp + bzqq = ss$, und multiplicire die erſtere mit b die andere aber mit a, ſo giebt die Differenz derſelben dieſe Gleichung $(b-a)pp = brr - ass$ und alſo $pp = \frac{brr-ass}{b-a}$, welche Formel alſo ein Quadrat ſeyn muß. Da nun ſolches geſchieht wenn $r = s$, ſo ſetze man um die Brüche weg zu bringen $r = s + (b-a)t$, ſo wird $pp = \frac{brr-ass}{b-a} =$

$$\frac{bss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt - ass}{b-a} = \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt}{b-a}$$

$= ss + 2bst - b(b-a)tt$. Nun ſetze man $p = s + \frac{x}{y}t$, ſo wird $pp = ss + \frac{2x}{y}.st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt$; wo ſich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt geben; $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus $t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}$, dahero $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy - xx}$. Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$; ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus $p = s + \frac{x}{y}.t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy$. Da wir nun p nebſt r und s gefunden haben, ſo iſt noch übrig z zu ſuchen. Man ſubtrahire zu dieſem Ende die erſte Gleichung $pp + azqq + rr$ von der andern

pp

$pp+bzqq=ss$, so giebt der Rest $zqq(b-a)=ss-rr=(s+r).(s-r)$. Dann $s+r=2(b-a)xy-2xx$ und $s-r=2b(b-a(yy-2(b-a,xy;$ oder $s+r=2x((b-a)y-x)$ und $s-r=2(b-a)y(by-x)$, so wird $(b-a)zqq=2x((b-a)y-x.2(b-a)y(by-x)$ oder $zqq=2x((b-a)y-x).2y(by-x)$ oder $zqq=4xy((b-a)y-x,(by-x)$; folglich $z=\frac{4xy(b-a)y-x)(by-x)}{qq}$.

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zähler theilen läßt: für p aber haben wir schon gefunden $p=b(b-a)yy+xx+2bxy=(x-by)^2-abyy$, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man setzet: $x=v+by$ oder $x-by=v$: denn da wird $p=vv-abyy$, und $z=\frac{4(v+by).y,v(v+ay)}{qq}$ oder $z=\frac{4vy\ v+ay\ (v+by)}{qq}$:

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zähler enthalten ist, woraus sich so dann z ergiebt; da dann $m=az$ und $n=bz$, endlich aber $p=vv-abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln.

I. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by)$, welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = vv - 2avy - abyy$ ist.

II. Die zweyte Formel aber wird $pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v+ay)(v+by)$, welche auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = vv - 2bvy - abyy$: wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können. Dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z also daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nemlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$; und man hat also um z zu finden die Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v-y)}{qq}$, da wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget.

	I	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
v − y	1	1	3	1	7	7
v + y	3	5	5	9	25	61
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16	30.25.16	7.16.9.14
qq	4	4	16	9.16	30.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadrate gemacht werden können.

I. Können diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht wenn $p = 5$ und $q = 2$; denn da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$, welches geschieht wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$, welches geschieht

schieht wann $p = 17$ und $q = 4$; denn da wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$, welches geschieht wenn $p = 41$ und $q = 12$; denn da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 7qq$ und $pp + 7qq$, welches geschieht wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn da wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 14qq$ und $pp + 14qq$, welches geschieht wenn $p = 65$ und $q = 12$; denn da wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Exempel: Wenn die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie 1: 2, das ist wenn $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so, daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 2zqq$ zu Quadrate gemacht werden können.

Man

Man hat nicht nöthig hier die obigen, zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, ſondern dieſes Exempel kann ſogleich auf das vorige gebracht werden. Denn ſetzt man $pp + zqq = rr$ und $pp + 2zqq = ss$, ſo bekommt man aus der erſtern $pp = rr - zqq$ welcher Werth für pp in der zweyten geſetzt, giebt $rr + zqq = ss$; folglich müſſen die zwey Formeln $rr - zqq$ und $rr + zqq$ zu Quadrate gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels iſt. Alſo hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14, etc.

Eine ſolche Verwandelung kann auch allgemein angeſtellt werden. Wenn wir annehmen, daß dieſe zwey Formeln $pp + mqq$ und $pp + nqq$ zu Quadrate gemacht werden können, ſo laßt uns ſetzen $pp + mqq = rr$ und $pp + nqq = ss$, ſo giebt die erſtere $pp = rr - mqq$, und alſo die zweyte $ss = rr - mqq + nqq$ oder $rr + (n - m)qq = ss$; wann daherd die erſteren Formeln möglich ſind, ſo ſind auch dieſe $rr - mqq$ und $rr + (n - m)qq$ möglich; und da wir m und n unter ſich verwechſeln können, ſo ſind auch dieſe möglich $rr - nqq$ und $rr + (m - n)qq$: ſind aber jene Formeln unmöglich ſo ſind auch dieſe unmöglich.

228.

III. Exempel. Es ſeyn die Zahlen m und n wie 1 : 3, oder a = 1 und b = 3, alſo m = z und n = 3z, ſo daß dieſe Formeln pp + zqq und pp + 3zqq zu Quadrate gemacht werden ſollen.

Weil hier a = 1 und b = 3, ſo wird die Sache möglich ſo oft zqq = 4vy(v + y)(v + 3y), und p = vv + 3yy. Man nehme dahero für v und y folgende Werthe.

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
v + y	2	5	5	9	25
v + 3y	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	49	4.4.	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für z = 2, daraus wir auf zweyerley Art dieſe Formeln pp + 2qq und pp + 6qq zu Quadrate machen können; erſtlich geſchieht dieſes wenn p = 2 und q = 4, folglich auch wenn p = 1 und q = 2; denn da wird pp + 2qq = 9 und pp + 6qq = 25. Hernach geſchieht es auch wen p = 191 und q = 60, denn da wird pp + 2qq = (209)² und

pp

$pp + 6qq = (24\mathfrak{l})^{\mathfrak{q}}$. Ob aber nicht auch seyn könnte $= \mathfrak{z}^{\mathfrak{q}}$? welches geschehen würde wenn für $2qq$ ein Quadrat heraus käme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun die Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadrate gemacht werden können oder nicht, so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll also untersuchen ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadrate gemacht werden können oder nicht? Man setze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, so sind folgende Puncte zu bedenken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; denn da würde q ungerad und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerad, und pp eine Zahl von dieser Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerad ist, so muß aus der ersten Formel q nicht nur gerad, sondern so gar durch 4 theilbar seyn, damit qq eine Zahl werde von dieser Art 16 n; und pp + qq von dieser Art 8 n + 1.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; denn da würde pp sich durch 9 theilen lassen qq aber nicht, folglich 3 qq nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch pp + 3qq durch 3, nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, dahero pp von der Art 3 n + 1 seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen; denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre qq eine Zahl von dieser Art 3 n + 1, und dahero pp + qq von dieser Art 3 n + 2, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; denn wäre dieses, so wäre q nicht durch 5 theilbar und qq eine Zahl von der Art 5 n + 1 oder 5 n + 4, also 3 qq eine Zahl von der Art

$5n+3$ oder $5n+2$, und von welcher Art auch $pp+3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; dahero denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also pp eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen lasse oder nicht? Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre qq von dieser Art $5n+2$ oder $5n+3$, wie wir gesehen haben, und da pp entweder $5n+1$ oder $5n+4$, so würde $pp+3qq$ seyn, entweder $5n+1$ oder $5n+4$ eben wie pp; es sey $pp = 5n+1$, so müßte seyn $qq = 5n+4$, weil sonst $pp+qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdann aber wäre $3qq = 5n+2$, und $pp+3qq = 5n+3$, welches kein Quadrat seyn kann; wäre aber $pp = 5n+4$, so müßte seyn $qq = 5n+1$ und $3qq = 5n+3$ folglich $pp+3qq = 5n+2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß q durch 5 theilbar seyn müsse.

VIII. Da nun q erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn 4. 3. 5 m, oder q = 60 m; dahero unsere Formeln seyn würden pp + 3600 m m = rr und pp + 10800 mm = ss: da denn die erste von der zweyten subtrahirt giebt 7200 m m = ss − rr = (s + r) (s − r); also daß s + r und s − r Factores seyn müssen von 7200mm: wobey zu merken daß so wohl s als r ungerade Zahlen seyn müssen und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach 7200 m m = 4 f g oder die Factores davon 2 f und 2 g, und man setze s + r = 2 f und s − r = 2 g, so wird s = f + g, und r = f − g; da denn f und g unter sich untheilbar seyn müssen, und die eine gerad und die andere ungerad. Da nun f g = 1800mm, so muß man 1800mm in zwey Factores zerlegen, deren einer gerad, der andere aber ungerad sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu merken, daß da rr = pp + qq und also r ein Theiler von pp + qq,

die

die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerad, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müsse.

IX. Nehmen wir erstlich an $m = 1$, so wird $fg = 1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$, woraus folgende Zerlegungen entspringen; $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus dem ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; dahero die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schliessen kann, daß der größere Factor ungerad der kleinere aber gerad seyn müsse; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

IIX. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, daher nimmt man $r = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also ver-

dienet probirt zu werden: da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird, weil $pp = rr - qq(r+q).(r-q)$, also $r+q = 313$ und $r-q = 73$, also sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehr-Satz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewiß kein.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerad und q gerad ist, wie wir gesehen haben, so kann $pp + qq$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2rs$ und $p = rr - ss$; die andere aber $pp + 3qq$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn $q = 2tu$ und $p = tt - 3uu$ oder $p = 3uu - tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber

$t =$

t = ac und u = bd, so wird für die erstere p = aa bb —ccdd, für die andere aber p = aacc — 3bbdd, oder p = 3bbdd-aacc, welche beyde Werthe einerley seyn müssen; dahero bekommen wir entweder aabb—ccdd = aacc —3bbdd, oder aabb—ccdd = 3bbdd—aacc: wobey zu merken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müssen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem ersten erhalten wir aa bb + 3bb dd = aa cc +ccdd oder bb (aa + 3dd) = cc (aa + dd), daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa+dd}{aa+3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß. Hier kann aber der Zähler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen 2dd ist. Sollte dahero 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte sowohl $\frac{aa+dd}{2}$ als auch $\frac{aa+3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerad und also ihre Quadrate von der Form 8n + 1, dahero die letztere Formel $\frac{aa+3dd}{2}$ diese Form 4n + 2 haben wird und kein Quadrat seyn kann: folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zähler aa + dd und der Nenner aa + 3dd sind unter sich untheilbar; daher ein jeder für sich ein Quadrat seyn

muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleicher Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ auf dergleichen führt: hieraus aber wird $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, oder $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, und dahero $\frac{aa}{dd} = \frac{bb + cc}{3bb \quad cc} = \frac{cc \quad bb}{cc \quad 3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß, also daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem, wenn es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da $pp + qq$ und $pp + 3qq$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß wenn je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskomme?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadrate gemacht werden: I. $xy+1$; II. $xz+1$; III. $yz+1$;

Man setze für die beyden letztern $xz+1=pp$ und $yz+1=qq$, so findet man daraus $x=\frac{pp-1}{z}$ und $y=\frac{qq-1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit zz multiplicirt, das ist $(pp-1)(qq-1)+zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Denn setzt man die Wurzel davon $=z+r$, so bekommt man $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, und dahero $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r=-pq-1$, so wird $rr=ppqq+2pq+1$ und $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$, folglich $x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pq+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$, und $y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy+1=pp$ und nehme $z=x+y+q$, so wird die zweyte Formel $xx+xy+xq+1=xx+qx+pp$; die dritte aber wird $xy+yy+qy+1=yy+qy+pp$, welche offenbar

bar Quadrate werden, wenn man nimmt $q = \pm 2p$; denn da wird die zweyte $xx \pm 2px + pp$ davon die Wurzel ist $x \pm p$, die dritte aber wird $yy \pm 2py + pp$ davon die Wurzel ist $y \pm p$; dahero haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy + 1 = pp$ oder $xy = pp - 1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $pp - 1 = 8$: nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$; und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $pp - 1 = 15$: nun nehme man $x = 5$, und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $pp - 1 = 24$: nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey ganze Zahlen y, x und z, so daß wenn zu dem Producte aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese drey Formeln Quadrate werden I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = pp$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $xx + xy + xq + a = xx + xq + pp$ und die dritte $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, welche beyde Quadrate werden, wenn $q = \pm 2p$; also daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier ganze Zahlen x, y, z und v, so daß wenn zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadrate gemacht werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$;

VI. $zv+a$. Nun setze man für die erste $xy+a = pp$ und nehme $z = x+y+2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x+y-2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx+2xy+yy-4pp+a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp = xy+a$, so wird diese letzte Formel $xx-2xy+yy-3a$, folglich müssen auch diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden I. $xy+a = pp$ und II. $(x-y)^2-3a$. Von der letztern sey die Wurzel $(x-y)-q$, so wird $(x-y)^2-3a = (x-y)^2-2q(x-y)+qq$, und da wird $-3a = -2q(x-y)+qq$ und folglich $x-y = \frac{qq+3a}{2q}$ oder $x = y+\frac{qq+3a}{2q}$; hieraus wird $pp = yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$. Man nehme $p = y+r$, so wird $2ry+rr = \frac{qq+3a}{2q}y+a$, oder $4qry+2qrr = qq+3a)y+2aq$, oder $2qrr-2aq = (qq+3a)y-4qry$ und $y = \frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y ganze Zahlen herauskommen. Denn weil $p = y+r$, so werden auch z und v ganz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an,

wo

wo die Sache mit den ganzen Zahlen noch einige Schwierigkeit haben könnte; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viele andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = pp - a$, so müssen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr - ass$ enthalten seyn: wenn wir demnach setzen $x = bb - acc$ und $y = dd - aee$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = +1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = ff - agg$ und nehmen die Zahlen f und g also an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch diese Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und

auch

auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müssen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zähler $= 1$. Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ so muß dessen Zähler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldete Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß seyn $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e-1}{2}$. Man nehme dahero $\frac{e-1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch

der

der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden ersten in gleichem Verhältnisse steht. Man darf nur setzen $f = b + d$ und $g = c + e$, also daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, denn da aus den zwey ersten ist $be - cd = \pm 1$ so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{cc+ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\pm 1}{ce+ee}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus so gleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, also daß diese drey Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Denn man darf nur setzen $x = bb - acc$, $y = dd - aee$ und $z = ff - agg$. Man nehme z. E.

aus

aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$ so wird $\frac{f}{e} = \frac{1}{7}$; woraus man erhält $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$; denn da wird $xy + a = 1225 - 840a + 144aa = (35 - 12a)^2$; ferner wird $xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2$ und $yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (64 - 28a)^2$.

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyn demnach die drey ersteren $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{b}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältnisse stehe: wenn man nun nimmt $x = bb - aacc$; $y = dd - aee$; $z = ff - agg$ und $v = hh - akk$, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square$ (*); II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbsten nicht geschieht, weil der erste Bruch

(*) deutet hier allenthalben eine Quadrat-Zahl an.

Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältnisse steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv+a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$ und, $\frac{d}{e}=\frac{3m-1}{2m-1}$, so wird $\frac{f}{g}=\frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k}=\frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x=9-4a$ und $v=(6m+5)^2-a(4m+4)^2$ also $xv+a=$

$9(6m+5)^2 \quad -4a(6m+5)^2$
$-9a(4m+4)^2+4aa(4m+4)^2$ oder
$xv+a\ 9(6m+5)^2-a(288mm+538m+243)$
$+4aa(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann, weil mm mit einem Quadrate multiplicirt ist; wobey wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: denn es sey $\frac{b}{c}=\frac{1}{1}$, $\frac{d}{e}=\frac{n1-1}{n}$; so wird $\frac{f}{g}=\frac{n1+1-1}{n+1}$ und $\frac{g}{k}=\frac{2n1+1-2}{2n+1}$; man setze für den letzten $2n+1=m$, so wird derselbe $\frac{1m-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x=11-a$

und

und aus dem letzten $v = (Im - 2)^2 - amm$. Also ist nur noch übrig, daß $xv + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (II - a)mm - 4Im + 4$ und also $xv + a = (II - a)^2 mm - 4(II - a)Im + 4II - 3a$, welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel $(II - a)m - p$, wovon das Quadrat $(II - a)^2 mm - 2(II - a)mp + pp$, woraus wir erhalten, $-4(II - a)Im + 4II - 3a = -2(II - a)mp + pp$ und $m = \frac{pp - 4II + 3a}{(II - a)(p - 4I)}$. Man nehme $p = 2I + q$, so wird $m = \frac{4Iq \quad qq + 3a}{2q(II - a)}$, wo für I und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. E. $a = 1$ so nehme man $I = 2$, da wird $m = \frac{4q + qq + 3}{6q}$: setzt man $q = 1$ so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n + 1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß sowohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?

Es müssen also die folgende sechs Formeln zu Quadrate gemacht werden: I. $x+y$; II. $x+z$; III. $y+z$; IV. $x-y$; V. $x-z$; VI. $y-z$. Man fange bey den drey letzten an, und setze $x-y=pp$, $x-z=qq$ und $y-z=rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten $x=qq+z$ und $y=rr+z$, daher die erstere giebt $x-y=qq-rr=pp$, oder $qq=pp+rr$, also daß die Summe der Quadrate $pp+rr$ ein Quadrat seyn muß, nemlich qq, welches geschieht wenn $p=2ab$ und $r=aa-bb$, denn da wird $q=aa+bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben p, q und r beybehalten und die drey erstern Formeln betrachten, da denn erstlich $x+y=qq+rr+2z$; zweytens $x+z=qq+2z$; drittens $y+z=rr+2z$. Man setze für die erstere $qq+rr+2z$ tt, so ist $2z=tt-qq-rr$: dahero denn noch diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden müssen $tt-rr=\square$ und $tt-qq=\square$, daß ist $tt-(aa-bb)^2=\square$ und $tt-(aa+bb)^2=\square$, welche diese Gestalten annehmen $tt-a^4-b^4+2aabb$ und $tt-a^4-b^4-2aabb$: weil nun so wohl $cc+dd+2cd$ als $cc+dd-2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wenn wir $tt-a^4-b^4$ mit

$cc+dd$

$cc+dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, so lasset uns setzen $cd=aabb=ffgghhkk$ und nehmen $c=ffgg$ und $d=hhkk$; $aa=ffhh$ und $bb=ggkk$ oder $a=fh$ und $b=gk$, woraus die erstere Gleichung $tt-a^4-b^4=cc+dd$ diese Form erhält $tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4$ und also $tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4$, das ist $tt=(f^4+k^4)(g^4+h^4)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen dahero die Sache auf eine andere Art angreiffen, und aus den drey erstern Gleichungen $x-y=pp$; $x-z=qq$; $y-z=rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden $y=x-pp$ und $z=x-qq$, also daß $qq=pp+rr$. Nun werden die ersten Formeln $x+y=2x-pp$, $x+z=2x-qq$; und $y+z=2x-pp-qq$; für diese letzte setze man $2x-pp-qq=tt$, also daß $2x=tt+pp+qq$ und nur noch diese Formeln $tt+qq$ und $tt+pp$ übrig bleiben, welche zu Quadrate gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq=pp+rr$, so setze man $q=aa+bb$ und $p=aa-bb$, so wird $r=2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

I. $tt+(aa+bb)^2=tt+a^4+b^4+2aabb=\square$

II.

II. $tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square$.

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt + a^4 + b^4$ mit $cc + dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c = ffgg$, $d = hhkk$ und $a = fh$, $b = gk$; so wird $cd = aabb$, und muß noch seyn $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; woraus folget $tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$. Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt, ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem Ende die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen, was für Zahlen daraus entspringen, wann für m und n gegebene Zahlen genommen werden; und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgende Tabelle machen.

Tabelle.

Für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind.

mn	nn	mm − nn	mm + nn	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.17
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	289	289.7.23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $ff=9$ und $kk=4$, so wird $f^4-k^4=13.5$: ferner nehme man $gg=81$, und $hh=49$, so wird $g^4-h^4=64.5.13$, woraus $tt=64.25.169$; folglich $t=520$. Da nun $tt=270400$; $f=3$; $g=9$; $k=2$; $h=7$, so bekommen wir $a=1$; $b=18$; hieraus $p=117$, $q=765$ und $r=756$; daraus findet man $2x=tt+pp+qq=869314$ und also $x=434657$; dahero ferner $y=x-pp=420968$, und endlich $z=x-qq=-150568$; welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen.

$x=434657$
$y=420968$
$z=150568$

dahero wird $x+y=855625=(925)^2$
$x+z=585225=(765)^2$
$y+z=571536=(756)^2$

und weiter $x-y=13689=(117)^2$
$x-z=284089=(533)^2$
$y-z=270400=(520)^2$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wenn wir setzen $ff = 9$; $kk = 4$, und $gg = 121$, $hh = 4$; denn daraus wird $tt = 13.5.5.13.9.25. = 9.25.25.19$, also daß $t = 3.5.5.13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$; hieraus wird, $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir $2x = tt + pp + qq = 95063 + 200704 + 270400 = 1421767$, dahero $x = \frac{1}{2}\frac{729}{}$, daraus $y = x - pp = \frac{1020}{2}\frac{21}{}$ und $z = x - qq = 880929$. Nun ist zu merken, daß wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nehmliche Eigenschaft behalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen vielmal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein Genüge leisten: $x = 2843458$, $y = 2040642$, und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Denn wann x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden I. x+y; II. x−y; III. x+z; IV x−z; V. y+z; VI. y−z; so wird auch das Product aus der ersten und zweyten xx−yy ein Quadrat, imgleichen auch das Product von der dritten und vierten xx−zz, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten yy−zz ein Quadrat seyn, dahero die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy, und zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß, um xx−yy zu einem Quadrate zu machen, auch x+y und x−y ein jedes besonders ein Quadrat seyn müsse, indem z. E. 25−9 ein Quadrat ist, da doch weder 5+3 noch 5−3 ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemerken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn xx − yy, xx − zz und yy − zz Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wenn sie durch zz dividirt werden; dahero diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$, $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$,

und

und $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Also kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an: nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, so werden die zwey letztere Bedingungen erfüllt; denn da wird $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ und $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrate zu machen, welche ist $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right)$. Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, wovon das Product ist $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zähler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrate zu machen $(ppqq-1)(qq-pp)$, oder auch diese $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; welches geschieht wann genommen wird $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk}$, da denn ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk}$; folglich müssen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und also auch wenn dieselben mit $4ffgg.hhkk$ multiplicirt werden, das ist $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn

man

man setzt $f = a+b$, $g = a-b$, $h = c+d$ und $k = c-d$: denn da kommt $2(a^4-b^4).2(c^4-d^4) = 4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, welches, wie wir gesehen haben, geschieht, wenn $aa = 9$; $bb = 4$, $cc = 81$ und $dd = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$; $g = 1$; $h = 16$ und $k = 2$, und dahero $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{24} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq = \frac{65}{16}.\frac{13}{5} = \frac{1.13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, dahero wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = \frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man um ganze Zahlen zu bekommen $z = 153$, da wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadrat-Zahlen folgende:

$xx = 485809$; denn da wird $xx-yy = 451584 = (672)^2$
$yy = 34225$; $yy-zz = 10816 = (104)^2$
$zz = 23409$; $xx-zz = 462400 = (680)^2$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wenn wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns

uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden: wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nemlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß dieses Product $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$ zu einem Quadrate gemacht werde, weil alsdann seyn wird $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}$ so setze man $\frac{q}{p}=m$ oder $q=mp$, da denn unsere Formel seyn wird $(mmp^4-1)(mm-1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wenn $p=1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir setzen $p=1+s$, alsdann aber muß diese Formel ein Quadrat seyn $(mm-1).(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$ und also auch wenn dieselbe durch das Quadrat $(mm-1)^2$ dividirt wird, da denn herauskommt $1+\frac{4mms}{mm-1}+\frac{6mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1}$. Man setze hier der Kürze halber $\frac{mm}{mm-1}=a$, also daß diese Formel $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1+fs+gss$ deren Quadrat ist $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$, und man bestimme f und g also, daß

die

die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + ff$, folglich $g = \frac{6a - ff}{2} = 3a - 2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a + as = 2fg + ggs$, woraus gefunden wird $s = \frac{4a - 2fg}{gs - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a - 12aa + 9aa - a}$, das ist $s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4 - 12a + 9a - 1}$, welcher Bruch durch $a - 1$ abgekürzt giebt $\frac{4(aa - 1)}{4aa - 3a + 1}$. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen, wei die Zahlen m, daraus hernach $a = \frac{mm}{mm - 1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und dahero $s = \frac{4 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$ und hieraus $p = -\frac{37}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$ so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = \frac{4 \cdot \frac{5}{11}}{\frac{11}{25}} = -\frac{260}{11}$, dahero $p = -\frac{249}{11}$ und $q = \frac{747}{22}$: woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie geschieht wann

$m = \frac{5}{3}$, denn da wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürze halben $a = bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$: davon sey die Wurzel $1 + 2bbs + bss$, deren Quadrat ist $1 + 4bbs + 2bss + 4b^4ss + 4b^3s^3 + bbs^4$, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch ss dividirt geben $6bb + 4bbs = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, daraus $s = \frac{6bb - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2bb - 2b}$; welcher Bruch noch durch $b - 1$ abgekürzt werden kann, da denn kommt $s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1 + 2bs + bss$, davon das Quadrat ist $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^3 + bbs^4$, wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs$. Da nun $bb = \frac{25}{16}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $pp - 1 = 0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{3}$ und dahero $a = \frac{25}{16} = bb$, folglich $b = \frac{5}{4}$, so kommt $p = \frac{17}{20}$ und $q = mp = \frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{689}{111}$ und $\frac{y}{z} = \frac{433}{145}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen xx, yy und zz, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln $xx+yy$; $xx+zz$ und $yy+zz$ zu Quadrate gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch zz um die drey folgenden zu erhalten I. $\frac{xx}{zz}+\frac{yy}{zz}=\square$; II. $\frac{xx}{zz}+1=\square$; III. $\frac{yy}{zz}+1=\square$. Da dann den zwey letztern ein Genüge geschieht, wann $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}$, hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, daß ist $\frac{(pp-1)^2}{pp}+\frac{(qq-1)^2}{qq}$; oder auch mit ppqq multiplicirt $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wissen, da dieselbe ein Quadrat wird: allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt

$$qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$$

so

so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p+1)^2$ theilen lässe.; welches geschieht, wenn man nimmt $q-1=p+1$ oder $q=p+2$, da denn seyn wird $q+1=p+3$, woher unsere Formel wird $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square$, welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn muß, nemlich $(p+2)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2$, so in diese Form aufgelößt wird $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Weil nun hier das erste Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2+fp+gpp$ oder $gpp+fp+2$, davon das Quadrat ist $ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$ wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $-4=4f$, oder $f=-1$ und $6=4g+1$, oder $g=\frac{5}{4}$, da dann die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p=-24$ und $q=-22$; daher wir erhalten $\frac{x^2}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ oder $x=-\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=\frac{483}{44}$ oder $y=-\frac{483}{44}z$.

Man

Man nehme nun $z = 16.3.11$, so wird $x = 575.11$ und $y = 483.12$: dahero sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$x = 6325 = 11.\ 23.\ 25$, denn hieraus wird
$xx + yy = 23^2(275^2 + 252^2) = 23^2 \cdot 373^2$

$y = 5796 = 12.\ 21.\ 23$, dieses giebt
$xx + zz = 11^2(575^2 + 48^2) = 11^2 \cdot 577^2$.

$z = 528 = 3.\ 11.\ 16$, hieraus wird
$yy + zz = 12^2(483^2 + 44^2) = 12^2 \cdot 485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viele Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ oder $q+1 = 2(p+1)$, daß ist $q = 2p+1$ und $q-1 = 2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp.4.(p+1)^2(4pp) = \square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2(p-1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze dahero $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, oder $q-1 = 2(p+1)$, so wird $q = 2p+3$ und $q+1 = 2p+4$, oder $q+1 = 2(p+2)$: wo-

woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt, seyn wird: $(2p+3)^2(p-1)^2 + 6pp(p+2)^2$, das ist $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; davon sey die Wurzel $3-p+gpp$ deren Quadrat ist $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53 = 6g+1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p dividirt geben $20p+68 = ggp-2g$ oder $\frac{256}{3} - \frac{496}{9}p$, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{159}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q-1 = \frac{4}{3}(p-1)$, so wird $q-\frac{4}{3}p-\frac{1}{3}$ und $q+1 = \frac{4}{3}p+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1)$, dahero wird unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn $\frac{(4p-7)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2$, welche mit 81 multiplicirt, wird $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4+472p^3+73pp-54p+9$, wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp-9p+3$, davon das Quadrat $400p^4-360p^3+201pp+120pp-54p+9$ und daher erhält man $472p+73 = -360p+201$, dahero $p = \frac{2}{13}$ und $q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3}$.

Man

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp+9p-3$, davon das Quadrat $400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9$, mit unserer Formel verglichen giebt $472p+73=360p-39$, und daraus $p=-1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel so gar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q=\frac{pt+1}{p+t}$, da wird $q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$ und $q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$, hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt $=\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nemlich $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$ oder $ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp+2t(tt+1)p+tt$; wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp+(tt+1)p-t$, davon das Quadrat $ttp^4+2t(tt+1)p^3-2ttpp+(tt+1)^2pp-2t(tt+1)p+tt$ mit unserer Formel verglichen giebt:

2ttp

$2ttp + (tt+1)^2 p + (tt-1)^2 p + 2t(tt+1) = -2ttp + (tt+1)^2 p - 2t(tt+1)$, oder $4ttp + (tt-1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, oder $(tt+1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, das ist $tt+1 = -\frac{4t}{p}$: woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$, hieraus wird $pt+1 = -\frac{3tt+1}{tt-1}$ und $p+t = \frac{t^3-3t}{tt+1}$, folglich $q = -\frac{3tt+1}{t^3-3}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t = 2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{11}{2}$: woraus wir finden $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = +\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$ oder $x = \frac{3.13}{4.4.5.} z$ und $y = \frac{9.13}{4.11} z$. Man nehme nun $z = 4.4.5.11$, so wird $x = 3.13.11$. und $y = 4.5.9.13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten $x = 3.11.13 = 429$; $y = 4.5.9.13 = 2340$ und $z = 4.4.5.11 = 880$. Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$xx + yy = 3^2.13^2(121+3600) = 3^2.13^2.61^2$;

$xx + zz = 11^2.(1521+6400) = 11^2.89^2$;

$yy + zz = 20^2.(13689+1936) = 20^2.125^2$;

VI. Zuletzt bemerken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: dann wenn diese Werthe gefunden worden: $x = a$, $y = b$, und $z = c$; also daß $aa+bb = \square$, $aa+cc = \square$ und $bb+cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn da wird

$xx+yy = aabb+bbcc = bb(aa+cc) = \square$

$xx+zz = aabb+aacc = aa(bb+cc) = \square$

$yy+zz = aacc+bbcc = cc(aa+bb) = \square$

Da wir nun eben gefunden $x = a = 3.\ 11.\ 13$; $y = b = 4.\ 5.\ 9.\ 13$ und $z = c = 4.\ 4.\ 5:\ 11$, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$x = ab = 3.\ 4.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.\ 13.$

$y = bc = 4.\ 4.\ 4.\ 5.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.$

$y = ac = 3.\ 4.\ 4.\ 5.\ 11.\ 11.\ 13.$

welche sich alle drey durch $3.\ 4.\ 5.\ 11.\ 13$ theilen lassen, und also auf folgende Formel gebracht werden $x = 9.\ 13$, $y = 3.\ 4.\ 4.\ 5$ und $z = 4.\ 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $z = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; dahero wird aber:

$$xx+yy=71289=267^2.$$
$$xx+zz=15625=125^2.$$
$$yy+zz=59536=244^2.$$

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen x und y, so daß wenn man die eine zum Quadrat der andern addirt, ein Quadrat herauskomme, also daß diese zwey Formeln $xx+y$ und $yy+x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man so gleich für die erstere setzen $xx+y=pp$ und daraus herleiten $y=pp-xx$, so würde die andere Formel $p^4-2ppxx+x^4+x=\square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beyde Formeln $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$ und $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, woraus wir denn diese zwey Gleichungen erhalten I.) $y+2px=pp$ und II.) $x+2qy=qq$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nemlich $x=\frac{2ppq-qq}{4pq-1}$ und $y=\frac{2pqq-pp}{4pq-1}$; wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. E. $p=2$ und $q=3$, so bekommt man diese zwey gesuchten Zahlen

len $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$, denn daher wird $xx+y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = (\frac{31}{23})^2$ und $yy+x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = (\frac{37}{23})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$ und $y = \frac{17}{11}$: weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{8}{2}$, so wird $x = \frac{3}{20}$ und $y = \frac{7}{10}$, denn da wird $xx + y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = (\frac{17}{20})^2$ und $yy + x = \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = (\frac{8}{10})^2$.

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyn x und y und weil $xx + yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wenn $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, da dann wird $xx + yy = (pp + qq)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp + qq$ ein Quadrat seyn, dahero setze man ferner $p = rr - ss$ und $q = 2rs$, so wird $pp + qq = (rr + ss)^2$; folglich $xx + yy = (rr + ss)^4$ und also ein Biquadrat; alsdann aber

wird $x = r^4 - 6rrss + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also ist noch übrig, daß diese Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr + 2rs + ss$, und also unsere Formel gleich diesem Quadrat $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt, geben $6r + 4s = -6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$: also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$, oder man kann die Wurzel auch setzen $rr - 2rs + ss$, damit die vierten Glieder wegfallen: da nun das Quadrat hievon ist $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r - 6s$ $4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$: wenn nun $r = 3$ und $s = 2$ so würde $x = -119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r = \frac{3}{2}s + t$, so wird für unsere Formel:

$rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt$, $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$

folglich $r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4$

$+4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3$

$-6rrss = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt$

$-4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t$

$+s^4 = +s^4$; also unsere Formel

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$

wel-

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wenn sie mit 16 multiplicirt wird: da bekommt man diese $s^4 + 296 s^3 t + 408 ss tt + 160 st^3 + 16 t^4$: hievon setze man die Wurzel $ss + 148 st - 4tt$, davon das Quadrat ist $s^4 + 296 s^3 t + 21890 sstt - 1184 st^3 + 16 t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt, geben $21896 s - 1184 t = 408 s + 16 t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$: und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir, $x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761$ und $y = 10616522935 20$.

Capitel

Capitel 15.

Auflösung solcher Fragen wozu Cubi erfordert werden.

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewisse Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch

ein

ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3}+1=$ Cubo. Man setze $\frac{x}{y}=z-1$ so bekommen wir $z^3-3zz+3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubic-Wurzel setzen $z-u$, wovon der Cubus ist $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u=1$, die übrigen Glieder aber würden geben $3z=3uuz-u^3$, $=3z-1$, woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher Werth uns nichts hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung:

$-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3$; aus welcher Quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$ das ist $=3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, oder $zz=(u+1)z-\frac{u3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird

$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u3}{3(u-1)}\right)}$ oder

$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{-u3+3uu-3u-3}{12.u-1)}}$.

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde; wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben

selben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $g\,uu + f\,u + 3$, wovon das Quadrat ist $ggu^4 + 2fgu^3 + 6guu + 2fu + 9$ und macht die $+ffuu$

drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0 = 2f$ das ist $f = 0$, und hernach $6g + ff = -18$, und dahero $g = -3$: alsdann geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u + 12 = ggu + 2fu = 9u$; und daher $u = 1$, welcher Werth zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u = 1 + t$, so wird unsere Formel $-12t - 3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t = -s$, so wird unsere Formel $12s - 3s^4$, welche in dem Fall $s = 1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t = -1$ und $u = 0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen wie man will, so wird man niemals einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgendergestalt bewiesen werden kann.

342.

243.

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis: es ist also genug die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum desselben theilen lassen. Wäre z. E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so wüßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun u und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere

dere ungerad. Im erstern Fall müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweise die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyn demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. Man setze dahero $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p+q$ und $y = p-q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3+y^3 = 2p^3+6pqq = 2p(pp+3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3-y^3 = 6ppq+2q^3 = 2q(qq+3pp)$, welche Formel der vori-

gen

gen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, dahero es genug ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp+3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp+3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp+3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sey.

V. Wenn nun dieses Product $\frac{p}{4}.(pp+3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Denn wenn ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein

Cubus

Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn: wenn dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp+3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese pp und $pp+3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch dieser ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen Theiler haben; da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wenn die Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt, da denn beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey

Fälle

Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden insbesondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp+3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ und $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$. Damit dadurch werde $pp+3qq=(tt+uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird, $p=t^3-9tuu$ $t(tt-9uu)$, und $q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$: weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonsten $tt-uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp+3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden $p=t(tt-9uu)$ $=t(t+3u)(t-3u)$, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; dahero diese Formel $2t(t+3u)(t-3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstlich

lich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonsten auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist: also sind diese drey Factoren $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Denn nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn, als t und u.

IX. Wenn es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen, deren Summe auch ein Cubus wäre, und solchergestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen

nen Zahlen dergleichen Cubos gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p = 3r$ so wird unsere Formel $\frac{3r}{4}.(9rr+3qq)$, oder $\frac{9}{4}r(3rr+qq)$, welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerad seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q = t(tt-9uu)$ und $r = 3u(tt-uu)$: wo zu merken, daß weil q ungerad war, hier auch t ungerad, u aber eine gerade Zahl seyn müsse.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und uyd auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß

$\frac{2r}{3}$

$\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu) = 2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte: wenn man aber setzt $t+u = f^3$ und $t-u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solchergestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre: denn man darf nur setzen $f^3 - g^3 = h^3$, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser

ser Frage zu machen, wie drey Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3+b^3+x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber hier sich von selbsten darbietet, nemlich $x=-a$, so setze man $x=y-a$, da wird $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$, und dahero unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3-3ayy+3aay+b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, dahero man sogleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y+b$, deren Cubus ist $y^3+3byy+3bby+b^3$; woraus wir bekommen $-3ay+3aa=3by$

$= 3by + 3bb$, dahero $y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kann aber die Wurzel auch setzen $b + fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$; und f also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $3aa = 3bbf$ oder $f = \frac{aa}{bb}$, da denn die zwey ersten Glieder durch yy dividirt geben $y - 3a = f^3y + 3bff = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^3}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt giebt $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^3b^3$; daraus gefunden wird $y = \frac{3a^3b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6}$ $= \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$, und also $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^3}{b^3 - a^3} = a \cdot \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$.

Wenn also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den grössern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$

ein

ein Cubus, wenn $x = \frac{17}{7}$; denn da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen den dritten finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2a\,b3 + a3}{b3 - a3} + z$, da man denn wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläuftige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merkwürdiger Fall, wenn die beyden gegebenen Cubi einander gleich sind oder $b = a$: denn da bekommen wir $x = \frac{3a3}{0}$ das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung: dahero diese Frage, wenn $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelöst

werden können. Es sey z. E. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu merken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und dahero auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen und folgendergestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehr-Satz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemals einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, denn wenn sie einen

nen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn und also die ganze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müssen beyde Zahlen x und y ungerad seyn, dahero sowohl ihre Summe als Differenz gerad seyn wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; da denn von den Zahlen p und q die eine gerad die andere aber ungerad seyn muß. Hieraus folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp+3qq)$, und $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(3pp+qq)$, welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Dahero es genug seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p(pp+3qq)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, davon der erste ist, wenn die zwey Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da denn ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen, kein anderer seyn kann als 3.

II.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich untheilbar, so mache man erstlich $pp + 3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wenn $p = t(tt - 9uu)$ und $q = 3u(tt - uu)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müste. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonsten p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt - 9uu$ untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nemlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerad und die andere ungerad ist. Denn wenn beyde ungerad wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerad werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze dahero $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus welcher sey $= h^3$, also daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre,

das

das ist, wir hätten zwey weit kleinere Cubos nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9rr+3qq) = 9r(3rr+qq)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und dahero ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq + 3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$, da denn wieder von den Zahlen t und u die eine gerad die andere aber ungerad seyn muß, weil sonsten die beyden Zahlen q und r gerad würden. Hieraus aber bekommen wir den ersten Factor $9r = 27u(tt - uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich $u(tt - uu)$ das ist $u(t+u)(t-u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t+u = f^3$ und $t-u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$: weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen

len zwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar, daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinern Zahlen gleich wohl einen solchen Fall gebe, nemlich wenn $f = g$, und der obige Schluß betriegen könnte. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem ersten Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, so müßte seyn $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$, dahero auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da denn wiederum die beyden ersten Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keinesweges die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine

Art

Art drey Cubos x^3, y^3 und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wenn nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$; welcher Gleichung folgendergestalt ein Genüge geschehen kann.

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird wie wir gesehen $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$: ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird $v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr)$; dahero denn seyn muß $2p(pp + 3qq) = 2s(ss + 3rr)$, oder $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$.

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp + 3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun

diese

dieſe beyde Formeln $pp+3qq$ und $ss+3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müſſen, ſo ſey derſelbe $=tt+3uu$.

III. Zu dieſem Ende ſetze man
$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$ und
$ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu)$: da denn
$p=ft+3gu$ und $q=gt-fu$ wird:
folglich $pp=fftt+6fgtu+9gguu$ und
$qq=ggtt-2fgtu+ffuu$; hieraus
$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$ das iſt
$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$.

IV. Eben ſo erhalten wir aus der andern Formel
$s=ht+3ku$ und $r=kt-hu$,
woraus dieſe Gleichung entſpringt
$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=$
$(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu)$,
welche durch $tt+3uu$ dividirt giebt $ft(ff+3gg)$
$+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)$
$+3ku(hh+3kk)$ oder $ft(ff+3gg)-$
$ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg)$
woraus wir erhalten $t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+gg)-h(hh+3kk)}u$.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, ſo nehme man $u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk)$, damit ſey $t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)$, wo man

die

die vier Buchstaben f, g, h, und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus: I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$, und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkührliche Einschränkung gemacht worden.

Der ganze Kunstgriff besteht darin, daß unsere Gleichung durch $tt + 3uu$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angestellt werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(ff + 3gg)$ und $u = s(ff + 3gg) - 1$; hieraus also $p = -3fg(ff + 3gg) + 3fg(ff + 3gg) - 3g = -3g$, $q = -(ff + 3gg)^2 + f$, ferner $s = -3g$

$s = -3g(ff+3gg)$ und $r = -f(ff+3gg)+1$, woraus wir endlich bekommen $x = -3g-(ff+3gg)^2 + f$, $y = -3g+(ff+3gg)^2 - f$, $z = (3g-f)(ff+3gg)+1$ und endlich $v = -(3g+f)(ff+3gg)+1$. Laßt uns nun setzen $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; dahero haben wir diese Gleichung $-20^3+14^3+17^3 = -7^3$ oder $14^3+17^3+7^3 = 20^3$.

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $ff+3gg = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $hh+3kk = 3$, so wird seyn $t = -12$ und $u = 14$: hieraus wird $p = 2t+3u = 18$, $q = t-2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; dahero wir bekommen $x = p+q = -22$, $y = p-q = 58$, $z = r-s = -54$ und $v = r+s = 30$; also daß $-22^3+58^3-54^3 = 30^3$, oder $58^3 = 30^3+54^3+22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch seyn $29^3 = 15^3+27^3+11^3$.

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $ff+3gg = 12$ und $hh+3kk = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so wol-

wollen wir, setzen $t = -3$ und $u = 4$. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$ $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$: hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, also daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$: oder auch durch 2 abgekürzt $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Laßt uns setzen $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff + 3gg = ff$ und $hh + 3kk = 4hh$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$, $q = -f^3 + 4fh^3$, $r = 12h^3 - hf^3 + 4h^3 = 16h^3 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^3$, $y = p - q = 8fh^3 + f^3$, $z = r - s = 16h^3 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^3 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$, und $v = 18$, welche durch 3 abgekürzt geben $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$, und $v = 6$, also daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.
Hierbey ist merkwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5, um Eins steigen, dahero wir untersuchen wollen, ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

V. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, also daß

daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$: die Cubi derselben addirt geben nun $3x^3 + 6x = 3x(xx + 2)$, welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig daß ein Fall bekannt sey wo dieses geschieht, und nach einigem Probiren findet man $x = 4$, dahero setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird $xx = 16 + 8y + yy$ und $x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3$, woraus unsere Formel wird $216 + 150y + 36yy + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6 + fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen: da nun der Cubus davon ist $216 + 108fy + 18ffy + f^3y^3$, so muß seyn $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben $36 + 3y = 18ff + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 \cdot 36 + 18^3 \cdot 3y = 18^2 \cdot 25^2 + 25^3y$ oder $18^3 \cdot 36 - 18^3 \cdot 25^2 = 25^3y - 18^3 \cdot 3y$, dahero $y = \frac{18^3 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^2(18 \cdot 36 - 25^2)}{25^3 - 3 \cdot 18^2}$, und also $y = -\frac{324 \cdot 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}$; folglich $x = \frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu merken daß

daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Denn da $3x(xx+2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $=x^3y^3$, da man denn erhält $3xx+6 = xxy^3$ und also $xx = \frac{6}{y^3-3} = \frac{36}{6y^3-18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig den Nenner $6y^3-18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen lassen. Man setze deswegen $y=3z$, so wird unser Nenner $=162z^3-18$ welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3-2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wenn $z=1$; man setze dahero $z=1+v$, so muß seyn $16+54v+54vv+18v^3=\square$. Davon setze man die Wurzel $4+\frac{27}{4}v$, deren Quadrat ist $16+54v+\frac{729}{16}vv$, und also $54+18v=\frac{729}{16}$: oder $18v=-\frac{135}{16}$, folglich $2v=-\frac{15}{16}$, und $v=-\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z=1+v=\frac{17}{32}$: ferner $y=\frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher war $6y^3-18=162z^3-18=9(18z^3-2)$. Von diesem Factor aber $18z^3-2$ haben wir die Quadrat-Wurzel $4+\frac{27}{4}v=\frac{107}{128}$, also die Quadrat-Wurzel aus dem ganzen Nenner ist $\frac{321}{128}$: aus dem Zähler

aber

aber ist derselbe $= 6$, woraus folget $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen ganz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende: I.) $x - 1 = \frac{149}{107}$; II.) $x = \frac{256}{107}$; III.) $x + 1 = \frac{363}{107}$, deren Cubi zusammen addirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{41}{32} = \frac{503}{107}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

Ende des zweyten Theils.